

Simulação de cartas de controles utilizando à distribuição empírica da amostra

Leandro R.R. Lucena¹

Departamento de Zootecnia, UAST – UFRPE, 56.909-535, Serra Talhada/PE.

Resumo. Neste artigo três métodos de avaliação da carta de controle foram propostos para avaliar o controle estatístico de qualidade da distribuição empírica das amostras. Foram realizadas 1000 simulações de Monte Carlos, em cada simulação foram geradas amostras de tamanhos 3, 5 e 7, para cada uma das nove distribuições de probabilidade utilizadas, em cada uma das distribuições eram feitos os cálculos da média e mediana de cada amostra gerando no final uma amostra de tamanho 25 de médias e medianas para cada distribuição. Verificou-se que as probabilidades de rejeição das cartas de controle diminuem com o tamanho amostral independente da distribuição estudada quando utilizadas as cartas de controle de mediana e média. As probabilidades de rejeição das cartas de controle foram menores quando utilizadas as distribuições simétricas ($N(0,1)$, $t(5)$ e $\text{Logística}(0,0,5)$) do que em relação as distribuições assimétricas ($F(4,25)$, $\text{Weibull}(1,0,3)$, $\text{Beta}(1,10)$, $\text{chi-quadrado}(2)$, $\text{Gamma}(3,7)$ e $\text{log-normal}(1,0,6)$) independente do tamanho amostral.

Palavras-chave: Carta de controle; Distribuição empírica; Confiabilidade.

1. Introdução

O Controle Estatístico de Processo (CEP) pode ser descrito como um conjunto de ferramentas de monitoramento on-line da qualidade. Com tais ferramentas, consegue-se uma descrição detalhada do comportamento do processo, identificando sua variabilidade e possibilitando seu controle ao longo do tempo,

¹leandroricardo_est@yahoo.com.br

através da coleta continuada de dados e da análise e bloqueio de possíveis causas especiais, responsáveis pelas instabilidades do processo em estudo (Alencar et al., 2004).

Na estratégia do CEP, processos são controlados efetuando-se medições de variáveis de interesse em pontos espaçados no tempo e registrando os resultados em cartas de controle. Inicialmente as cartas de controle foram desenvolvidas por Shewhart em 1924. As cartas de controle são as ferramentas principais utilizadas no controle estatístico de processo e têm como objetivo detectar desvios de parâmetros representativos do processo, reduzindo a quantidade de produtos fora de especificações. Sua utilização pressupõe que o processo seja estatisticamente estável e que a característica em questão seja normalmente distribuída (Montgomery, 2004).

As cartas ou gráficos de controle são constituídos dos limites inferiores e superiores de controle e de uma linha central. Se todos os valores marcados nas cartas de controle estiverem dentro dos limites de controle sem qualquer tendência e a disposição dos pontos forem aleatórias, o processo é considerado sob controle. Caso alguns pontos estejam fora dos limites de controle e/ou apresentem alguma tendência o processo é dito fora de controle (Montgomery, 2004).

Montgomery (2004) relata que existem pelo menos cinco razões para utilização das cartas de controle: I) são técnicas comprovadas de melhoria da produtividade; II) são eficazes na prevenção de defeitos; III) evitam ajustes desnecessários em processo; IV) fornecem informações confiáveis para diagnósticos do desempenho do processo e V) fornecem informações sobre a capacidade de processos.

As cartas de controle são bastante utilizadas em várias áreas de estudo, bem como na indústria farmacêutica (Lima et al., 2006) (Ramos et al., 2006) (Alencar et al., 2004), nas ciências agrárias (Milan e Fernandes, 2002) (Resende e Duarte, 2007) (Salvi et al., 2007), na saúde (Berlitz, 2010) (Martins e Penna, 2004), na indústria (Silva e Oliveira, 2005), na indústria alimentícias (Srikaeo et al., 2005), etc.

2. Objetivos

- Apresentação de um método para avaliação da carta de controle utilizando a distribuição empírica da amostra.

3. Metodologia

3.1 Dados

Foi realizado um estudo de simulação com nove distribuições de probabilidades, três distribuições simétricas ($N(0,1)$; t-Student(5) e Logística(0,0.5)) e seis distribuições assimétricas (Weibull(1,0.3), Beta(1,10); chi-quadrado(2); F(4,25); Gamma(3,7) e Log-Normal(1,0.6)). Foram realizadas 1000 simulações de Monte Carlos. Em cada simulação foram geradas amostras de tamanhos 3, 5 e 7 para cada distribuição, para cada amostra foi realizado os cálculos da média e mediana gerando no final uma amostra de tamanho 25 de médias e medianas para cada distribuição.

3.2 Carta de controle da mediana

Na proposta da carta de controle da mediana são definidos três limites inferiores e superiores de confiança, que são expressos nas equações 1, 2 e 3.

$$LINF_1 = Q1 - (1,5AIQ) \quad e \quad LSUP_1 = Q3 + (1,5AIQ) \quad (3.1)$$

$$LINF_2 = Q1 - (0,75AIQ) \quad e \quad LSUP_2 = Q3 + (0,75AIQ) \quad (3.2)$$

$$LINF_3 = Q1 - (3,0AIQ) \quad e \quad LSUP_3 = Q3 + (3,0AIQ) \quad (3.3)$$

onde, Q1, Q3 são o primeiro e o terceiro quartil da amostra, e o AIQ é a amplitude interquartílica da amostra.

Também é produzida a linha mediana que é calculada como sendo a mediana das medianas \tilde{x} , sugerindo assim três propostas de cartas de controle das medianas definidas por:

$$Mediana1 : LINF_1 < \tilde{x} < LSUP_1 \quad (3.4)$$

$$Mediana2 : LINF_2 < \tilde{x} < LSUP_2 \quad (3.5)$$

$$Mediana3 : LINF_3 < \tilde{x} < LSUP_3 \quad (3.6)$$

Por fim é gerado o gráfico de controle da mediana onde no eixo das ordenadas estão os valores da mediana de cada amostra e nas abscissas as amostras, como ilustra a Figura 1.

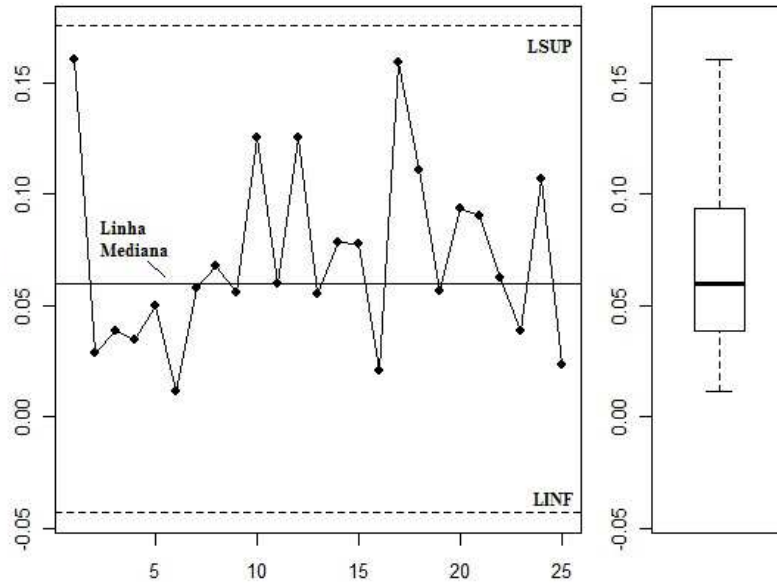


Figura 1: Carta de Controle da Mediana.

3.3 Carta de controle da média

Na carta de controle da média são definidos dois limites de controles: o limite inferior e superior dados por:

$$LIC = \bar{\bar{x}} - 3S \quad (3.7)$$

$$LSC = \bar{\bar{x}} + 3S \quad (3.8)$$

onde, $\bar{\bar{x}}$ é a média das médias e S é o desvio padrão das médias de cada grupo.

4. Resultados

Observa-se na Tabela 1 o coeficiente de assimetria das distribuições de probabilidade sugeridas no estudo. Nota-se que entre as distribuições assimétricas que apresentou menor coeficiente de assimetria foi a distribuição Weibull(1,0.3) e o maior a distribuição Log-Normal(1,0.6).

Tabela 1: Coeficiente de assimetria das distribuições de probabilidade em estudo.

Distribuição de probabilidade	Coeficiente de assimetria
N(0,1)	0,0000
t-Student(5)	0,0000
Logística(0,0.5)	0,0000
Weibull(1,.3)	0,8784
Gamma(3,7)	1,1547
B(1,10)	1,5168
Chi-quadrado(2)	2,0000
F(4,25)	2,0349
Log-normal(1,.6)	2,2601

Observa-se que as distribuições com maiores coeficientes de assimetria (Weibull, Gamma, Beta, Chi-quadrado, F-Snedcor e Log-normal) apresentam maiores probabilidades de rejeição da carta de controle quando utilizado o método da média, nas Figuras 2, 3 e 4.

Distribuições de Probabilidade	Probabilidade de Rejeição da carta de Controle (0,05 – Probabilidade de rejeição da carta de controle)			
	Mediana 1	Mediana 2	Mediana 3	Média
N(0,1)	0,0230(0,027)	0,1158(0,0658)	0,0013(0,0487)	0,0011(0,0489)
t-Student(5)	0,0316(0,0184)	0,1259(0,0759)	0,0027(0,0473)	0,0039(0,0461)
Logística(0, 0.5)	0,0305(0,0195)	0,1248(0,0748)	0,0021(0,0479)	0,0020(0,048)
Weibull(1,.3)	0,0424(0,0076)	0,1082(0,0582)	0,0082(0,0418)	0,0074(0,0426)
Gamma(3,7)	0,0281(0,0219)	0,1119(0,0619)	0,0030(0,047)	0,0038(0,0462)
B(1,10)	0,0336(0,0164)	0,1022(0,0522)	0,0058(0,0442)	0,0047(0,0453)
Chi-quadrado(2)	0,0412(0,0088)	0,1069(0,0569)	0,0088(0,0412)	0,0073(0,0427)
F(4,25)	0,0365(0,0135)	0,1104(0,0604)	0,0074(0,0426)	0,0065(0,0435)
Log-normal(1,.6)	0,0405(0,0095)	0,1145(0,0645)	0,0074(0,0426)	0,0086(0,0414)

Figura 2: Probabilidade de rejeição da carta de controle da média, mediana 1, 2 e 3 para o tamanho amostral 3.

Distribuições de Probabilidade	Probabilidade de Rejeição da carta de Controle (0,05 – Probabilidade de rejeição da carta de controle)			
	Mediana 1	Mediana 2	Mediana 3	Média
N(0,1)	0,0209(0,0291)	0,1178(0,0678)	0,0006(0,0494)	0,0012(0,0488)
t-Student(5)	0,0269(0,0231)	0,1220(0,0720)	0,0012(0,0488)	0,0023(0,0477)
Logística(0, 0.5)	0,0292(0,0208)	0,1222(0,0722)	0,0015(0,0485)	0,0025(0,0475)
Weibull(1,3)	0,0364(0,0136)	0,1049(0,0549)	0,0053(0,0447)	0,0054(0,0446)
Gamma(3,7)	0,0250(0,0250)	0,1116(0,0616)	0,0017(0,0483)	0,0028(0,0472)
B(1,10)	0,0324(0,0176)	0,1039(0,0539)	0,0045(0,0455)	0,0031(0,0469)
Chi-quadrado(2)	0,0344(0,0156)	0,1051(0,0551)	0,0047(0,0453)	0,0048(0,0452)
F(4,25)	0,0311(0,0189)	0,1078(0,0578)	0,0041(0,0459)	0,0059(0,0441)
Log-normal(1,6)	0,0342(0,0158)	0,1184(0,0684)	0,0056(0,0444)	0,0070(0,0430)

Figura 3: Probabilidade de rejeição da carta de controle da média, mediana 1, 2 e 3 para o tamanho amostral 5.

Distribuições de Probabilidade	Probabilidade de Rejeição da carta de Controle (0,05 – Probabilidade de rejeição da carta de controle)			
	Mediana 1	Mediana 2	Mediana 3	Média
N(0,1)	0,0218(0,0282)	0,1122(0,0622)	0,0008(0,0492)	0,0007(0,0493)
t-Student(5)	0,0261(0,0239)	0,1228(0,0728)	0,0015(0,0485)	0,0026(0,0474)
Logística(0, 0.5)	0,0234(0,0266)	0,1209(0,0709)	0,0007(0,0493)	0,0013(0,0487)
Weibull(1,3)	0,0325(0,0175)	0,1070(0,0570)	0,0045(0,0455)	0,0041(0,0459)
Gamma(3,7)	0,0243(0,0257)	0,1122(0,0622)	0,0015(0,0485)	0,0024(0,0476)
B(1,10)	0,0295(0,0205)	0,1055(0,0555)	0,0030(0,0470)	0,0027(0,0473)
Chi-quadrado(2)	0,0314(0,0186)	0,1076(0,0576)	0,0043(0,0457)	0,0044(0,0456)
F(4,25)	0,0290(0,0210)	0,1075(0,0575)	0,0040(0,0460)	0,0042(0,0458)
Log-normal(1,6)	0,0308(0,0192)	0,1134(0,0634)	0,0039(0,0461)	0,0060(0,0440)

Figura 4: Probabilidade de rejeição da carta de controle da média, mediana 1, 2 e 3 para o tamanho amostral 7.

Observa-se nas Figuras 2, 3 e 4 que à medida que o tamanho da amostra cresce as probabilidades de rejeição da carta de controle da mediana 1 e da média diminuem independente da distribuição estudada. Quando avaliada a carta de controle da mediana 2 não verifica-se nenhum padrão nas probabilidades de rejeição das distribuições estudadas, enquanto que para a carta de controle da mediana 3 não verifica-se nenhum padrão das probabilidades em relação as distribuições simétricas, enquanto que as distribuições assimétricas as probabilidades de rejeição da carta de controle diminuem quando o tamanho da amostra cresce.

Verifica-se nas Figuras 2, 3 e 4 que para tamanhos de amostra 3, 5 e 7, as distribuições simétricas (N(0,1), t-Student(5) e Logística(0,0.5)) apresen-

taram em média probabilidades menores de rejeição do que as distribuições assimétricas quando utilizadas as carta de controle da mediana 1, mediana 3 e média, enquanto que para o método da mediana 2 as menores probabilidades de rejeição se deram em relação as distribuições assimétricas ($F(4,25)$, $Weibull(1,0.3)$, $Beta(1,10)$, $chi\text{-quadrado}(2)$, $Gamma(3,7)$ e $log\text{-normal}(1,0.6)$).

Entre as distribuições simétricas as menores probabilidades de rejeição da carta de controle se deram em relação à distribuição $N(0,1)$ independente do tamanho amostral e do método da carta de controle utilizada. As maiores probabilidades de rejeição da carta de controle independente do método utilizado se deu em relação à distribuição $t\text{-Student}(5)$ para os tamanhos amostrais 3 e 7, já para o tamanho amostral 5 a maior probabilidade foi em relação à distribuição $Logística(0,0.5)$, Figuras 2, 3 e 4.

Considerados os tamanhos amostrais 3, 5 e 7, observa-se que entre as distribuições assimétricas as menores probabilidades de rejeição da carta de controle se deram em relação à distribuição $Gamma(3,7)$ quando utilizados os métodos da mediana 1, mediana 3 e média, já quando utilizado o método da mediana 2 a menor probabilidade de rejeição foi em relação à distribuição $B(1,10)$, Figuras 2, 3 e 4.

Quando utilizado o método da mediana 1 a maior probabilidade de rejeição foi em relação à distribuição $Weibull(1,0.3)$, enquanto que para os métodos da mediana 2 e média foi em relação à distribuição $Log\text{-normal}(1,0.6)$. Quando utilizado o método da mediana 3 as maiores probabilidades se deram em relação as distribuições $chi\text{-quadrado}(2)$, $Log\text{-normal}(1,0.6)$ e $Weibull(1,0.3)$ para os tamanhos amostrais 3, 5 e 7, respectivamente, Figuras 2, 3 e 4.

Na avaliação das distribuições $N(0,1)$ e $t\text{-student}(5)$, verifica-se que os limites de confiança das cartas de controle da mediana 1 e 2 são mas estreitos do que quando utilizado os métodos da mediana 3 e da média, indicando assim um maior rigor na avaliação do processo, Figuras 5 e 6.

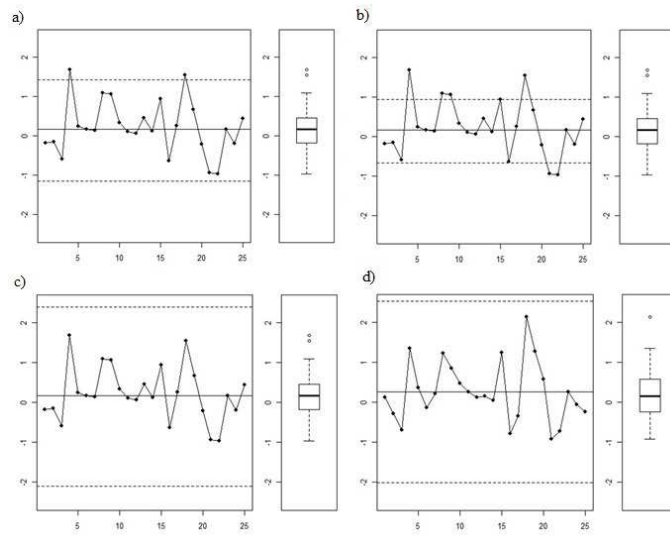


Figura 5: Cartas de Controle da mediana 1 (a), mediana 2 (b), mediana 3 (c), média (d) de uma população $N(0,1)$ de tamanho amostral 3.

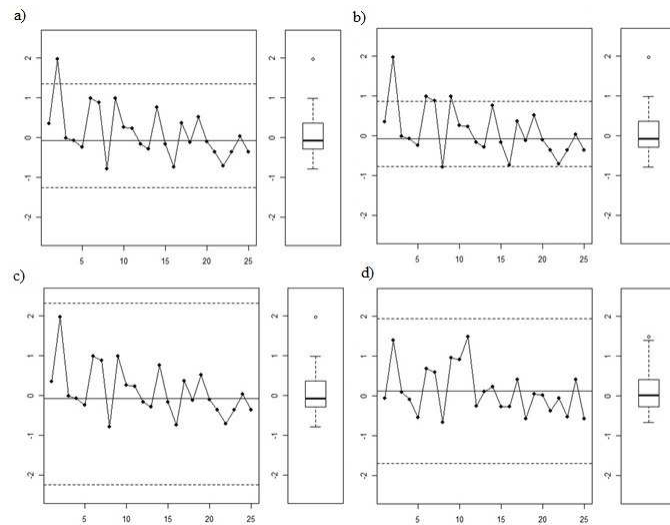


Figura 6: Cartas de Controle da mediana 1 (a), mediana 2 (b), mediana 3 (c), média (d) de uma população $t\text{-Student}(5)$ de tamanho amostral 5.

Observa-se que para as distribuições simétricas $N(0,1)$ e $t\text{-Student}(5)$ as cartas de controle dos métodos das mediana 1 e 2 encontram-se fora de controle, pois o processo apresenta várias amostras fora dos limites de controle, como pode ser observado nas Figuras 5 a, 5 b, 6 a e 6 b. Quando utilizados os métodos da mediana 3 e da média verifica-se que não existe evidência para rejeição do processo, ver as Figuras 5 c, 5 d, 6 c e 6 d.

Na avaliação da distribuição $\text{log-normal}(1,0.6)$ e $\text{Weibull}(1, 0.3)$, apresentada nas Figuras 7 e 8, respectivamente, observa-se que as cartas de controle da mediana 1, 3 e da média indicam um processo em controle, o mesmo não acontece com o método da mediana 2.

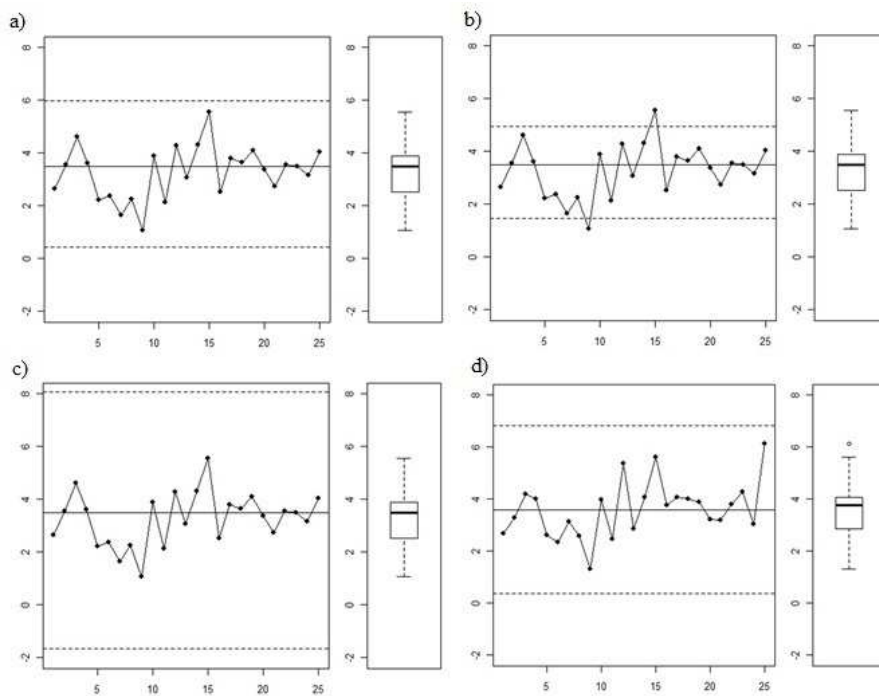


Figura 7: Cartas de Controle da mediana 1 (a), mediana 2 (b), mediana 3 (c), média (d) de uma população $\text{Lognormal}(1,0.6)$ de tamanho amostral 3.

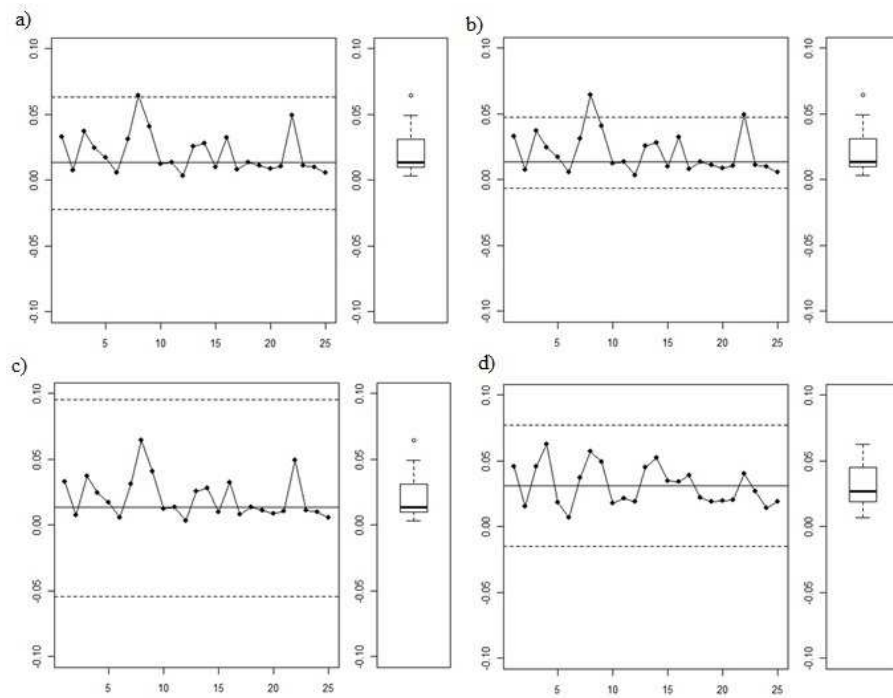


Figura 8: Cartas de Controle da mediana 1 (a), mediana 2 (b), mediana 3 (c), média (d) de uma população Weibull(1,0.3) de tamanho amostral 5.

Nas Figuras 7 e 8, verifica-se que a carta de controle da mediana 1 apresentam comportamento semelhante aos métodos da mediana 3 e da média, indicando que além de ser mais um método mais robusto pode apresentar as mesmas conclusões dos outros dois métodos.

Utilizando o método de agrupamento de Ward nas probabilidades de rejeição das cartas de controle para os tamanhos amostrais de 3, 5 e 7 e utilizando todas as distribuições de probabilidades em questão verifica-se a formação de dois grupos de técnicas (mediana 2 um grupo, e mediana 1, 3 e média outro) a uma distância de 0,2, se a distância for de 0,1 tem-se a formação de três grupos de técnicas de cartas de controle (um grupo mediana 3, outro mediana 1 e por último o grupo formado pelos métodos da mediana 3 e média), Figura 9.

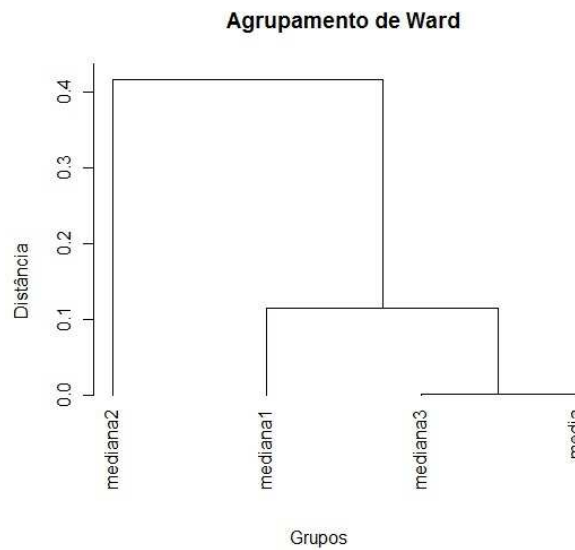


Figura 9: Agrupamento das técnicas das cartas de controle utilizando o método de Ward.

5. Conclusões

Embora o gráfico de controle da média seja bastante utilizado na prática, o método da carta de controle da mediana 1 se mostrou, mais eficaz para avaliação de processos em qualquer que seja a distribuição de probabilidade. O método da carta de controle da mediana 2 por ser o método mais rigoroso do que os demais estudados, pois não apresentou resultados satisfatórios em relação aos outros métodos. As cartas de controle da mediana 3 e da média apresentaram resultados similares para a maior parte das distribuições estudadas.

As probabilidades de rejeição das cartas de controle diminuem com o crescimento amostral independente do método utilizado. As distribuições simétricas apresentaram as menores probabilidades de rejeição da carta de controle independente do método de avaliação do que as distribuições assimétricas. O método da mediana 1 se mostrou um método alternativo para a carta de controle da média.

Referências

- Alencar, J. R. B., Souza, J. M. B., Rolim, N. P., e Lopes, C. E. (2004). Uso de controle estatístico de processo (cep) para validação de processo de glibenclamida comprimidos. *Revista Brasileira de Farmácia*, 85:115–119.
- Berlitz, F. A. (2010). Controle da qualidade no laboratório clínico: Alinhando melhoria de processos, confiabilidade e segurança do paciente. *Jornal Brasileiro de Patologia e Medicina Laboratorial*, 46:353–363.
- Lima, A. A. N., Lima, J. R., Silva, J. L., Alencar, J. R. B., Soares-Sobrinho, J. L., Lima, L. G., e Rolim-Neto, P. J. (2006). Aplicação do controle estatístico de processo na indústria farmacêutica. *Revista de Ciências Farmacêuticas Básica Aplicada*, 27:177–187.
- Martins, A. N. S. e Penna, T. C. V. (2004). Gerenciamento de risco em produtos para a saúde. *Control Contam*, 59:32–35.
- Milan, M. e Fernandes, R. A. T. (2002). Qualidade das operações de preparo de solo por controle estatístico de processo. *Scientia Agricola*, 59:261–266.
- Montgomery, D. C. (2004). *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*. LTC, Rio de Janeiro.
- Ramos, A. W., Chacra, N. A. B., e Pinto, T. J. A. (2006). Validação estatística de processo farmacêutico. *Bio Farma*, 1:123–132.
- Resende, M. D. V. e Duarte, J. B. (2007). Precisão e controle de qualidade em experimentos de avaliação de cultivares. *Pesquisa Agropecuária Tropical*, 37:182–194.
- Salvi, J. V., Matos, M. A., e Milan, M. (2007). Avaliação do desempenho de dispositivos de corte de base de colhedora de cana-de-açúcar. *Engenharia Agrícola*, 27:201–209.
- Silva, J. I. F. e Oliveira, V. C. (2005). A aplicação do controle estatístico de processo numa indústria de beneficiamento de camarão marinho no estado do rio grande do norte. *Revista Gestão Industrial*, 1:59–69.
- Srikaeo, K., Furst, J. E., e Aston, J. (2005). Characterization of wheat based wicuit cooking process by statistical process control techniques. *Food Control*, 16:309–317.