Teoria do Raio Espectral e uma Caracterização do Número de Reprodutibilidade Basal para Doenças de Transmissão Direta

Cláudia H. Dezotti
UFRN - CCE
Depto. de Matemática
UNICAMP - IMECC
Depto. de Matemática Aplicada
dezotti@ime.unicamp.br

Hyun M. Yang
UNICAMP - IMECC
Depto. de Matemática Aplicada
hyunyang@ime.unicamp.br

Resumo

Neste trabalho damos uma caracterização do número de reprodutibilidade basal R_0 para uma doença infecciosa de transmissão direta como sendo o raio espectral da derivada de Fréchet de um certo operador integral. Obtemos limites inferior e superior para R_0 e condições suficientes para a unicidade da solução não-trivial da força de infecção, que neste caso pode ser atingida como o limite de uma seqüência recurssiva.

Palavras-chave: raio espectral, operador integral, número de reprodutibilidade basal.

1 Introdução

Os modelos matemáticos não só auxiliam prever e interpretar as tendências de uma epidemia, mas também orientam na coleta de dados e no estabelecimento de programas de controle. O bom desempenho de um modelo depende da ação conjunta e equilibrada das variáveis que determinam o curso da infecção no indivíduo com as variáveis que controlam o padrão de infecção na comunidade.

O agente patológico causador é classificado em modelagem matemática como microparasita. A caracterização de microparasitas e o fato de não existir preocupação com o grau de severidade da doença faz com que os modelos compartimentais prestem-se bem à modelagem de doenças infecciosas de transmissão direta.

Muitos dos parâmetros epidemiológicos e demográficos podem ser medidos diretamente por estudos apropriados (taxas de nascimento e mortalidade, taxa de recuperação, etc). Como o **parâmetro de transmissão** combina fatores biológicos, sociais e de meio ambiente, não é possível medi-lo diretamente e, freqüentemente, ele é obtido indiretamente através da medida de outros parâmetros.

A **força de infecção** λ é definida como a taxa *per capita* de aquisição da infecção e $\lambda(t)\,\Delta(t)$ representa a probabilidade que um dado indivíduo suscetível tem de tornar-se infectado no intervalo de tempo $\Delta(t)$. Ela é usualmente assumida como sendo linearmente proporcional ao número total de indivíduos infecciosos (Bailey [3], Dietz [7]). Se designarmos por β o parâmetro de transmissão, teremos que

$$\lambda(t) = \beta Y(t),$$

onde $Y(t)$ representa o número de indivíduos infecciosos no tempo t.

Um outro parâmetro de interesse em modelos epidemiológicos é o **número de reprodutibilidade basal** R_0. Ele representa a capacidade intrínseca que um microorganismo tem de invadir e se estabelecer em uma comunidade. Para o caso de microparasitas, R_0 pode ser definido como o número médio de infecções secundárias que um único indivíduo infeccioso é capaz de produzir em uma população hospedeira totalmente suscetível. Assim, se $R_0 \leq 1$ a doença se extingue e se $R_0 > 1$ temos a ocorrência do surto epidêmico.

Se a população for assumida **homogeneamente misturada** segue da Lei de Ação das Massas uma equação que ao mesmo tempo fornece uma maneira de estimarmos o número de reprodutibilidade basal e uma forma de controle epidemiológico da doença. Esta equação é dada por

$$1 = R_0 x^*,$$

onde x^* representa a fração de suscetíveis no equilíbrio (note que x^* pode ser efetivamente encontrado, por exemplo, a partir de estudos sorológicos).

No entanto a asserção de ser a população homogeneamente misturada é muito restritiva, e efetivamente não se verifica no caso, por exemplo, de doenças infantis infecciosas de transmissão direta, como rubéola, sarampo ou catapora, que visivelmente têm uma idade-dependência na sua taxa de transmissão. Existem evidências empíricas da idade-dependência da força de infecção, veja por exemplo Anderson e May [1].

Desta maneira, um modelo mais realistísco para doenças infecciosas de transmissão direta deve conter algum tipo de heterogeneidade. Essa não-homogeneidade foi introduzida na taxa de transmissão de várias maneiras (Hoppenstead [12], Greenhalgh [11], Anderson e May [2], Inaba [13] e Yang[17]), e a partir desta asserção vários resultados acerca do número de reprodutibilidade basal R_0 foram deduzidos.

Greenhalgh [10] e Inaba [13] caracterizaram R_0 como o raio espectral de certo operador integral respectivamente, para funções separáveis e um subconjunto especial de $\mathcal{L}^2[0,L]$, onde L representa a idade máxima de vida. Em nosso trabalho utilizamos um modelo idade-estruturado e caracterizamos R_0 como o raio espectral da derivada de Fréchet de um certo operador integral obtendo limites inferior e superior para R_0. Estabelecemos condições suficientes para a unicidade do estado estacionário não-trivial e uma maneira recurssiva para obtenção da força de infecção. Também estudamos condições para a estabilidade local da solução trivial.

2 O modelo

Para descrever o espalhamento de uma doença infecciosa de transmissão direta em uma população idade-estruturada consideremos um sistema de equações integro-diferencial (veja Dietz [7]). Assumimos a população fechada e dividida em compartimentos designados por $X(a,t)$, $H(a,t)$, $Y(a,t)$ e $Z(a,t)$, que representam, respectivamente, a fração de suscetíveis, latentes (infectados mas não infecciosos), infecciosos e imunes na idade a no instante t. O tamanho total da comunidade é assumido constante igual a N, de modo que a taxa de mortalidade μ e a taxa de nascimento X_b devem satisfazer a equação

$$X_b \int_0^L \exp\left(-\int_0^a \mu(s)\,ds\right) da = N, \tag{1}$$

onde L representa a idade máxima que um indivíduo pode atingir. Contudo, como estamos considerando a fração de indivíduos, tomamos $N = 1$.

Estamos desconsiderando a imunidade adquirida verticalmente (sendo assim, os recém-nascidos são considerados suscetíveis), a perda de imunidade e a mortalidade induzida pela doença.

As considerações anteriores resultam no seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial X}{\partial a}(a,t) + \dfrac{\partial X}{\partial t}(a,t) & = & -\left[\lambda(a,t) + \nu(a) + \mu\right] X(a,t) \\
\dfrac{\partial H}{\partial a}(a,t) + \dfrac{\partial H}{\partial t}(a,t) & = & \lambda(a,t)\,X(a,t) - (\mu+\sigma)\,H(a,t) \\
\dfrac{\partial Y}{\partial a}(a,t) + \dfrac{\partial Y}{\partial t}(a,t) & = & \sigma H(a,t) - (\mu+\gamma)\,Y(a,t) \\
\dfrac{\partial Z}{\partial a}(a,t) + \dfrac{\partial Z}{\partial t}(a,t) & = & \nu(a)\,X(a,t) + \gamma Y(a,t) - \mu Z(a,t)\,,
\end{array}\right. \tag{2}$$

onde a força de infecção na idade a no instante t é definida por

$$\lambda(a,t) = \int_0^L \beta(a,a')\,Y(a',t)\,da', \tag{3}$$

com $\beta(a,a')$ sendo a taxa de contato idade-estruturada entre indivíduos suscetíveis na idade a com indivíduos infecciosos da idade a', $\nu(a)$ a taxa de vacinação, σ^{-1} o período médio de latência e γ^{-1} o período médio de recuperação.

A partir das asserções do modelo temos as condições de fronteira do sistema (2) dadas por

$$\left\{\begin{array}{rcl}
X(0,t) & = & X_b \\
H(0,t) = Y(0,t) = Z(0,t) & = & 0.
\end{array}\right. \tag{4}$$

3 A caracterização de $\mathbf{R}_0$

Considerando o sistema (2) e as condições de fronteira (4) no estado estacionário e resolvendo-o de modo a obter uma expressão para a força de infecção (3) temos que

$$\lambda(a) = \int_0^L B'(a,\zeta)\,\lambda(\zeta)\,e^{-\int_0^\zeta \lambda(s)ds} d\zeta, \tag{5}$$

onde o núcleo é dado por

$$B'(a,\zeta) = \sigma\, X_b\, e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L \beta(a,a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da'\right] ds. \tag{6}$$

As definições e os resultados matemáticos necessários para um bom entendimento do que será aqui desenvolvido podem ser encontrados na seguinte literatura: Griffel [9] e Kreyszig [16] (análise funcional), Deimling [6] (análise funcional não-linear) e Krasnosel'skii [14], [15] (operadores integrais). Aqui somente serão introduzidos os resultados estritamente necessários à compreensão do texto.

Consideremos o operador integral T agindo no espaço de Banach $C[0,L]$, o conjunto da funções contínuas do intervalo $[0,L]$ em $\mathbf{R}$ com a norma usual $\|f\| = \sup_{a\in[0,L]} |f(a)|$, com cone $C[0,L]^+ = \{f \in C[0,L] : f(a) \geq 0\}$, definido pela equação

$$T\lambda(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda(\zeta)\, d\zeta, \tag{7}$$

onde

$$M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta)) = e^{-\int_0^\zeta \lambda(s)ds} e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds}, \tag{8}$$

e

$$B(a,\zeta) = \sigma X_b \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L \beta(a,a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da'\right] ds. \tag{9}$$

Se

i. $\beta(a,a')$ é contínua e positiva, exceto possivelmente em $a = a' = 0$ onde $\beta(a,a')$ pode ser igual a 0,

ii. $\nu(a)$ é contínua ou limitada e contínua por partes com no máximo um número finito de descontinuidades,

então as seguintes propriedades de $M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))$ e $B(a,\zeta)$ podem ser facilmente verificadas:

a. $B(a,\zeta)$ está definida em $[0,L] \times [0,L]$ é positiva e contínua em a e ζ;

b. $M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))$ está definida em $[0, L] \times [0, \infty) \times [0, \infty)$, é positiva, contínua em ζ para cada λ e ν, estritamente monótona decrescente em λ para cada ζ e ν, e existe $k_1 \geq 0$ tal que

$$|M(\zeta, \lambda_1(\zeta), \nu(\zeta)) - M(\zeta, \lambda_2(\zeta), \nu(\zeta))| \leq k_1 \|\lambda_1 - \lambda_2\| + R(\lambda_1, \lambda_2)$$

com $\lim_{\|\lambda_1 - \lambda_2\| \to 0} R(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ e

c. Existe um número real $m > 0$ tal que $|M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))| \leq m$ para todo ζ, λ e ν.

Lema 1 *O operador T definido pela equação (7) é positivo, completamente contínuo e tem derivada forte de Fréchet em $0 \in C[0, L]$ na direção do cone $C[0, L]^+$ dada pela equação*

$$T'(0)\, h(a) = \int_0^L B(a, \zeta)\, M(\zeta, 0, \nu(\zeta))\, h(\zeta)\, d\zeta. \tag{10}$$

Além disso, $T'(0)$ é um operador linear, completamente contínuo e fortemente positivo.

Dem. Na demonstração do lema usamos além das definições os seguintes resultados clássicos: o Critério de Compacidade (veja Kreyszig [16], página 407) e o Teorema de Ascoli (veja Kreyszig [16], página 454).

Para demonstrarmos que $R_0 = r(T'(0))$ utilizamos os teoremas enunciados abaixo. Nos teoremas, X, K e T serão espaço normado, cone e operador gerais.

Teorema 1 *(Krasnosel'skii [14], p. 135) Consideremos um operador positivo T (com $T(0) = 0$) tendo a derivada forte de Fréchet $T'(0)$ e a derivada assintótica forte $T'(\infty)$, ambas com respeito ao cone. Suponhamos que o espectro do operador $T'(\infty)$ esteja contido no círculo $|\mu| \leq \rho < 1$, $T'(0)$ tenha em K um autovetor h_0 cujo autovalor é maior que 1, ou seja,*

$$T'(0)\, h_0 = \mu_0 h_{0,}$$

onde $\mu_0 > 1$ e $T'(0)$ não tenha em K autovetores correspondendo ao autovalor 1. Se T é um operador completamente contínuo então T tem pelo menos um ponto fixo não-trivial no cone.

Teorema 2 *(Deimling [6], p. 228) Sejam X um espaço de Banach, $K \subset X$ um cone sólido, isto é, $int(K) \neq \emptyset$, e $T : X \to X$ um operador linear, compacto e fortemente positivo. Então:*

i. $r(T) > 0$, onde $r(T)$ é um autovalor simples com autovetor $v \in int(K)$ e não existe outro autovalor com autovetor positivo;

ii. Se λ é um autovalor e $\lambda \neq r(T)$ então $|\lambda| < r(T)$;

iii. Se $S : X \to X$ é um operador linear limitado e $Sx \geq Tx$ em K, então $r(S) \geq r(T)$. Além disso, se $x \in K, x > 0$ e $Sx > Tx$, segue $r(S) > r(T)$.

Teorema 3 ***(Teorema de Existência)*** *Consideremos o operador $T : C[0,L] \to C[0,L]$ definido pela equação (7), ou seja,*

$$Tu(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, u(\zeta), \nu(\zeta))\, u(\zeta)\, d\zeta.$$

Se $r(T'(0)) \leq 1$ então a única solução da equação

$$\lambda(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, \lambda(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda(\zeta)\, d\zeta, \tag{11}$$

é a solução trivial. Caso contrário, se $r(T'(0)) > 1$ então existe pelo menos uma solução positiva não-trivial para esta equação.

Dem. Seguiremos inicialmente o mesmo argumento usado por Greenhalgh [10].

Suponhamos $r(T'(0)) \leq 1$ e que a equação (11) tenha uma solução positiva não-trivial λ^*, isto é,

$$\lambda^*(a) = \int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, \lambda^*(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda^*(\zeta)\, d\zeta.$$

Sendo $\lambda^* > 0$ e $M(\zeta, \lambda, \nu)$ estritamente monótona decrescente em λ, temos

$$\int_0^L B(a,\zeta)\, M(\zeta, \lambda^*(\zeta), \nu(\zeta))\, \lambda^*(\zeta)\, d\zeta < T'(0)\, \lambda^*(a).$$

Como ambos os lados da equação acima são contínuos num compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\lambda^*(1+\varepsilon) < T'(0)\, \lambda^*.$$

Iterando a equação anterior n vezes temos

$$\lambda^*(1+\varepsilon)^n < T'(0)^n\, \lambda^*.$$

Assim

$$\|\lambda^*(1+\varepsilon)^n\| < \|T'(0)^n\, \lambda^*\| \leq \|T'(0)^n\|\, \|\lambda^*\|$$

e

$$(1+\varepsilon)^n < \|T'(0)^n\|,$$

para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pela Fórmula de Gelfand,

$$r(T'(0)) = \lim_{n\to\infty} \|T'(0)^n\|^{\frac{1}{n}},$$

segue que $r\left(T'\left(0\right)\right) > 1$, o que é uma contradição.
Suponhamos agora que $r\left(T'\left(0\right)\right) > 1$. Primeiramente calculemos $T'\left(\infty\right)$. Para todo $u \in K$, temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T\left(tu\right)}{t} = 0,$$

desde que

$$T\left(tu\right) = \int_0^L B'\left(a,\zeta\right) e^{-t\int_0^\zeta u(s)ds} tu\left(\zeta\right) d\zeta,$$

onde $B'\left(a,\zeta\right)$ é dado pela equação (6), isto é,

$$B'\left(a,\zeta\right) = \sigma X_b e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s}\left[\int_s^L \beta\left(a,a'\right) e^{-(\mu+\gamma)a'} da'\right] ds.$$

então $T'\left(\infty\right) = 0$. Agora, mostraremos que T é fortemente assintoticamente linear com respeito ao cone $C\left[0,L\right]^+$, ou seja,

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R, x\in K} \frac{\|Tx - T'\left(\infty\right)x\|}{\|x\|} = 0.$$

Note que

$$\|Tx\| = \sup_{a\in[0,L]}\left|\int_0^L B'\left(a,\zeta\right) e^{-\int_0^\zeta x(s)ds} x\left(\zeta\right) d\zeta\right| \leq m'\left[1 - e^{-\int_0^L x(s)ds}\right],$$

onde $m' = \sup_{a,\zeta\in[0,L]}\left|B'\left(a,\zeta\right)\right|$. Então

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R, x\in K} \frac{\|Tx - T'\left(\infty\right)x\|}{\|x\|} &= \lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R, x\in K} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \\ &\leq \lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geq R, x\in K} \frac{m'\left[1 - e^{-\int_0^L x(s)ds}\right]}{\|x\|} = 0,\end{aligned}$$

ou seja, T é fortemente assintoticamente linear com respeito ao cone $C\left[0,L\right]^+$ e sua derivada assintótica forte com respeito ao cone $C\left[0,L\right]^+$ é $T'\left(\infty\right) = 0$.
Consideremos a identidade $\mu_0 = r\left(T'\left(0\right)\right)$ no Teorema 1. De acordo com o Teorema 2, $r\left(T'\left(0\right)\right)$ é um autovalor simples de $T'\left(0\right)$ com autovetor no $int\left(K\right)$ e não existe outro autovalor de $T'\left(0\right)$ com autovetor positivo. Pelo argumento anterior, sendo $T'\left(0\right)$ um operador positivo, 1 não pode ser um autovalor positivo de $T'\left(0\right)$. Desde que T é completamente contínuo, todas as condições do Teorema 1 são satisfeitas, o que resulta que a equação (11) tem pelo menos uma solução não-trivial.

4 A unicidade da solução não-trivial

Nesta seção estudaremos condições suficientes para que a solução não-trivial da equação (5) seja única e possa ser atingida por aproximações sucessivas. Serão utilizados resultados acerca de operadores côncavos.

Teorema 4 *(Krasnosel'skii [14], p. 188) Se o operador A é u_0-monótono, então a equação*

$$Ax = \eta x$$

não tem duas soluções não-nulas distintas no cone para algum valor do parâmetro η.

Teorema 5 *(Krasnosel'skii [14], p. 192) Consideremos a equação*

$$Ax = x$$

onde A é um operador côncavo monótono tendo uma única solução não-nula x^* no cone K. Se uma da seguintes condições é satisfeita:

a. O cone K é regular e o operador A é contínuo.

b. O cone K é normal e o operador A é completamente contínuo.

Então as sucessivas aproximações

$$x_n = Ax_{n-1} \, (n = 1, 2, ...)$$

convergem com respeito a norma para x^* independente da aproximação inicial $x_0 \in K$, $x_0 \neq 0$.

Consideremos o operador A agindo no espaço de Banach $C\,[0, L]$ com cone $C\,[0, L]^+$, definido por

$$Au = \int_0^L B'\,(a, \zeta)\, e^{-\int_0^\zeta u(s)ds} u\,(\zeta)\, d\zeta, \tag{12}$$

com

$$B'\,(a, \zeta) = \sigma X_b e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} G\,(a, s)\, ds \tag{13}$$

e

$$G\,(a, s) = \int_s^L \beta\,(a, a')\, e^{-(\mu+\gamma)a'} da'. \tag{14}$$

A equação (12) pode ser reescrita como

$$Au\,(a) = B'\,(a, 0) + \int_0^L e^{-\int_0^\zeta u(s)ds} \frac{\partial B'}{\partial \zeta}\,(a, \zeta)\, d\zeta, \tag{15}$$

de maneira que temos

$$Au - Av = \int_0^L e^{-\int_0^\zeta v(s)ds} \left[e^{-\int_0^\zeta (u(s)-v(s))ds} - 1 \right] \frac{\partial B'}{\partial \zeta} (a,\zeta)\, d\zeta.$$

Para $u > v$, se $\frac{\partial B'}{\partial \zeta}(a,\zeta) < 0$ temos $Au > Av$ e portanto o operador A é monótono.

Iremos calcular $\frac{\partial B'}{\partial \zeta}(a,\zeta)$. Esta derivada parcial é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial B'}{\partial \zeta}(a,\zeta) &= -\sigma X_b e^{-N(\zeta)} \left\{ \frac{d}{d\zeta} N(\zeta)\, e^{\sigma\zeta} \int_\zeta^L e^{-s(\sigma-\gamma)} G(a,s)\, ds \right. \\ & \left. + e^{\gamma\zeta} G(a,\zeta) - \sigma e^{\sigma\zeta} \int_\zeta^L e^{-s(\sigma-\gamma)} G(a,s)\, ds \right\}. \end{aligned}$$

Observe que $\frac{\partial B}{\partial \zeta}'(a,\zeta) < 0$ se

$$e^{\gamma\zeta} G(a,\zeta) - \sigma \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} G(a,s)\, ds > 0.$$

Contudo

$$e^{\gamma\zeta} G(a,\zeta) = \sigma \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma\zeta} G(a,\zeta)\, ds + e^{\gamma\zeta - \sigma(L-\zeta)} G(a,\zeta),$$

e portanto

$$\begin{aligned} & e^{\gamma\zeta} G(a,\zeta) - \sigma \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} G(a,s)\, ds = \\ & = e^{\gamma\zeta-\sigma(L-\zeta)} G(a,\zeta) + \sigma \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} \left[e^{\gamma\zeta} G(a,\zeta) - e^{\gamma s} G(a,s) \right] ds. \end{aligned}$$

Sendo assim, se $e^{\gamma s} G(a,s)$ é decrescente em s para todo a, temos $\frac{\partial B'}{\partial \zeta}(a,\zeta) < 0$.

Teorema 6 *Se a função $H(a,s) = e^{\gamma s} G(a,s)$ é decrescente em s para cada a, então o operador A é u$_0$-monótono, onde $u_0 \equiv 1$, e completamente contínuo.*

Dem. Que A é positivo e completamente contínuo é de fácil verificação.

Utilizando as observações feitas anteriormente acerca do operador A e seu núcleo, a definição de u$_0$-monótono, e o Primeiro Teorema do Valor Médio (veja Bartle [5], página 301), é possível verificar a afirmação que A é u$_0$-monótono, onde $u_0 \equiv 1$.

Teorema 7 *Consideremos a função*

$$H(a,s) = e^{\gamma s} G(a,s)$$

decrescente em s para cada a, e o operador $T : C[0,L] \to C[0,L]$ definido pela equação (7). Se $r(T'(0)) > 1$ então a equação

$$\lambda(a) = \int_0^L B'(a,\zeta)\, e^{-\int_0^\zeta \lambda(s)ds} \lambda(\zeta)\, d\zeta$$

tem uma única solução não-trivial que é atingida por aproximações sucessivas dadas por

$$\lambda_n = T\lambda_{n-1},$$

onde $n = 1, 2, ...,$ a qual independe da aproximação inicial $\lambda_0 \in C[0,L]^+$, $\lambda_0 \neq 0$.

Dem. O operador T é completamente contínuo e u_0-monótono e $C[0,L]^+$ é um cone normal. Usando os teoremas Teorema 3 (**Teorema de Existência)**, Teorema 4 e o Teorema 5 temos o resultado desejado.

5 A estabilidade da solução trivial

Sejam $x(a,t)$, $h(a,t)$, $y(a,t)$ e $z(a,t)$ pequenas perturbações do equilíbrio (X^*, H^*, Y^*, Z^*), ou seja,

$$\begin{cases} X(a,t) &= X^*(a) + x(a,t) \\ H(a,t) &= H^*(a) + h(a,t) \\ Y(a,t) &= Y^*(a) + y(a,t) \\ Z(a,t) &= Z^*(a) + z(a,t), \end{cases} \tag{16}$$

gerando uma perturbação na força de infecção dada por

$$\lambda(a,t) = \lambda^*(a) + l(a,t), \tag{17}$$

onde $\lambda^*(a)$, a força de infecção na idade a no estado estacionário, é dada por

$$\lambda^*(a) = \int_0^L \beta(a,a')\, Y^*(a')\, da'$$

e

$$l(a,t) = \int_0^L \beta(a,a')\, y(a',t)\, da'.$$

Substituindo as equações (16) e (17) no sistema integro-diferencial (2) e (3), e considerando somente os termos de primeira ordem, obtemos um novo sistema integro-diferencial, que resolvido via o Método de Separação de Variáveis (consideramos soluções nas formas $x(a,t) = x(a)e^{\omega t}$, $h(a,t) = h(a)e^{\omega t}$, $y(a,t) = y(a)e^{\omega t}$ e $z(a,t) = z(a)e^{\omega t}$ onde $\omega \in \mathbf{C}$) resulta na equação integral

$$\begin{aligned} l(a) &= \int_0^L \int_0^{a'} \int_0^b \sigma X_b \beta(a,a')\, e^{-(\mu+\gamma+\omega)a'} e^{(\gamma-\sigma)b} e^{-\Lambda^*(\zeta)-N(\zeta)+\sigma\zeta} \\ &\times \left[l(\zeta)\, e^{\omega\zeta} - \lambda^*(\zeta) \int_0^\zeta l(s)\, e^{\omega s} ds \right] d\zeta db da', \end{aligned} \tag{18}$$

que no caso do equilíbrio trivial, ou seja, $\lambda^* \equiv 0$, tem a forma

$$l(a) = \int_0^L \int_0^{a'} \int_0^b \sigma X_b \beta(a, a') e^{-(\mu+\gamma+\omega)a'} e^{(\gamma-\sigma)b} e^{-N(\zeta)+\sigma\zeta} l(\zeta) e^{\omega\zeta} d\zeta db da'. \tag{19}$$

Mudando as ordens de integração, a equação (19) pode ser reescrita como

$$l(a) = \int_0^L S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega) l(\zeta) d\zeta, \tag{20}$$

onde

$$S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega) = e^{-N(\zeta)} \int_\zeta^L \left[\int_b^L \sigma X_b \beta(a, a') e^{-\mu a'} e^{(\zeta-a')\omega} e^{(b-a')\gamma} da' \right] e^{(\zeta-b)\sigma} db. \tag{21}$$

Ao considerarmos $\omega = 0$ nas equações (20) e (21) obtemos

$$l(a) = \int_0^L S(a, \zeta, \nu(\zeta), 0) l(\zeta) d\zeta = T'(0) l(a), \tag{22}$$

onde

$$S(a, \zeta, \nu(\zeta), 0) = M(\zeta, 0, \nu(\zeta)) B(a, \zeta) \tag{23}$$

e $T'(0)$ é o operador dado pela equação (10).

Estamos interessados em verificar se o equilíbrio trivial é localmente estável ou localmente instável, e isto equivale a analizar se a parte real de ω é negativa ou não-negativa. Consideremos então o caso onde ω é um número real. Quando ω é um número real positivo é de fácil verificação que $S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega)$ é uma função estritamente monótona decrescente em ω.

Consideremos o operador linear R_ω sobre o espaço de Banach $C[0, L]$ com a norma usual, ou seja, $\|u\| = \sup_{a\in[0,L]} |u(a)|$, com o cone $K = C[0, L]^+$, definido por

$$R_\omega l(a) = \int_0^L S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega) l(\zeta) d\zeta. \tag{24}$$

Os lemas que seguem serão usados na prova do **Teorema da Estabilidade**:

Lema 2 *O operador R_ω definido em $C[0, L]$ pela equação (24) é linear, completamente contínuo e fortemente positivo.*

Dem. A demonstração pode ser feita a partir das definições e novamente usando os teoremas Critério de Compacidade e o Teorema de Ascoli encontrados em Kreyszig [16], na páginas 407 e 454, respectivamente.

No próximo resultado faremos uso do seguinte teorema:

Teorema 8 *(Zabreyko [18], p. 138) Sejam E_1, E_2 espaços de Banach com cones K_1 e K_2, respectivamente. Consideremos $A : E_1 \to E_1$ um operador linear, $B : E_2 \to E_2$ um operador linear positivo e $\varphi : E_1 \to E_2$ um operador satisfazendo as seguintes condições:*

i. $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v), \forall u, v \in E_1.$

ii. Se $\|\varphi(u_n)\| \to 0$ *onde* $n \to \infty$ *então* $|u_n| \to 0$ *onde* $n \to \infty$.

iii. $\varphi(Au) \leq B\varphi(u), \forall u \in K_1.$

Então $r(A) \leq r(B)$.

Definamos para um operador linear limitado em um espaço de Banach, $T : X \to X$, $r(T)$ como sendo seu raio espectral. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 9 *Consideremos a função*

$$\begin{array}{rlcl} r: & [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ & \omega & \to & r(R_\omega), \end{array}$$

onde o operador R_ω está definido pela equação (24). Então $r(.)$ é uma função contínua em ω, $\lim_{\omega \to +\infty} r(\omega) = 0$ e $r(R_{\omega_2}) < r(R_{\omega_1})$ para todo $\omega_1 < \omega_2$. Em particular, $r(R_\omega) < r(T'(0))$ para todo $\omega \in \mathbf{R}$ positivo.

Dem. Mostramos inicialmente que $r(R_{\omega_2}) < r(R_{\omega_1})$ para todo $\omega_1 < \omega_2$. Observe que se $\omega_1 < \omega_2$ então $S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega_1) > S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega_2)$. Segue então da definição de R_ω que $R_{\omega_1} > R_{\omega_2}$.

Usando o Teorema 2 (iii) para $T = R_{\omega_2}$ e $S = R_{\omega_1}$, temos $r(R_{\omega_1}) > r(R_{\omega_2})$. A desigualdade $r(R_\omega) < r(T'(0))$ segue de observarmos que $R_0 = T'(0)$.

Vejamos que $r(R_\omega) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$. Considerando no Teorema anterior $E_1 = C[0,L]$, $E_2 = R^n$, $K_1 = C[0,L]^+$, $K_2 = \{(\zeta_1, ..., \zeta_n); \zeta_i \geq 0, i = 1, ..., n\}$, $A = R_\omega$, $\varphi(u) = \left(\left\|u\,|_{[a_0,a_1]}\right\|, ..., \left\|u\,|_{[a_{n-1},a_n]}\right\|\right)^t$ e $B = S(\omega) = (S_{ij}(\omega))_{1 \leq i,j \leq n}$, onde $S_{ij}(\omega) = \sup_{a_{i-1} \leq a \leq a_i} \int_{a_{j-1}}^{a_j} S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega)\, d\zeta$, temos $r(R_\omega) \leq r(S(\omega))$. Fazendo uso do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Bartle [4], página 44) temos $S(a, \zeta, \nu(\zeta), \omega) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$, em particular, $S_{ij}(\omega) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$. Desde que $r(S(\omega)) = \max_{\lambda \in \sigma(S(\omega))} |\lambda|$, temos $r(S(\omega)) \to 0$ quando $\omega \to +\infty$.

Vejamos ser $r(.)$ uma função contínua em ω. Inicialmente provamos que $r(\omega)$ é contínua à esquerda para todo $\omega > 0$. Consideremos uma seqüência crescente $(\omega_n)_n$ em $[0, +\infty)$ tal que $\omega_n \to \omega$ quando $n \to +\infty$. Desde que $r(.)$ é uma função decrescente de ω temos que

$$\omega_n \leq \omega_{n+1} \leq \omega$$
$$r(\omega_n) \geq r(\omega_n + 1) \geq r(\omega).$$

Chamemos $r_n = r(\omega_n)$ e $r = r(\omega)$. Desde que $(r_n)_n$ é uma seqüência decrescente limitada, existe r^* tal que

$$r^* = \lim_{n\to\infty} r_n = \inf\{r_n; n = 1, 2, ...\} \geq r,$$

de acordo com Bartle [5], página 112.
Para cada n seja $l_n \in C[0, L]^+$ tal que $\|l_n\| = 1$ e

$$R_{\omega_n} l_n = r_n l_n.$$

Se encontrarmos $l^* \in C[0, L]^+$ tal que $R_{\varpi} l^* = r^* l^*$, isto é, r^* é um autovalor de R_ω, então

$$r^* = |r^*| \leq r(R_\omega) = r,$$

e obtemos o resultado desejado.
Sendo R_ω compacto e $(l_n)_n$ uma seqüência limitada podemos assumir que $(R_\omega l_n)_n$ é convergente. Suponhamos l^* tal que $R_\omega l_n \to l^*$ quando $n \to \infty$.
Desde que

$$\|R_{\omega_n} l_n - R_\omega l_n\| \leq \|R_{\omega_n} - R_\omega\| \|l_n\| = \|R_{\omega_n} - R_\omega\|,$$

temos que $\|R_{\omega_n} l_n - R_\omega l_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Sendo

$$\begin{aligned} \|R_{\omega_n} l_n - l^*\| &\leq \|R_{\omega_n} l_n - l^* + R_\omega l_n - R_\omega l_n\| \\ &\leq \|R_{\omega_n} l_n - R_\omega l_n\| + \|R_\omega l_n - l^*\|, \end{aligned}$$

então $\|R_{\omega_n} l_n - l^*\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto $R_{\omega_n} l_n \to l^*$ quando $n \to \infty$. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n}(r_n l_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_n} R_{\omega_n} l_n = \frac{1}{r^*} l^*.$$

Assim

$$R_\omega(l^*) = R_\omega\left(r^* \lim_{n\to\infty} l_n\right) = r^* \lim_{n\to\infty} R_\omega(l_n) = r^* l^*.$$

Provamos agora que $r(\omega)$ é contínua à direita para todo $\omega \geq 0$. Seja $(\omega_n)_n$ uma seqüência decrescente tal que $\omega_n \to \omega$ quando $n \to \infty$. Então

$$\omega \leq \omega_{n+1} \leq \omega_n,$$

e, conseqüentemente,

$$r \geq r_{n+1} \geq r_n.$$

Sendo $(r_n)_n$ uma seqüência crescente limitada, existe $r^{**} \in \mathbf{R}$ tal que

$$r^{**} = \lim_{n\to\infty} r_n = \sup\{r_n; n = 1, 2, ...\} \leq r,$$

de acordo com Bartle [5], página 111. Suponhamos que $0 < r^{**} < r$. Consideremos o operador resolvente de R_ω definido em um domínio $\mathcal{D}$ de $\mathbf{C}$,

$$\Re : \lambda \in \mathcal{D} \longmapsto \Re(\lambda) = (R_\omega - \lambda Id)^{-1},$$

e para cada n, $n = 1, 2, ...$, o operador resolvente de R_{ϖ_n} definido em um domínio $\mathcal{D}_n$ de $\mathbf{C}$

$$\Re_n : \lambda \in \mathcal{D}_n \longmapsto \Re_n(\lambda) = (R_{\omega_n} - \lambda Id)^{-1},$$

com suas singularidade sendo seus autovalores. Sendo R_ω um operador linear compacto fortemente positivo, temos que r é uma singularidade isolada que é um polo simples de $\Re$. Pela mesma razão, cada r_n é uma singularidade isolada que é um polo simples de $\Re_n$.
Desde que $\lim_{n\to\infty} r_n = r^{**} < r$ e

$$r_n = r(R_{\omega_n}) = \sup\{|\lambda|; \lambda \text{ é um autovalor de } R_{\omega_n}\},$$

segue que existe uma vizinhança de r, $B_\varepsilon(r) = \{\lambda \in \mathbf{C} \cap \mathcal{D}; |\lambda - r| < \varepsilon\}$, tal que podemos assumir que $\Re_n$ é holomorfa em $B_\varepsilon(r)$ e sobre sua fronteira $\partial(B_\varepsilon(r)) = \{\lambda \in \mathbf{C} \cap \mathcal{D}; |\lambda - r| = \varepsilon\}$.
Consideremos ℓ como sendo a curva contínua, fechada e simples descrita por $\partial(B_\varepsilon(r))$, que pode ser orientada no sentido positivo. Desde que $\Re_n$ é holomorfa dentro e sobre ℓ, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\ell \Re_n(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Sendo r um polo simples de $\Re$ e a única singularidade de $\Re$ dentro de ℓ, então

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\ell \Re(\lambda)\, d\lambda = \text{resíduo de } \Re \text{ em } r \neq 0.$$

Segue que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_\ell \Re_n(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_\ell \lim_{n\to\infty} \Re_n(\lambda)\, d\lambda == \frac{1}{2\pi i} \oint_\ell \Re(\lambda)\, d\lambda \neq 0,$$

e isto é uma contradição (veja Dunford e Schwartz [8]). Assim $r^{**} = r$.

Teorema 10 ***(Teorema da Estabilidade)*** *Se $r(T'(0)) \leq 1$ então o equilíbrio trivial é localmente estável. Se $r(T'(0)) > 1$ então o equilíbrio trivial é localmente instável.*

Dem. Se $r(T'(0)) \leq 1$, pelo Teorema 9 temos que $r(R_\omega) < r(T'(0)) \leq 1$ e sendo R_ω operador linear completamente contínuo fortemente positivo, pelo Teorema 2 seu raio espectral é um autovalor, então a única solução da equação(20) é a trivial.
Suponhamos que $r(T'(0)) > 1$. Sendo $r(\omega)$ uma função decrescente, contínua em ω e desde que $\lim_{\omega\to+\infty} r(\omega) = 0$ (veja Teorema 9), existe $\omega^* > 0$ tal que $r(\omega^*) = 1$ e a correspondente autofunção de $r(R_{\omega^*})$ gera a instabilidade do equilíbrio trivial.

6 Limites inferior e superior para $\mathbf{R}_0$

O principal resultado desta seção trata da possibilidade de estimarmos limites para o raio espectral do operador $T'(0)$, que caracteriza o número de reprodutibilidade.

Teorema 11 *(Krasnosel'skii [14], p. 67) Consideremos o operador A linear, positivo e completamente contínuo. Seja a relação*

$$A^p u_0 \geq \alpha u_0$$

com $\alpha > 0$, satisfeita por algum elemento não-nulo u_0 tal que

$$-u_0 \notin K$$

e

$$u_0 = v - w,$$

onde $v, w \in K$ e p é algum número natural.
Então o operador A tem pelo menos um autovetor $u^* \in K$

$$Au^* = \lambda u^*,$$

onde o autovalor positivo λ satisfaz a inequação

$$\lambda \geq (\alpha)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 12 *(Zabreyko [19]) Consideremos A um operador linear, positivo e completamente contínuo satisfazendo a inequação*

$$A^q v_0 \leq \beta v_{0,}$$

onde v_0 é um elemento quasi-interior do cone K. Então

$$r(A) \leq (\beta)^{\frac{1}{q}},$$

onde $r(A)$ é o raio espectral de A.

Teorema 13 *Consideremos o operador linear $T'(0)$ sobre o espaço de Banach $C[0,L]$ com cone $C[0,L]^+$ dado pela equação (10), isto é,*

$$T'(0)\,h(a) = \int_0^L B'(a,\zeta)\,h(\zeta)\,d\zeta,$$

onde $B'(a,\zeta)$ é dado pela equação (6), ou seja,

$$B'(a,\zeta) = \sigma X_b e^{-\int_0^\zeta \nu(s)ds} \int_\zeta^L e^{-\sigma(s-\zeta)} e^{\gamma s} \left[\int_s^L \beta(a,a')\,e^{-(\mu+\gamma)a'}da'\right] ds.$$

Então

$$\inf_{a\in[0,L]} \int_0^L |B'(a,\zeta)|\,d\zeta \leq r(T'(0)) \leq \sup_{a\in[0,L]} \int_0^L |B'(a,\zeta)|\,d\zeta. \qquad (25)$$

Dem. Tomando no Teorema 11 $A = T'(0)$, $p = 1$ e $u_0 = 1$ e no Teorema 12 $A = T'(0)$,$q = 1$ e $v_0 = 1$ segue a desigualdade (25).

Referências

[1] Anderson, R. M. and May, R. M. *Directly transmitted infections diseases: control and vaccination*, Science 215, pp. 1053-1060, 1982.

[2] Anderson, R. M. and May, R. M. *Infections Diseases of Humans: Dynamics and Control*, Oxford University Press, New York, 1992.

[3] Bailey, N. J. T. *The Mathematical Theory of Infections Diseases and its Application*, Griffin, London, 1975.

[4] Bartle, R. G. *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, New York, 1966.

[5] Bartle, R. G. *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1964.

[6] Deimling, K. *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlim, 1985.

[7] Dietz, K. *Transmission and control of arbovirus disease*, in: Proceeding of a SIMS Conference on Epidemiology, Alta, Utah, July 8-12, pp. 104-121, 1974.

[8] Dunford, N. and Schwartz, J. T. *Linear Operators Part I: General Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1957.

[9] Griffel, D. H. *Applied Functional Analysis*, Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1981.

[10] Greenhalgh, D. *Threshold and stability results for an epidemic model with an age-structured meeting rate*, IMA J. Math. Appl. Med. Biol. 5, pp. 81-100, 1988.

[11] Greenhalgh, D. *Vaccination Campaigns for Common Childhood Diseases*, Math. Biosc. 100, pp. 201-240, 1990.

[12] Hoppenstead, R. *An age dependent epidemic model*, J. Franklin Inst. 297, pp. 325-333, 1974.

[13] Inaba, H. *Threshold and Stability Results for an Age-structured Epidemic Model*, J. Math. Biol. 28, pp. 411-434, 1990.

[14] Krasnosel'skii, M. A. *Positive Solutions of Operator Equations*, P. Noorddhoff ltda. Groningen, The Netherlands, 1964.

[15] Krasnosel'skii, M. A. *Topological Method in the Theory of Nonlinear Integral Equation*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[16] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[17] Yang, H. M. *Directly transmitted infections modeling considering an age-structure contact rate - epidemiological analyis*, Math. Comp. Mod. 29, pp. 11-30, 1999.

[18] Zabreyko, P. P., Kosholev, A. I., Krasnosel'skii, M. A., Mikhlin, S. G., Rakovshchik, L. S. and Stet'senko, V. Y. *Integral Equations - a reference text*, Noordhoff International Publishing Leyden, The Netherlands, 1975.

[19] Zabreyko, P. P., Krasnosel'skii, M. A. and Stecenko, V. Y. *Bounds for the Spectral Radius of Positive Operator*, Math. Notes vol. 1, 3 e 4, pp. 306-310, 1967.