

# Um estudo sobre crescimento em peso do tambaqui com modelagem fuzzy

Rodney Carlos Bassanezi<sup>1</sup>

DMA, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.

Michael Macedo Diniz<sup>2</sup>

Instituto Federal de São Paulo - IFSP, São José dos Campos/SP.

**Resumo.** Quando estudamos a variação em peso de animais, deparamos com o fato que existem intervalos de tempo onde o crescimento atinge um valor máximo. No caso de criação de animais como porcos e frangos, o abate está sempre relacionado com este ponto de crescimento máximo que corresponde ao máximo rendimento com menor custo. Em muitos casos de crescimento em peso, verifica-se uma tendência de crescimento máximo quando se está próximo do amadurecimento das gônadas dos animais. As políticas de preservação ambiental, como no caso de peixes, é baseada no fato que um indivíduo só pode ser capturado após procriar pelo menos uma vez. Desta forma, o estudo de modelos matemáticos passou a ser essencial para se avaliar, de maneira adequada, estes pontos de crescimento máximo também denominados *pontos de inflexão*. Neste artigo estudamos o ponto de inflexão do crescimento em peso do tambaqui considerando o peso inicial e o parâmetro de alometria modelados por um número fuzzy.

**Palavras-chave:** *ponto de inflexão fuzzy, crescimento em peso.*

## 1. Modelos Determinísticos

Os modelos clássicos de crescimento em peso foram obtidos inicialmente por von Bertalanffy com o estudo de peixes e levam em consideração os processos de catabolismo e anabolismo. Assim, se  $p(t)$  é o peso do animal no

---

<sup>1</sup>rodney@ime.unicamp.br

<sup>2</sup>michael.diniz@ifsp.edu.br

instante  $t$ , temos

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p \\ p(0) = p_0 \text{ dado} \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\alpha$  é a taxa de catabolismo e  $\beta$  a taxa de anabolismo. Este modelo indica que o animal cresce proporcionalmente à sua pele, dado pela alometria do seu peso com sua área lateral na forma de  $A \times p^{\frac{2}{3}}$ , e perde peso devido a sua movimentação ou perda de energia.

Neste modelo (1.1) o ponto de crescimento máximo é dado quando  $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$ , isto é,

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{2}{3}\alpha p^{-\frac{1}{3}} \frac{dp}{dt} - \beta \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dt} \left( \frac{2}{3}\alpha p^{-\frac{1}{3}} - \beta \right)$$

logo,

$$\frac{d^2p}{dt^2} = 0 \iff p_{\text{inf}} = \frac{8}{27} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \quad (1.2)$$

Por outro lado, temos que o peso do animal se estabiliza quando  $\frac{dp}{dt} = 0$ , ou seja,

$$\frac{dp}{dt} = 0 \iff \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p = 0$$

logo, o peso máximo  $p_{\infty}$  é dado em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , isto é,

$$p_{\infty} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^3 \quad (1.3)$$

é o ponto de estabilidade do peso.

Assim, usando (1.3) na equação (1.2), podemos escrever

$$p_{\text{inf}} = \frac{8}{27} p_{\infty}$$

O problema de valor inicial (1.1) referente ao peso é dado por uma equação de Bernoulli cuja solução é:

$$p(t) = \left[ \frac{\alpha}{\beta} + C e^{-\frac{\beta t}{3}} \right]^3$$

onde,  $C = p_0^{\frac{1}{3}} - \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt[3]{p_0} - \sqrt[3]{p_{\infty}}$ .

Quando  $p_0 \approx 0$ , temos

$$p(t) = p_{\infty} \left[ 1 - e^{-\frac{\beta t}{3}} \right]^3$$

O modelo de von Bertalanffy (1.1), desenvolvido para o crescimento de peixes, pode ser melhorado considerando-se uma alometria *peso – área* mais apropriada para cada espécie e que pode ser traduzida no termo do catabolismo, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{\gamma} - \beta p \\ p(0) = p_0 \text{ dado} \end{cases} \quad (1.4)$$

Neste modelo do tipo von Bertalanffy mais geral, a solução é dada por:

$$p(t) = \left[ \frac{\alpha}{\beta} + C e^{-\beta(1-\gamma)t} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (1.5)$$

com

$$p_{\infty} = \left[ \frac{\alpha}{\beta} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

e  $C = p_0^{(1-\gamma)} - p_{\infty}^{(1-\gamma)}$

Neste caso, o ponto de inflexão é dado por:

$$0 = \frac{d^2p}{dt^2} = \alpha\gamma p^{\gamma-1} \frac{dp}{dt} - \beta \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dt} [\alpha\gamma p^{\gamma-1} - \beta] \implies p^{\gamma-1} = \left[ \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

e, portanto,

$$p_{\text{inf}} = \left( \frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} p_{\infty} = (\gamma)^{1-\gamma} p_{\infty} \quad (1.6)$$

Quando se trata de crescimento de animais é fundamental estabelecer o instante em que se dá o crescimento máximo, isto é, o tempo onde se tem o ponto de inflexão do peso. No caso do modelo generalizado (1.4) podemos calcular o tempo onde se dá a inflexão da curva  $p(t)$ , considerando na solução (1.5) o valor de  $p_{\text{inf}}$  em (1.6).

Consideremos inicialmente o caso em que  $p_0 \approx 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} (\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} p_{\infty} &= p_{\infty} \left[ 1 + \left( \left( \frac{p_0}{p_{\infty}} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) e^{-\beta(1-\gamma)t_{\text{inf}}} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \iff \\ \gamma - 1 &= \left[ \left( \frac{p_0}{p_{\infty}} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] e^{-\beta(1-\gamma)t_{\text{inf}}} \iff \\ \ln \left[ \frac{\gamma - 1}{\left( \frac{p_0}{p_{\infty}} \right)^{1-\gamma} - 1} \right] &= -\beta (1 - \gamma) t_{\text{inf}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$t_{\text{inf}} = \frac{\ln \left[ \frac{\gamma-1}{\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{1-\gamma} - 1} \right]}{(1-\gamma)\beta} = t_{\text{inf}}(p_0) \quad (1.7)$$

A relação acima nos fornece o tempo de inflexão em função do ponto inicial. Observamos que num caso de aplicação prática podemos simular o valor de  $\beta$  quando se tem o valor do tempo de inflexão que, geralmente é quando o animal procria pela primeira vez.

## 2. Modelos Fuzzy

Na maioria das vezes ocorrem imprecisões nas medidas, que devem ser tomadas rapidamente para a soltura dos animais. Outras vezes é difícil a coleta de dados quando se analisa o crescimento de animais selvagens. De qualquer modo, os modelos determinísticos empregados para se estabelecer o crescimento destes animais, oferecem *soluções exatas* apesar dos parâmetros serem sempre imprecisos pois são determinados com alguma simulação ou algum tipo de média. Desta forma, via de regra, as soluções exatas não são reais e/ou adequadas para uma previsão de resultados.

A imprecisão dos dados ou mesmo seu conhecimento parcial podem ser modelados quando consideramos as equações variacionais munidas de parâmetros imprecisos, isto é, quando utilizamos números fuzzy para avaliar os parâmetros. Observamos que uma outra forma de modelar a imprecisão dos parâmetros seria com os modelos estocásticos quando se tem à mão uma distribuição de dados.

Os modelos fuzzy têm a vantagem de levar em consideração a intuição do avaliador que pode se juntar aos dados quando existirem. Por exemplo, se quisermos um modelo do crescimento de determinado peixe e tivermos poucos dados coletados de quando este peixe era *pequeno*, podemos inferir intuitivamente um intervalo para o tamanho de recém nascidos. Cada valor neste intervalo de peso inicial  $\hat{p}_0$  tem em correspondência um grau de confiança deste valor como sendo verdadeiro. A pergunta agora é a seguinte: “se não temos precisão na condição inicial podemos fazer mesmo assim uma previsão do peso no futuro?”.

A teoria dos conjuntos fuzzy apresentada por Zadeh no início de 1965 oferece um tratamento matemático a termos linguísticos tais como “aproximadamente”, “em torno de”, “pequeno”, “bonito” etc. No nosso caso em questão

que é considerar a evolução no tempo de condições iniciais imprecisas, usaremos apenas o que se relaciona com o conceito dos números fuzzy.

**Definição 2.1.** Consideremos os números reais  $\mathbb{R}$ , dizemos que um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  é um número fuzzy com função grau de pertinência  $\varphi_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  e indicamos por  $\hat{A}$  quando:

1. Existe  $x_0 \in A$ , tal que  $\varphi_A(x_0) = 1$ ;
2. O suporte do conjunto,  $\text{supp}A = \{x : \varphi_A(x) > 0\}$  é limitado;
3. Os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados, isto é,  $\{x : \varphi_A(x) \geq \alpha\} = [A]^\alpha$  é um intervalo fechado para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Observamos que podemos construir as operações aritméticas com os números fuzzy de modo a preservar a intuição inerente a estes objetos. Assim, por exemplo, a soma do número fuzzy 2 ("aproximadamente 2") com o número fuzzy 7 ("aproximadamente 7") deve dar um número fuzzy 9 que expressa "aproximadamente 9". As definições das operações com números fuzzy podem ser encontradas em Barros e Bassanezi (2006).

O conceito de função grau de pertinência estende naturalmente o conceito clássico de função característica de um conjunto. A extensão de uma função real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por Zadeh:

**Definição 2.2.** Seja  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a Extensão de Zadeh de  $f$  é a função  $\hat{f} : \hat{A} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  tal que a função grau de pertinência de  $\hat{f}(\hat{A}) = \hat{f}(A)$  é dada por

$$\varphi_{\hat{f}(A)} = \left\{ \begin{array}{l} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x) \text{ se } x = f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 \text{ se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{array} \right\}$$

onde,  $(\mathbb{R})$  é o conjunto dos sub conjuntos fuzzy de  $\mathbb{R}$ .

Desta forma, o Princípio de Extensão de Zadeh afirma que:

- a) O grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré imagem;
- b) Quando um valor do contra domínio é atingido por mais de um valor do domínio, seu grau de pertinência é obtido pelo *sup* dos graus de pertinência dos valores de entrada.

O seguinte teorema permite estabelecer condições fundamentais para a extensão de Zadeh:

**Teorema 2.1** (de Nguyen). (Nguyen e Walker, 2005) - Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então a extensão de Zadeh  $\widehat{f} : \widehat{A} \subset (\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  está bem definida e,

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha) = \{f(x) : x \in [A]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1] \text{ e } A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})\}$$

Podemos agora definir o que entendemos por *fluxo fuzzy*.

**Definição 2.3.** Dada uma condição inicial imprecisa na forma de um número fuzzy  $\widehat{x}_0$ , e um campo de direções  $f = f(x)$ , com  $x \in \text{supp } \widehat{x}_0 \subset \mathbb{R}^n$ , o fluxo fuzzy é o conjunto fuzzy  $\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0, t) : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , dado pela Extensão de Zadeh do fluxo determinístico  $\varphi(x_0, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  gerado pelo campo vetorial  $f$ , obtido do problema de Cauchy autônomo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) \\ x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.8)$$

Obs.: Estamos supondo que a função  $f$  satisfaça algum critério que garanta existência e unicidade de solução de (2.8).

Um sistema fuzzy, será denotado por

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{x}}{dt} = f(x(t)) \\ \widehat{x}_0 = \widehat{x}(0) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (2.9)$$

Pela continuidade de  $\varphi(x_0, t)$  com relação à condição inicial  $x_0$ , a igualdade

$$[\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0, t)]^\alpha = \varphi([\widehat{x}_0]^\alpha, t)$$

é satisfeita para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Desta forma, a trajetória determinada por  $\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0, t)$  consiste de uma família de trajetórias determinísticas dadas por  $\varphi(x_0, t)$ . Para cada  $\bar{x}_0 \in \widehat{x}_0$ , o grau de pertinência da trajetória  $\varphi(\bar{x}_0, t)$  em  $\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0, t)$  é igual ao grau de pertinência de  $\bar{x}_0$  em  $\widehat{x}_0$ , isto é,

$$\mu_{\widehat{\varphi}(\widehat{x}_0, t)}(\varphi(\bar{x}_0, t)) = \mu_{\widehat{x}_0}(\bar{x}_0)$$

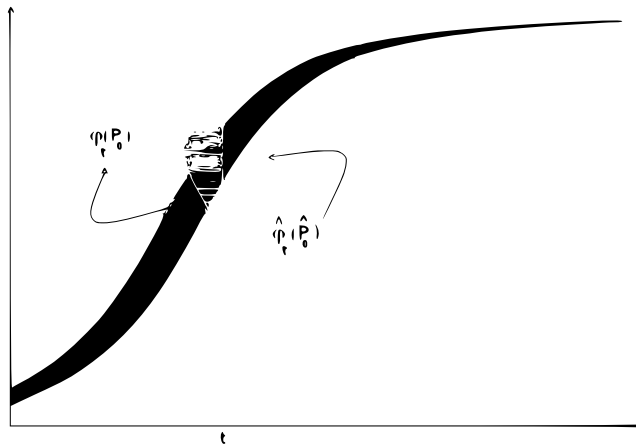


Figura 1: Fluxo determinístico e fluxo fuzzy

Podemos dizer que a trajetória proveniente do modelo determinístico é a *preferida* pois seu grau de pertinência no fluxo fuzzy vale 1.

Quando a subjetividade ou imprecisão aparece em algum parâmetro da função de estado  $f(x)$ , devemos estender o sistema autônomo (2.8) de modo que tal parâmetro seja tratado na condição inicial de um problema de Cauchy. Assim, se  $f(x) = f(x, b)$ , consideramos o novo sistema associado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), b) \\ \frac{db}{dt} = 0 \\ (x_0, b) = x(0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.10)$$

onde o parâmetro  $b$  aparece agora na condição inicial.

Para o processo de estabilidade dos sistemas fuzzy (2.9) temos resultados análogos aos dos sistemas determinísticos conforme o seguinte resultado:

**Teorema 2.2.** (Mizukoshi, 2004) - Se  $x^*$  é um ponto de equilíbrio para o sistema 2.8 então  $\chi_{\{x^*\}}$  é um estado de equilíbrio para (2.9). Além disso,:

1.  $\chi_{\{x^*\}}$  é estável para o sistema (2.9) se, e somente se,  $x^*$  é estável para o sistema determinístico (2.8);
2.  $\chi_{\{x^*\}}$  é assintoticamente estável para o sistema (2.9) se, e somente se,  $x^*$  é assintoticamente estável para o sistema determinístico (2.8);
3.  $\chi_{\{x^*\}}$  é instável para o sistema (2.9) se, e somente se,  $x^*$  é instável para o sistema determinístico (2.8).

O conceito de estabilidade e de estado de equilíbrio para um sistema fuzzy é também análogo ao caso clássico, considerando que sobre o espaço dos números fuzzy adotamos a métrica de Hausdorff, ou seja, a distância entre dois conjuntos A e B é dada por:

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{y \in A} \inf_{x \in B} \|x - y\|, \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} \|x - y\| \right\} \quad (2.11)$$

A estabilidade assintótica pode ser reformulada em termos do suporte da solução fuzzy, conforme a seguinte proposição:

**Proposição 1.** (Diniz, 2012) - *Seja  $x^*$  o único ponto de equilíbrio assintoticamente estável para o sistema 2.8 em alguma região  $D \subset \mathbb{R}^n$  e seja  $\hat{\varphi}(\hat{x}_0, t)$  a solução fuzzy do sistema fuzzy associado 2.9. Suponhamos ainda que  $[\hat{x}_0]^\alpha \subset D$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$  então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{supp}(\hat{\varphi}(\hat{x}_0, t)) = x^* \quad (2.12)$$

### 3. Modelagem Fuzzy para crescimento de tambaquis

Como aplicação de sistemas fuzzy escolhemos o modelo geral de crescimento em peso 1.4. Vamos analisar o desenvolvimento de peixes, especificamente do tambaqui Custódio (2013). Uma relação entre as variáveis peso e comprimento desta espécie é dada na Tabela 1.



Tabela 1: Comprimento e peso do tabaqui – Fonte: Grupo de pesquisa da UFAM

Comprimento(cm)	Peso (Kg)	Comprimento(cm)	Peso (Kg)
3,4	0,00118	29	0,9279
4	0,00221	30,1	1,072
5,4	0,00738	31,1	1,061
9,4	0,03261	32	1,2689
9,7	0,03768	33,1	1,3387
10	0,0409	34,2	1,6181
15	0,1366	35	1,5133
16	0,1372	42,5	2,95
17,1	0,2099	45,5	3,6
18	0,2290	50,2	4,35
19,1	0,1491	60,1	7,1
22	0,3795	65	9,3
22,3	0,3859	70	13,35
23,2	0,4404	75	11,15
24	0,5402	77,5	14,85
25	0,5775	78,2	22,5
26,9	0,7609	80	18,125
27	0,7784	82,1	22
28	0,8672	85	21,5

O Crescimento de uma determinada espécie mantém certas propriedades por exemplo, a alometria entre o comprimento  $l$  e o peso  $p$  é dada por uma função potência

$$p = al^\lambda$$

proveniente da relação alométrica

$$\frac{dp}{dt} = \lambda \frac{dl}{dt}$$

No caso do tabaqui, um ajuste dos dados da Tabela 1 nos dá:

$$p = 5 \times 10^{-5} l^{2,91}$$

O parâmetro de alometria  $\lambda = 2,91$ , obtido do ajuste dos dados, está sujeito às imprecisões advindas das medidas tomadas. Se considerarmos que tal precisão está “em torno de” 2%, podemos tomar este parâmetro como sendo o número

fuzzy triangular  $\hat{\lambda} = [2, 85; 2, 91; 2, 97]$ . Se considerarmos a alometria com este parâmetro fuzzy teremos

$$p = 5 \times 10^{-5} l^{\hat{\lambda}}$$

cujos gráfico é dado na Figura 2.

O modelo de von Bertalanffy generalizado (1.4) pode ser associado a um modelo correspondente fuzzy quando não se tem certeza da condição inicial. - Neste caso, do peso do tambaqui recém nascido:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^\gamma - \beta p \\ p(0) = \hat{p}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (3.13)$$

cujas solução é dada por

$$\hat{p}(t) = \left[ \frac{\alpha}{\beta} + \hat{C} e^{-\beta(1-\gamma)t} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

onde,  $\hat{C} = \hat{p}_0^{(1-\gamma)} - p_\infty^{(1-\gamma)}$  e  $p_\infty = \left[ \frac{\alpha}{\beta} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$ .

Observamos que, se apenas a condição inicial for fuzzy e como o peso de estabilidade não depende da condição inicial então, o ponto de estabilidade do sistema fuzzy é dado pelo ponto crisp  $p_\infty$  conforme se pode ver na Figura 3. No caso do tambaqui tem-se  $p_\infty = 30Kg$ .

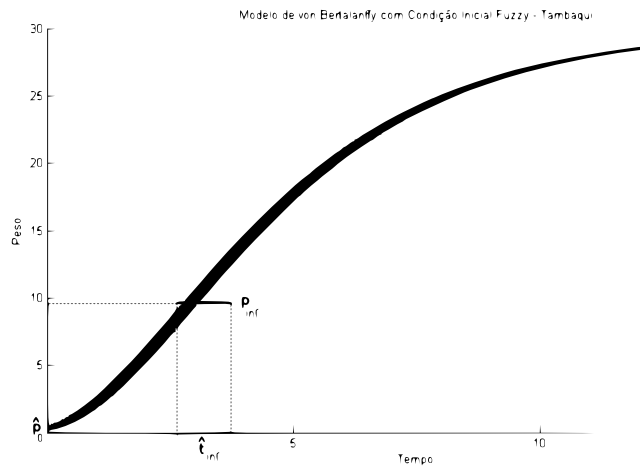


Figura 2: Solução do modelo de crescimento em peso do tambaqui com condição inicial fuzzy

O ponto de inflexão para o modelo fuzzy (3.13) também independe da condição inicial e é dado pelo ponto crisp

$$\widehat{p}_{\text{inf}} = p_{\text{inf}} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} p_{\infty}$$

Por outro lado, o tempo onde se dá a inflexão da solução do modelo fuzzy depende da condição inicial e, via extensão de Zadeh (Ver Figura 2), é dado por

$$\widehat{t}_{\text{inf}} = \frac{\ln \left[ \frac{\gamma-1}{\left(\frac{p_0}{p_{\infty}}\right)^{1-\gamma} - 1} \right]}{(1-\gamma)\beta} \quad (3.14)$$

No caso da criação em cativeiro ou mesmo se considerarmos uma política de preservação destes animais, somente podemos abatê-los depois da idade  $\widehat{t}_{\text{inf}}$ .

Vamos agora considerar um modelo de crescimento em peso do tabaqui com incerteza no parâmetro de alometria. A maneira formal para estabelecer este fato é dada por um sistema fuzzy associado a um sistema determinístico, neste caso, ao modelo generalizado de von Bertalanffy:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{\gamma} - \beta p \\ p(0) \in \mathbb{R}; \widehat{\gamma} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (3.15)$$

cuja solução, via extensão de Zadeh, é dada por

$$\widehat{p}(t) = \left[ \frac{\alpha}{\beta} + \widehat{C} e^{-\beta(1-\widehat{\gamma})t} \right]^{\frac{1}{1-\widehat{\gamma}}}$$

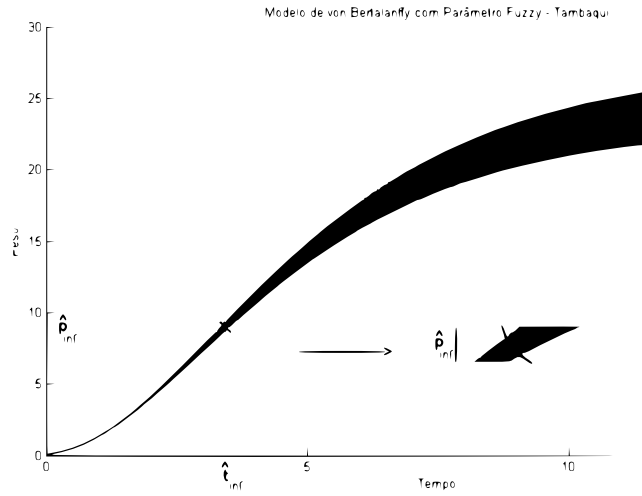


Figura 3: Crescimento do tabaqui com parâmetro de alometria  $\hat{\gamma}$  fuzzy.

Para adequar aos dados de crescimento do tabaqui tomamos como parâmetro de alometria o número fuzzy  $\hat{\lambda} = [2,85; 2,91; 2,97]$  e, portanto,  $\hat{\gamma} = \frac{2}{\hat{\lambda}} = [0,673; 0,687; 0,702]$ . Assim, quando consideramos o parâmetro  $\hat{\gamma}$  fuzzy, obtemos o ponto de inflexão fuzzy como função de  $\hat{\gamma}$

$$\hat{p}_{inf} = (\hat{\gamma})^{\frac{1}{1-\hat{\gamma}}} p_{\infty} = \left(\frac{1}{\hat{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\hat{\gamma}-1}} \hat{p}_{\infty}$$

O suporte de  $\hat{p}_{inf}$  é o intervalo  $[7,728; 10,865]$  sendo que seu maior grau de pertinência é para o ponto  $p_{inf} = 9,04Kg$ .

Observamos que, neste caso temos  $\frac{\alpha}{\beta} = 2,9$  e o valor de de estabilidade do peso  $\hat{p}_{\infty}$  também é fuzzy (veja Figura 3),

$$\hat{p}_{\infty} = \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\hat{\gamma}}}$$

com suporte  $[25,945; 35,618]$  e maior grau de pertinência no valor  $p_{\infty} = 30,01$ .

Neste caso o tempo de inflexão é dado por:

$$\hat{t}_{inf} = \frac{\ln \left[ \frac{\hat{\gamma} - 1}{\left(\frac{p_0}{p_{\infty}}\right)^{1-\hat{\gamma}} - 1} \right]}{(1 - \hat{\gamma})\beta} \quad (3.16)$$

## 4. Pontos de inflexão fuzzy

Nas seções anteriores apresentamos um estudo a cerca dos pontos de inflexão baseando-se no modelo de von Bertalanffy. Nesta seção apresentaremos alguns resultados referentes aos pontos de inflexão quando a condição inicial é fuzzy ou quando algum parâmetro do modelo é fuzzy.

Inicialmente, vamos formalizar o seguinte resultado, já previamente discutido.

**Teorema 4.1.** *Seja o sistema (3.13) com condição inicial  $\hat{p}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ . Se  $[\hat{p}_0]^0 \in (0, p_{inf})$ , então o ponto de inflexão  $\hat{p}_{inf}$  é único e crisp.*

*Demonstração.* Como vimos no texto, o ponto de inflexão é dado por

$$p_{inf} = \gamma^{1-\gamma} p_{\infty}$$

ou seja, este ponto não depende da condição inicial, mas apenas dos parâmetros do modelo, como estes parâmetros são crisp, o ponto de inflexão será crisp e independente da condição inicial fuzzy. A unicidade é imediata pela obtenção explícita do ponto de inflexão. □

Note que mesmo o ponto de inflexão sendo crisp, o tempo de inflexão é fuzzy, este tempo é dado pela equação (3.14). Baseando-se no teorema anterior, podemos estabelecer o seguinte corolário:

**Corolário 1.** *Seja  $\mu_{\hat{p}_0}(p_0^*) = 1$ . Se  $t_{inf}^*$  e  $\hat{t}_{inf}$  forem o tempo de inflexão do modelo (2.8) e (3.13) quando a condição inicial é  $p_0^*$  e  $\hat{p}_0$  respectivamente, então  $\mu_{\hat{t}_{inf}}(t_{inf}^*) = 1$*

*Demonstração.* Baseando-se em 1.7 e 3.14 e no princípio de extensão de Zadeh, podemos escrever a função de pertinência para  $\hat{t}_{inf}$  da seguinte forma

$$\mu_{\hat{t}_{inf}}(t) = \sup\{\mu_{\hat{p}_0}(p_0) : p_0 = t_{inf}^{-1}(t)\} \quad (4.17)$$

Portanto,

$$\mu_{\hat{t}_{inf}}(t_{inf}^*) = \sup\{\mu_{\hat{p}_0}(p_0) : p_0 = t_{inf}^{-1}(t_{inf}^*)\} \quad (4.18)$$

Por 1.7, temos que  $t_{inf}^{-1}(t_{inf}^*) = p_0^*$ , logo

$$\mu_{\hat{t}_{inf}}(t_{inf}^*) = \mu_{\hat{p}_0}(p_0^*) \quad (4.19)$$

□

Basicamente, este resultado garante que o tempo de inflexão da curva que começa no ponto inicial que possui grau de pertinência 1, também possui grau de pertinência 1.

Se trabalharmos com o caso onde o parâmetro é fuzzy, a unicidade do ponto de inflexão é perdida. Neste caso, o tempo de inflexão é dado em função do parâmetro.

$$p_{inf} = p(t_{inf}(\gamma)) \quad (4.20)$$

onde o  $t_{inf}(\gamma)$  é dado pela equação 1.7 considerando que a variável é  $\gamma$  e  $p_0$  é fixo.

Os resultados obtidos acima podem ser estendidos para casos mais gerais, isto é, para modelos de crescimento inibidos generalizados. Segundo Cecconello et al. (2009) um modelo de crescimento inibido generalizado pode ser dado por uma equação autônoma da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.21)$$

onde  $f(x)$  é contínua e diferenciável e satisfaz  $f(0) = f(K) = 0$  e  $f(x) > 0$  para  $x \in (0, K)$ .

Além disso, se  $f(x)$  for côncava para  $x \in (0, K)$ , então existe um único ponto de inflexão para  $x(t)$ . De fato, pelo teorema do valor médio, existe  $x^* \in (0, k)$  tal que  $\frac{df(x^*)}{dx} = 0$ , pois  $f(0) = f(K) = 0$ . este ponto é de máximo pois  $f(x)$  é côncava, isto garante a existência. Em relação a unicidade, se existirem dois pontos de inflexão, a função  $f(x)$  teria que ter dois pontos de máximo, mas como  $f(x)$  é diferenciável, a função  $f(x)$  teria que mudar de concavidade em algum momento, logo, sob essas condições,  $x(t)$  possui um único ponto de inflexão.

Baseando-se nos resultados obtidos para o modelo de von Bertalanffy, podemos estabelecer um resultado geral quanto a unicidade do ponto de inflexão quando apenas a condição inicial é fuzzy.

**Teorema 4.2.** *Seja o sistema (2.9), com  $f(x)$  contínua e diferenciável,  $f(0) = f(K) = 0$ ,  $f(x) > 0$  e  $\frac{f^2(x)}{dx^2} \geq 0$  para  $x \in (0, K)$ . Se a condição inicial fuzzy  $\hat{x}_0$  é tal que  $[\hat{x}_0]^0 = [x_0 + \epsilon, x_0 - \epsilon] \subset (0, x^*)$  então o ponto de inflexão é dado por valor crisp  $x^*$ . Além disso, o tempo de inflexão é fuzzy.*

*Demonstração.* Como todos os pontos do suporte de  $\hat{x}_0$  são menores que  $p^*$ , então qualquer trajetória crisp que inicie em algum desses pontos, irá possuir um ponto único ponto de inflexão, pelas hipóteses estabelecidas sobre a  $f(x)$ . Além disso, o ponto de inflexão não depende da condição inicial, já que  $\frac{df}{dx} = 0$  não depende de  $x_0$ . Portanto, mesmo que a condição inicial seja fuzzy, o ponto de inflexão será sempre crisp e único.

Em relação ao tempo de inflexão, devemos encontrar o instante  $t_{inf}$  tal que  $\hat{x}(\hat{x}_0, t_{inf}) = x^*$ , entretanto, para cada  $x_0 \in [x_0]^0$  esse instante é diferente, logo, podemos definir a função de pertinência do conjunto fuzzy  $\hat{t}_{inf}$  da seguinte forma:

$$\mu_{\hat{t}_{inf}}(t) = \sup\{\mu_{\hat{x}_0}(x_0) : x(x_0, t) = x^*\} \quad (4.22)$$

Escrevemos a solução como  $x(x_0, t)$  pois essa além de depender do tempo, depende da condição inicial dada. Portanto,  $\hat{x}(\hat{x}_0, t_{inf}) = x^*$  quando  $t_{inf} = \hat{t}_{inf}$ .  $\square$

Portanto, o instante de crescimento máximo é incerto quando a condição inicial é fuzzy. Conhecendo esta incerteza, é possível saber, por exemplo, a partir de qual instante é garantida a passagem do animal pelo instante de crescimento máximo.

Assim, como ocorreu para o modelo de von Bertalanffy, para casos mais gerais, a existência de um parâmetro fuzzy fará com que o ponto de inflexão não seja mais crisp e sim fuzzy.

## 5. Conclusões

Nesse artigo utilizamos o modelo de von Bertalanffy para estudar o crescimento em peso do tabaqui. Devido a incerteza na determinação do ponto inicial e no parâmetro de alometria, concluímos que o tempo de inflexão também é incerto.

Inicialmente, ao considerarmos apenas a condição inicial fuzzy, constatamos que o ponto de inflexão e o ponto de estabilidade são crisp, entretanto, o tempo de inflexão depende da condição inicial e portanto, via extensão de Zadeh, é definido como um número fuzzy.

Quando a condição inicial e o parâmetros são fuzzy, tanto o ponto de equilíbrio quanto o ponto de inflexão também são. Na prática, o fato do ponto de inflexão ser fuzzy mostra que, além de existir uma incerteza no tempo de abate do animal, existe uma incerteza quanto ao peso do peixe no momento do abate. Por fim, na última seção é apresentado o Corolário 1 que estabelece relações entre o grau de pertinência do ponto inicial fuzzy e o tempo de inflexão fuzzy. E o Teorema 4.2 que estabelece condições sobre a condição inicial para garantir que o tempo de inflexão seja fuzzy, embora, o peso de inflexão não seja.

## Referências

- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática. In *Coleção IMECC – Textos Didáticos*, volume 5. IMECC–UNICAMP, Campinas/SP, 3ª edição.
- Cecconello, M. S., Brandao, A., e Bassanezi, R. (2009). Sobre o ponto de inflexão em modelos de crescimento inibido com condição inicial fuzzy. *Bio-matemática*, 19:81–89.
- Custódio, E. B. (2013). Crescimento de matrinxã e tambaqui: Modelos fuzzy. Dissertação de Mestrado, CMCC–UFABC, Santo André/SP.
- Diniz, M. M. (2012). Abordagem fuzzy do teorema de poincaré-bendixson. Dissertação de Mestrado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.
- Mizukoshi, M. T. (2004). *Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy*. Tese de Doutorado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.
- Nguyen, H. T. e Walker, E. A. (2005). *A first course in fuzzy logic*. CRC press.