Biomatemática ***27 (2)*** *2017, 127–144* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Solução numérica para PVI com condições iniciais fuzzy interativas: uma aplicação a modelos do tipo SIR

Vinícius F. Wasques[1],
Estevão E. Laureano[2], Laécio C. Barros[3],
IMECC, UNICAMP, 13081-970, Campinas/SP.

Resumo. Apresentamos neste artigo soluções numéricas para um PVI com condições iniciais incertas modeladas por números fuzzy, com aplicação em modelos epidemiológicos do tipo SIR (Suscetível-Infectado-Recuperado) com dinâmica vital. As simulações numéricas são feitas através do método de Euler adaptado para operações aritméticas entre números fuzzy interativos. Tais operações são definidas a partir de uma família de distribuições de possibilidade conjunta parametrizada J_γ.

Palavras-chave: *Números fuzzy, distribuição de possibilidade conjunta, números fuzzy interativos, problema de valor inicial fuzzy.*

1. Introdução

Os modelos matemáticos epidemiológicos são frequentemente estudados para compreender a dinâmica e a evolução de uma certa doença, e possibilitam indicar algum controle para a mesma. Geralmente, os modelos matemáticos para doenças de transmissão direta são dados por sistemas de equações diferenciais ordinárias ou parciais (Yang e Ferreira, 1999; Almeida, 2014; Akinboro et al., 2014; Berrai et al., 2013). Em Berrai et al. (2013), por exemplo, é apresentado, através de um sistema de equações diferenciais ordinárias, um estudo sobre a propagação de doenças que se comportam segundo o modelo

[1]viniwasques@hotmail.com
[2]eelaureano@gmail.com
[3]laeciocb@ime.unicamp.br

epidemiológico SIR. No entanto, esses modelos não consideram incertezas provenientes de parâmetros ou de conhecimentos parciais, possivelmente presentes nos fenômenos biológicos.

Dentre os diversos modelos epidemiológicos conhecidos, abordaremos o do tipo SIR (Suscetível (S) - Infectado (I) - Recuperado (R)) com dinâmica vital segundo o diagrama compartimental da Figura 1.

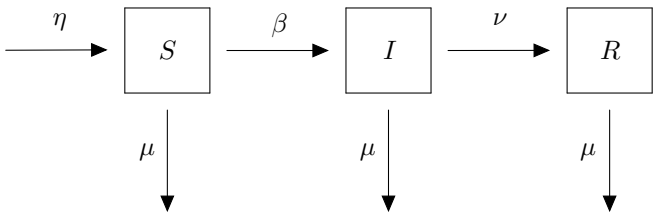

Figura 1: Diagrama compartimental do modelo epidemiológico SIR considerando dinâmica vital.

Os parâmetros η, μ, β e ν são respectivamente as taxas de natalidade, mortalidade, transmissão da doença e de recuperação.

Neste modelo os indivíduos suscetíveis que contraem certa doença se tornam infectados. Após o tempo de recuperação $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ o indivíduo é removido para o compartimento dos recuperados, deixando de ser suscetível à doença novamente. Sarampo, caxumba e rubéola são alguns exemplos de doenças que se comportam dessa maneira. Tal modelo matemático é dado pelo sistema (1.1) (Edelstein-Keshet, 1988)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + (\eta - \mu)S, & S(0) = S_0 \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + \nu)I, & I(0) = I_0 \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - \mu R, & R(0) = R_0 \end{cases}, \tag{1.1}$$

com condições iniciais S_0, I_0 e R_0.

Supondo que as condições iniciais são incertas e modeladas por números fuzzy, existem algumas maneiras de se resolver um PVI fuzzy (Barros e Pedro, 2016; Cabral, 2011; Cecconello et al., 2010; Esmi et al., 2017; Barros et al., 2017; Gomes et al., 2015). Em (Barros e Pedro, 2016) por exemplo, é considerado um PVI fuzzy de tal modo que a interatividade entre os números fuzzy é dada por uma correlação linear. No entanto, esse tipo de correlação exige que os

números fuzzy em questão sejam de mesma forma: triangular, trapezoidal e etc.

No sistema (1.1) que estamos analisando, levamos em conta dinâmica vital, de tal modo que a relação $S(t) + I(t) + R(t) = 1$, não é satisfeita em geral, isto é, no nosso caso não temos uma correlação linear entre os números fuzzy envolvidos. Sendo assim, buscamos outro tipo de relação que possa ser aplicada para quaisquer números fuzzy.

Em (Esmi et al., 2017) foi proposto uma família de distribuições de possibilidade conjunta capaz de descrever interatividade entre números fuzzy. Usaremos este fato para analisar a interação entre as condições iniciais em que S_0 e I_0 são modelados por número fuzzy triangular e R_0 por um número real.

As soluções numéricas para o sistema (1.1) são obtidas através do método de Euler, sendo que as operações realizadas durante o processo são dadas via princípio de extensão $sup - J_\gamma$, como explicadas ao longo do texto.

2. Preliminares

A seguir apresentamos os conceitos da teoria de conjuntos fuzzy que vamos utilizar no decorrer desse artigo.

Definição 1 *(Zadeh, 1965) Um subconjunto fuzzy A de um universo X é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : X \to [0,1]$ em que $\mu_A(x)$ indica o grau com que $x \in X$ pertence a A.*

Todo subconjunto clássico A em X pode ser definido por sua função característica, isto é, pela função $\chi_A : X \to \{0,1\}$ que assume o valor 1 se $x \in A$ ou o valor 0 se $x \notin A$. Podemos dizer então que um conjunto clássico é em particular um conjunto fuzzy. Denotamos por $\mathcal{F}(X)$ a família de todos os subconjuntos fuzzy de X. Para facilitar a notação escrevemos as funções de pertinência $\mu_A(x)$ simplesmente por $A(x)$ para todo $x \in X$.

Seja A um subconjunto fuzzy de X, sendo X um espaço topológico. Para cada $0 < \alpha \leq 1$, os $\alpha-$níveis de A são definidos pelos conjuntos $[A]^\alpha = \{x \in X : A(x) \geq \alpha\}$. Para $\alpha = 0$, o $\alpha-$nível é dado por $[A]^0 = \overline{suppA}$, isto é, o fecho do suporte do subconjunto fuzzy A: $suppA = \{x \in X : A(x) > 0\}$.

Os números fuzzy são subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}$ cujos $\alpha-$níveis são intervalos limitados, fechados e não vazios para todo $\alpha \in [0,1]$, e são denotados por

$[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ (Barros e Bassanezi, 2015). Denotamos a classe dos números fuzzy por $\mathbb{R}_\mathcal{F}$.

Os números fuzzy trapezoidais são exemplos de números fuzzy. Denotado por $(a; b; c; d)$ com $a \leq b \leq c \leq d$, um número fuzzy trapezoidal A é dado por (Barros e Bassanezi, 2015)

$$A(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \text{ se } a \leq x < b \\ 1 & , \text{ se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & , \text{ se } c < x \leq d \\ 0 & , \text{ se } d < x \end{cases}.$$

Se $b = c$ então obtemos um número fuzzy triangular e denotamos por $(a; b; d)$, com $a \leq b \leq d$.

Definição 2 *(Pompeiu, 1905; Hausdorff, 1914; Bede, 2013) Sejam A e B números fuzzy. A distância de Pompeiu-Hausdorff $D_\infty : \mathbb{R}_\mathcal{F} \times \mathbb{R}_\mathcal{F} \to [0, +\infty)$ é dada por*

$$D_\infty(A, B) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \max\{|a_\alpha^- - b_\alpha^-|, |a_\alpha^+ - b_\alpha^+|\}, \ \forall A, B \in \mathbb{R}_\mathcal{F}.$$

E mais, a norma de um número fuzzy $A \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ é definida por

$$||A||_\mathcal{F} = D_\infty(A, 0),$$

sendo que o símbolo 0 representa a função característica do número real 0.

Definição 3 *Seja A um número fuzzy. Definimos o diâmetro do número fuzzy A por*

$$diam(A) = |a_0^+ - a_0^-|.$$

Uma relação fuzzy R entre dois universos X e Y é dada pela função de pertinência $R : X \times Y \to [0, 1]$, sendo $R(x, y) \in [0, 1]$ o grau em que $x \in X$ e $y \in Y$ estão relacionados segundo a relação R. Uma relação fuzzy n-ária em $U = X_1 \times ... \times X_n$ nada mais é que um subconjunto fuzzy do universo U.

A projeção de uma relação fuzzy multivariada $J \in \mathcal{F}(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n)$ sobre X_i, com $1 \leq i \leq n$, é o conjunto fuzzy Π_J^i de X_i com função de pertinência dada por

$$\Pi_J^i(z) = \bigvee\{J(x) : x \in X \text{ com } x = (x_1, ..., x_{i-1}, z, x_{i+1}, ..., x_n)\}, \ \forall z \in X_i$$

sendo que o símbolo $\bigvee$ representa o supremo.

Uma relação fuzzy $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição de possibilidade conjunta para os números fuzzy $A_1, ..., A_n$ se $A_i(x_i) = \Pi_J^i(x_i)$, $\forall i = 1, ..., n$. Ainda, os números fuzzy $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ são ditos não interativos se, e somente se, a sua distribuição de possibilidade conjunta é dada por

$$J(x_1, ..., x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i),$$

para todo $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, sendo que o símbolo $\bigwedge$ representa o mínimo. Caso contrário, dizemos que $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ são interativos. Assim, a interatividade entre números fuzzy é sobrejacente à distribuição de possibilidade conjunta e, intuitivamente, a interatividade é tanto maior quanto maior for o número de pontos em que J se anula.

Uma distribuição de possibilidade conjunta bivariada bastante utilizada é a seguinte:

Definição 4 *(Carlsson et al., 2004) Os números fuzzy $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ são completamente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$ com $q \neq 0$ tal que*

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2) = J_{q,r}(x_1, x_2) &= A_1(x_1)\chi_{\{qu+r=v\}}(x_1, x_2) \\ &= A_2(x_2)\chi_{\{qu+r=v\}}(x_1, x_2) \end{aligned}, \tag{2.2}$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sendo $\chi_{\{qu+r=v\}}$ a função característica do conjunto $\{(u, qu + r) : \forall u\}$.

Note que essa distribuição conjunta $J_{q,r}$ se anula em todos os pares $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, exceto aqueles que estão sobre a reta $v = qu + r$. Isso significa alta interatividade, de acordo com interpretação acima. Mais ainda, corrobora com a denominação "completamente correlacionados".

A distribuição de possibilidade conjunta (2.2) é restritiva, uma vez que exclui números fuzzy que não possam ser correlacionados através de uma reta, como é o caso em que A_1 é um número fuzzy triangular e A_2, um trapezoidal. Em particular, não podemos correlacionar, através de (2.2), os números fuzzy envolvidos em nosso modelo, pois se houvesse tal correlação teríamos que $S(t) + I(t) = c_1$, $S(t) + R(t) = c_2$ e $I(t) + R(t) = c_3$, com c_1, c_2 e c_3 constantes. Nessas condições, obteríamos $S(t)+I(t)+R(t) = k$, com k constante, para todo instante de tempo $t \in [0, \infty)$, o que não ocorre no caso que estamos considerando, devido à dinâmica vital. Sendo assim, buscamos outras distribuições de

possibilidade conjunta, tal como a apresentada em (Esmi et al., 2017; Sussner et al., 2016).

Definição 5 *(Princípio de Extensão Sup-J (Fullér e Majlender, 2004)) Sejam $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição de possibilidade conjunta de $A_1, ..., A_n \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A extensão sup-J da função f aplicada em $(A_1, ..., A_n)$ é definida por*

$$f_J(A_1, ..., A_n)(y) = \bigvee_{(x_1,...,x_n) \in f^{-1}(y)} J(x_1, ..., x_n),$$

sendo $f^{-1}(y) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, ..., x_n) = y\}$ a pré-imagem de y pela função f.

Através da Definição 5, é possível obter uma aritmética interativa entre números fuzzy. Por exemplo, podemos definir a soma interativa entre A_1 e A_2 do seguinte modo

$$(A_1 +_J A_2)(y) = \bigvee_{x_1+x_2=y} J(x_1, x_2), \tag{2.3}$$

em que $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e J é uma distribuição de possibilidade conjunta de A_1 e A_2 arbitrária.

De maneira similar, podemos definir quaisquer outras operações aritméticas $\otimes$ tomando a função $f(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2$.

Nosso primeiro interesse é obter soluções numéricas que envolvem operações aritméticas entre números fuzzy com interatividade. A aritmética tradicional entre números fuzzy considera (implicitamente) não interatividade, cujos resultados produzem soluções com o maior diâmetro possível (Barros et al., 2017).

Aqui estamos interessados em uma distribuição de possibilidade conjunta que possa ser construída para quaisquer pares de números fuzzy. Em (Esmi et al., 2017; Sussner et al., 2016) foi definida famílias de distribuições de possibilidade conjuntas parametrizada J_γ, $\gamma \in [0, 1]$, que exercerá o controle no diâmetro da operação aritmética resultante. Mais ainda, tanto o "nível" de interatividade entre os números fuzzy envolvidos como o diâmetro da operação resultante são crescentes com o parâmetro γ, isto é, se $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq 1$ então $J_0 \subseteq J_{\gamma_1} \subseteq J_{\gamma_2} \subseteq J_1$ e consequentemente $||A_1 \otimes_{J_0} A_2|| \leq ||A_1 \otimes_{J_{\gamma_1}} A_2|| \leq ||A_1 \otimes_{J_{\gamma_2}} A_2|| \leq ||A_1 \otimes_{J_1} A_2||$.

A seguir vamos dar os passos para a "construção" da família J_γ (Sussner et al., 2016): dados $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, considere as funções auxiliares $g^i_\wedge$, $g^i_\vee$ e v^i definidas por

$$g^i_\wedge(z,\alpha) = \bigwedge_{w\in[A_{3-i}]^\alpha} |w+z|, \tag{2.4}$$

$$g^i_\vee(z,\alpha) = \bigvee_{w\in[A_{3-i}]^\alpha} |w+z| \tag{2.5}$$

e

$$v^i(z,\alpha,\gamma) = (1-\gamma)g^i_\wedge(z,\alpha) + \gamma g^i_\vee(z,\alpha), \tag{2.6}$$

para todo $z \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$, $\gamma \in [0,1]$ e $i \in \{1,2\}$.

Observe que a função $v^i(z,\alpha,\gamma)$, em z, assume valores cada vez maiores a medida que γ aumenta em $[0,1]$.

Considere também os conjuntos R^i_α e $L^i(z,\alpha,\gamma)$,

$$R^i_\alpha = \begin{cases} \{a^-_{i_\alpha}, a^+_{i_\alpha}\} & \text{se } \alpha \in [0,1) \\ [A_i]^1 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

e

$$L^i(z,\alpha,\gamma) = [A_{3-i}]^\alpha \cap [-v^i(z,\alpha,\gamma) - z, v^i(z,\alpha,\gamma) - z].$$

Finalmente, definimos J_γ por

$$J_\gamma(x_1,x_2) = \begin{cases} A_1(x_1) \wedge A_2(x_2), & \text{se } (x_1,x_2) \in P(\gamma) \\ 0 \quad , & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.7}$$

com

$$P(\gamma) = \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{\alpha\in[0,1]} P^i(\gamma,\alpha)$$

e $P^i(\gamma,\alpha)$ sendo definido para todo $i \in \{1,2\}$, $\gamma \in [0,1]$ e $\alpha \in [0,1]$, por

$$P^i(\gamma,\alpha) = \{(x_1,x_2) : x_i \in R^i_\alpha \text{ e } x_{3-i} \in L^i(x_i,\alpha,\gamma)\}.$$

Diferentemente da distribuição conjunta bivariada $J_{q,r}$ (Definição 4) a distribuição de possibilidade conjunta (2.7) não possui restrições, isto é, pode ser construída para qualquer par de números fuzzy.

É importante observar que o número de pares (x_1,x_2) em que J_γ não se anula é tanto maior quanto maior for $\gamma \in [0,1]$. Isso porque a função $v^i(z,\alpha,\gamma)$

é crescente em relação a γ. Portanto, quanto menor o valor de γ, maior a interatividade entre A_1 e A_2.

Ressaltamos também que para $\gamma = 1$ temos $J_1 = J_\wedge$, isto é, A_1 e A_2 são não interativos e o princípio de extensão $sup - J_1$ se resume ao princípio de extensão de Zadeh (Esmi et al., 2017).

Baseando-nos na distribuição de possibilidade conjunta dada por (2.7) podemos construir aritméticas fuzzy interativas. Foi provado em (Esmi et al., 2017) que a norma da extensão $sup - J_\gamma$ da adição de dois números fuzzy pode ser ajustado com o parâmetro γ, onde a menor e a maior norma possíveis via princípio de extensão $sup - J$ são dadas por $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$, respectivamente.

Vale lembrar que apesar do diâmetro de um número fuzzy ser limitado por duas vezes sua norma, esta abordagem apresentada em (Esmi et al., 2017) não produziu bons resultados com respeito ao diâmetro de soluções numéricas de PVI. A fim de tornar a norma e o diâmetro equivalentes, (Sussner et al., 2016) introduziram o conceito de translação para números fuzzy.

Definição 6 *(Sussner et al., 2016) Dado $A \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$, o número fuzzy A transladado por $c \in \mathbb{R}$ é definido pelo número fuzzy $\tilde{A}$, cuja função de pertinência é dada por*

$$\tilde{A}(x) = A(x + c), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

A partir da Definição 6 é possível construir uma família de distribuições de possibilidade conjunta, conforme o Teorema 1.

Teorema 1 *(Sussner et al., 2016) Dados $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ e $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, considere os transladados $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$ tais que $\tilde{A}_1(x) = A_1(x + c_1)$ e $\tilde{A}_2(x) = A_2(x + c_2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Seja $\gamma \in [0, 1]$ e $\tilde{J}_\gamma$ uma distribuição de possibilidade conjunta entre $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$. Se J^c_γ é a relação fuzzy definida por

$$J^c_\gamma(x_1, x_2) = \tilde{J}_\gamma(x_1 - c_1, x_2 - c_2), \ \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.9}$$

então J^c_γ é uma distribuição de possibilidade conjunta entre A_1 e A_2, e ainda, $(A_1 +^c_\gamma A_2) \in \mathbb{R}_\mathcal{F}$, sendo $+^c_\gamma$ o símbolo que representa a soma via extensão $sup - J^c_\gamma$.

Com a distribuição de possibilidade conjunta (2.9) é possível ter um controle do diâmetro das operações definidas via extensão $sup - J^c_\gamma$ através do parâmetro $\gamma \in [0, 1]$, isto porque, as seguintes afirmações são equivalentes (Sussner et al., 2016; Esmi et al., 2017):

(a) $\gamma \leq \beta$;

(b) $J^c_\gamma \subseteq J^c_\beta$;

(c) $A_1 +^c_\gamma A_2 \subseteq A_1 +^c_\beta A_2$; e

(d) $diam(A_1 +^c_\gamma A_2) \leq diam(A_1 +^c_\beta A_2)$.

Pode-se mostrar que $[\tilde{A}_1 +_\gamma \tilde{A}_2]^\alpha - \{c_1 + c_2\} = [A_1 +^c_\gamma A_2]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, sendo $+_\gamma$ o símbolo que representa a soma via extensão $sup - J_\gamma$. A equivalência acima diz que o diâmetro da soma via extensão $sup - J^c_\gamma$ está relacionado com o parâmetro de ajuste γ, de modo que o diâmetro da soma diminui conforme o valor de γ se aproxima de 0.

Graficamente, temos que quanto maior o valor de γ, maior é o conjunto fuzzy J_γ. Por exemplo, nas Figuras 2, 2, 4 e 5 vemos os números fuzzy triangulares $A_1 = (-1; 0; 1)$ e $A_2 = (-1; 0; 1)$ correlacionados através da distribuição de possibilidade conjunta J_γ, com $\gamma = 0$, $\gamma = 0.25$, $\gamma = 0.5$ e $\gamma = 1$, respectivamente. Em particular, temos que para $\gamma = 0$ os números fuzzy A_1 e A_2 são completamente correlacionados, isso porque os números fuzzy envolvidos são triangulares.

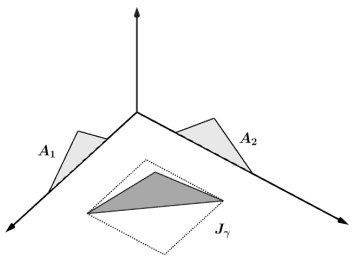

Figura 2: Distribuição de possibilidade conjunta J_γ, para $\gamma = 0$ entre os números fuzzy $A_1 = (-1; 0; 1)$ e $A_2 = (-1; 0; 1)$.

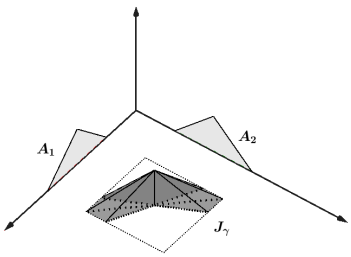

Figura 3: Distribuição de possibilidade conjunta J_γ, para $\gamma = 0.25$ entre os números fuzzy $A_1 = (-1; 0; 1)$ e $A_2 = (-1; 0; 1)$.

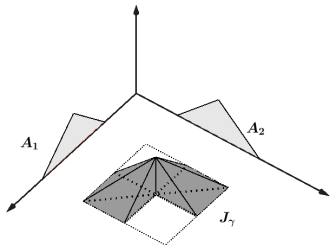

Figura 4: Distribuição de possibilidade conjunta J_γ, para $\gamma = 0.5$ entre os números fuzzy $A_1 = (-1; 0; 1)$ e $A_2 = (-1; 0; 1)$.

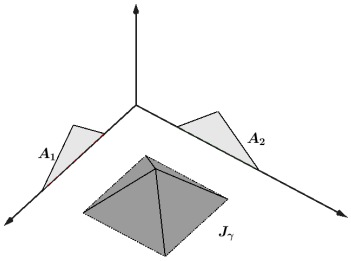

Figura 5: Distribuição de possibilidade conjunta J_γ, para $\gamma = 1$ entre os números fuzzy $A_1 = (-1; 0; 1)$ e $A_2 = (-1; 0; 1)$.

3. Solução numérica para PVI

A seguir vamos estudar um modelo clássico de epidemiologia (SIR) do ponto de vista das soluções numéricas clássicas e depois fuzzy. Em ambos os casos usamos métodos do tipo Euler.

3.1. Solução numérica para PVI clássico

Como é bem conhecido, o método de Euler consiste em determinar soluções numéricas para equações diferenciais ordinárias como a descrita em (3.10)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{3.10}$$

O algoritmo de tal método consiste em, dada a condição inicial x_0, computa-se $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$, com $0 \leq k \leq N-1$, sendo N o número de partições que o intervalo de tempo considerado é dividido e h o tamanho dos subintervalos $[t_k, t_{k+1}]$ igualmente espaçados.

Utilizamos este método a fim de obter uma solução numérica para o sistema (1.1) com condições iniciais fuzzy. Antes disso, apresentamos uma solução determinística para esse modelo com o objetivo de observar o comportamento das populações S, I e R.

Tomando-se condições iniciais determinísticas, temos que a solução numérica, via método de Euler, é dada por (3.11)

$$\begin{cases} S_{k+1} = S_k + h(-\beta S_k I_k + (\eta - \mu)S_k) \\ I_{k+1} = I_k + h(\beta S_k I_k - (\mu + \nu)I_k) \\ R_{k+1} = R_k + h(\nu I_k - \mu R_k) \end{cases} . \tag{3.11}$$

Em (Smith e Moore, 2004) é considerado um modelo determinístico do tipo SIR, sem dinâmica vital, com condições iniciais $S_0 = 1$, $I_0 = 1.27 \times 10^{-6}$ e $R_0 = 0$. Note que a condição inicial para a população de recuperados é $R_0 = 0$ pois no tempo $t = 0$ a doença ainda está se iniciando, sendo assim, não houve tempo de existir recuperados. Na Figura 6 apresentamos uma solução numérica para (1.1) tomando as condições iniciais fornecidas por (Smith e Moore, 2004).

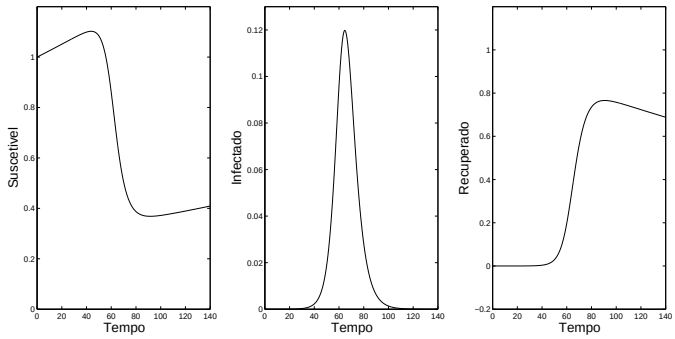

Figura 6: Solução numérica do sistema (1.1) via método de Euler, utilizando os parâmetros $h = 0.125$, $\beta = 0.5$, $\eta = 5 \times 10^{-3}$, $\mu = 2.5 \times 10^{-3}$ e $\nu = 1/3$. As condições iniciais S_0, I_0 e R_0 são dadas por $S_0 = 1$, $I_0 = 1.27 \times 10^{-6}$ e $R_0 = 0$.

3.2. Solução numérica para PVI com condições iniciais fuzzy interativas

Considerando condições iniciais incertas, modelas por números fuzzy interativos, usamos operações aritméticas no método de Euler que são provenientes de uma distribuição J_γ^c adequada, isto é, tais operações são realizadas via princípio de extensão $sup - J_\gamma^c$.

Nessas condições, as soluções numéricas para o PVI fuzzy (1.1) são dadas por (3.12)

$$\begin{cases} S_{k+1} = S_k +_\gamma^c h(-\beta S_k *_\gamma^c I_k +_\gamma^c (\eta - \mu)S_k) \\ I_{k+1} = I_k +_\gamma^c h(\beta S_k *_\gamma^c I_k -_\gamma^c (\mu + \nu)I_k) \\ R_{k+1} = R_k +_\gamma^c h(\nu I_k -_\gamma^c \mu R_k) \end{cases}, \tag{3.12}$$

sendo $+_\gamma^c$, $*_\gamma^c$ e $-_\gamma^c$ a soma, produto e a diferença via extensão $sup - J_\gamma^c$, respectivamente.

Nas simulações numéricas foram utilizadas as condições iniciais fuzzy triangulares $S_0 = (0; 1; 2)$, $I_0 = (1 \times 10^{-6}; 1.27 \times 10^{-6}; 1.5 \times 10^{-6})$ e para a população de recuperados, usamos a mesma condição inicial do modelo determinístico, isto é, $R_0 = 0$. Os parâmetros h, β, η, μ e ν são os mesmos que os fornecidos na solução determinística.

Observamos que sobre as condições de que $R_0 = 0$, os números fuzzy S_0 e I_0 passam a ser completamente correlacionados com $q = -1$ e $r = 1$. No

entanto, isso só ocorre em $t = 0$, para $t > 0$ tal relação já não é mais válida, por isso utilizamos a distribuição de possibilidade conjunta (2.7).

Comparamos a evolução temporal das populações S, I e R para alguns valores de γ, a saber, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0.25$, $\gamma_3 = 0.5$, $\gamma_4 = 0.55$ e $\gamma_5 = 1$, exibidas respectivamente nas Figuras 7, 8, 9, 10 e 11.

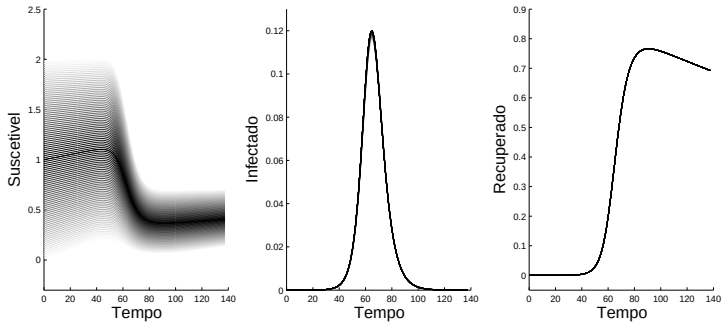

Figura 7: Solução numérica via extensão $sup - J^c_\gamma$, com $\gamma = 0$. As linhas em tons de cinza representam os $\alpha-$níveis. Os valores de α próximos de 1 são descritos pelas linhas mais escuras. Para essa solução numérica foram utilizadas 1100 iterações.

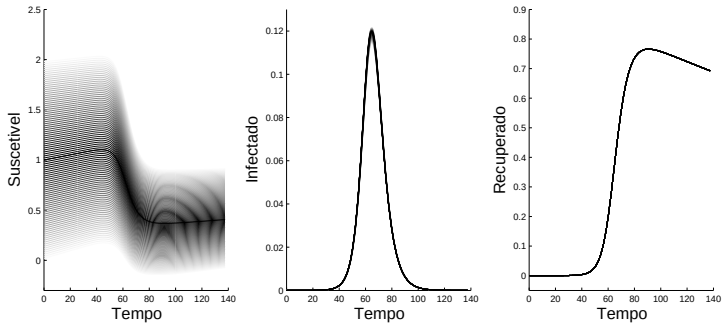

Figura 8: Solução numérica via extensão $sup - J^c_\gamma$, com $\gamma = 0.25$. As linhas em tons de cinza representam os $\alpha-$níveis. Os valores de α próximos de 1 são descritos pelas linhas mais escuras. Para essa solução numérica foram utilizadas 1100 iterações.

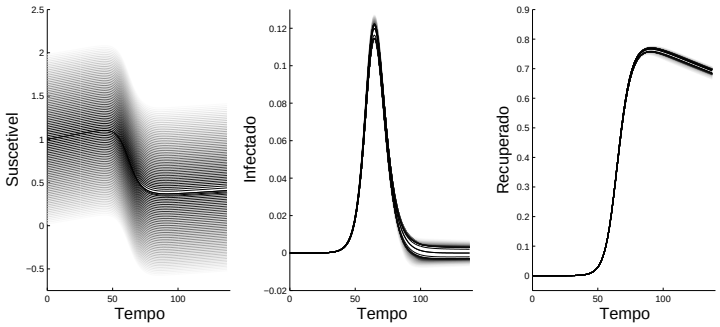

Figura 9: Solução numérica via extensão $sup - J^c_\gamma$, com $\gamma = 0.5$. As linhas em tons de cinza representam os $\alpha-$níveis. Os valores de α próximos de 1 são descritos pelas linhas mais escuras. Para essa solução numérica foram utilizadas 1100 iterações.

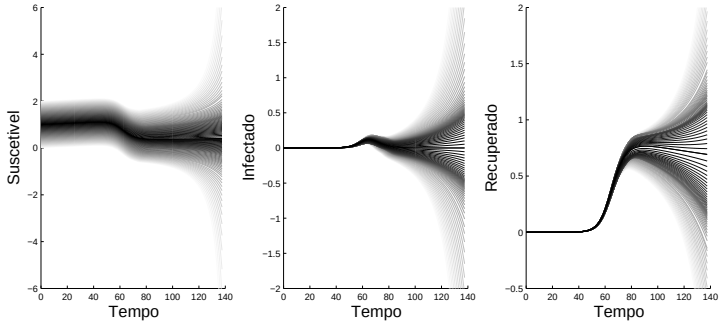

Figura 10: Solução numérica via extensão $sup - J^c_\gamma$, com $\gamma = 0.55$. As linhas em tons de cinza representam os $\alpha-$níveis. Os valores de α próximos de 1 são descritos pelas linhas mais escuras. Para essa solução numérica foram utilizadas 1100 iterações.

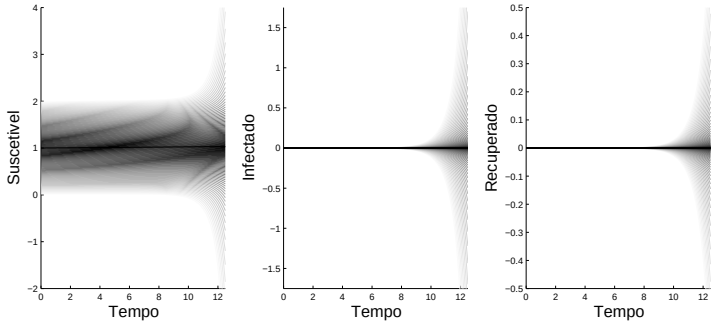

Figura 11: Solução numérica via extensão $sup - J^c_\gamma$, com $\gamma = 1$. As linhas em tons de cinza representam os $\alpha-$níveis. Os valores de α próximos de 1 são descritos pelas linhas mais escuras. Para essa solução numérica foram utilizadas 100 iterações.

É possível notar, principalmente nas Figuras 7 e 8, que o "padrão" dos gráficos das populações S, I e R é similar ao comportamento apresentado pela solução determinística (Figura 6).

Os gráficos da dinâmica do modelo corroboram com o fato de que o diâmetro da solução está associado com o valor que o parâmetro γ assume. Por exemplo, as Figuras 10 e 11 mostram as soluções numéricas para o sistema (1.1), via extensão $sup - J^c_{0.55}$ e $sup - J^c_1$ respectivamente, apresentando os maiores diâmetros dentre os valores de γ exibidos aqui. Por outro lado, a solução numérica dada por $sup - J^c_0$ (Figura 7) possui o menor diâmetro dentre os demais.

4. Conclusão

Nesse estudo consideramos um sistema epidemiológico SIR, com dinâmica vital e condições iniciais incertas modeladas por números fuzzy interativos.

Para cada γ obtemos uma distribuição de possibilidade conjunta entre os números fuzzy envolvidos e, consequentemente, a interatividade entre eles. Do ponto de vista da dinâmica da doença, a interatividade entre as populações de suscetíveis, infectados e recuperados é "controlada" pelo parâmetro de ajuste γ, sendo que quanto mais próximo de 0 for este valor, maior é a interatividade.

O diâmetro de um número fuzzy está atrelado a incerteza que o mesmo modela, isto é, quanto menor for o valor do diâmetro, menor é a incerteza.

Desse modo, como observamos na Seção 2, a solução numérica apresentada na Figura 7 fornece uma aproximação mais precisa (comparada às soluções numéricas obtidas a partir de outros valores de γ) da evolução temporal das populações em relação à doença.

Perceba que para $\gamma = 0.55$ e $\gamma = 1$ o diâmetro da solução numérica aumenta rapidamente, principalmente para a população de infectados, comprovando que para maiores valores de γ a incerteza sobre a dinâmica populacional aumenta.

Apresentamos soluções numéricas para este modelo, via método de Euler, sendo que as operações realizadas durante o método são provenientes de uma distribuição de possibilidade conjunta que é compatível com a derivada interativa em questão.

A partir de uma aritmética interativa, baseada no princípio de extensão $sup - J^c_\gamma$, controlamos a incerteza presente na dinâmica da doença através do parâmetro γ. As simulações computacionais corroboraram os resultados teóricos, pois observamos que o diâmetro das soluções numéricas está atrelado aos valores de $\gamma \in [0, 1]$.

Ressaltamos também que através dessa família de distribuições de possibilidade conjunta é possível efetuar operações aritméticas para quaisquer números fuzzy, diferentemente de outras distribuições conhecidas na literatura, como por exemplo a distribuição para números fuzzy completamente correlacionados. Isso nos permite modelar as condições iniciais do PVI fuzzy através de qualquer tipo de número fuzzy e também, nesse caso particular, torna-se possível considerar um modelo com população não constante.

Por fim, diferentemente do PVI fuzzy em que a derivada é fuzzy interativa, obtida por diferença interativa (Barros e Pedro, 2016; Pedro, 2017), aqui trabalhamos com métodos numéricos para PVI fuzzy em que apenas as condições iniciais são consideradas números fuzzy interativos para o sistema (1.1).

Referências

Akinboro, F. S., Alao, S., e Akinpelu, F. O. (2014). Numerical solution of sir model using differential transformation method and variational iteration method. *Gen. Math. Notes*, 22:82–92.

Almeida, P. R. (2014). Modelos epidêmicos SIR contínuos e discretos, e es-

tratégias de vacinação. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa/MG.

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2015). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 of *Coleção Textos Didáticos*. IMECC–UNICAMP.

Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Lodwick, W. A. (2017). *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*, volume 347 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Barros, L. C. e Pedro, F. S. (2016). Fuzzy differential equations with interactive derivative. *Fuzzy Sets and Systems*, 309:64–80.

Bede, B. (2013). *Mathematics od Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, volume 295. Studies in Fuzziness and Soft Computing.

Berrai, I., Bouyaghroumni, J., e Namir, A. (2013). Dissemination of epidemic for sir model. *Applied Mathematical Sciences*, 7:6793–6800.

Cabral, V. M. (2011). *Equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos*. Tese de Doutorado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.

Carlsson, C., Fullér, R., e Majlender (2004). Additions of completely correlated fuzzy numbers. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1:535–539.

Cecconello, M. S., Silva, J. D. M., e Bassanezi, R. C. (2010). Notas em matemática aplicada. Technical report, Títulos publicados para o XXXIII CNMAC 2010, São Carlos/SP.

Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*. Random House.

Esmi, E., Sussner, P., Ignácio, G. B. D., e Barros, L. C. (2017). A parametrized sum of fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. *Fuzzy Sets and Systems*.

Fullér, R. e Majlender, P. (2004). On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 143:355–369.

Gomes, L. T., Barros, L. C., e Bede, B. (2015). *Fuzzy Differential Equations*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer International Publishing.

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Verlag von Veit & Comp.

Pedro, F. S. (2017). *Sobre equações diferenciais para processos fuzzy linearmente correlacionados: aplicações em dinâmica de população.* Tese de Doutorado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.

Pompeiu, D. (1905). *Sur la continuité des fonctions de variables complexes.* Tese de Doutorado, Université de Paris, Paris/France.

Smith, D. e Moore, L. (2004). The SIR model for spread of disease-the differential equation model. URL: http://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/the-sir-model-for-spread-of-disease-the-differential-equation-model Acesso em: 07/07/2017.

Sussner, P., Esmi, E., e Barros, L. C. (2016). Controling the width of the sum of interactive fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems.*

Yang, H. M. e Ferreira, W. C. (1999). A population model applied to hiv transmission considering protection and treatment. *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*, 16:237–259.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.