

Modelagem e simulação computacional da dispersão de poluentes com uso das equações de Navier-Stokes

Jose C. Rubianes¹,

DEMAT, CEFET, 20.271-110, Rio de Janeiro/RJ.

Denis Cajas²,

ILACVN, UNILA, 85.866-000, Foz do Iguaçu/PR.

João F. C. A. Meyer³

DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-970, Campinas/SP.

J. A. I. Rubianes⁴,

DCA, FEEC – UNICAMP, 13.083-852, Campinas/SP.

Resumo.

Neste trabalho abordamos o modelo clássico de Difusão-Advecção bidimensional para a dispersão de poluentes e incorporamos o campo de velocidades da circulação superficial obtida pela resolução numérica das equações de Navier-Stokes, o que nos permite introduzir no modelo a influência contínua de forças externas dadas pelas correntezas dos rios que deságuam no domínio de simulação. O modelo de Difusão-Advecção é resolvido numericamente, na discretização para a variável espacial utilizamos o Método de Elementos Finitos triangulares lineares e para a variável temporal o Método de Crank-Nicolson. Simulações numéricas são realizadas para ilustrar os resultados matemáticos obtidos, escolhemos um cenário real incorporando suas características do entorno natural.

Palavras-chave: *Modelagem matemática; dispersão de poluentes; equações de Navier-Stokes, método dos elementos finitos.*

¹jose.rubianes@cefet-rj.br

²denniis1007@gmail.com

³joni@ime.unicamp.br

⁴angelivan34@hotmail.com

1. Introdução

A modelagem matemática é uma boa ferramenta que têm sido amplamente utilizada pelas ciências para representar e estudar diferentes problemas da vida real. É do nosso interesse estudar a modelagem de problemas ambientais em particular a modelagem da dispersão de poluentes em meios aquáticos.

Para este trabalho partimos do modelo clássico para este tipo de problemas, o modelo de Difusão-Advecção apresentado em Cajas et al. (2015); Rubianes et al. (2015); Prestes et al. (2013); Wolmuth (2009), onde o campo de velocidades foi considerado como a velocidade superficial gerada pelo vento, sendo esta constante ou seja da mesma magnitude em todo o domínio a simular.

Diferente das pesquisas citadas acima, neste trabalho além da velocidade do vento, levamos em consideração o campo de velocidades da circulação superficial do domínio, obtido pela resolução numérica das equações de Navier-Stokes que regem a circulação de um fluido.

Tomando como domínio das simulações a Baía de Buenaventura (ver: Cajas et al., 2015), as equações de Navier-Stokes serão utilizadas para podermos incorporar a correnteza dos rios que deságuam na baía, o que permitirá visualizar o campo de velocidades e como ele é influenciado pela geografia do domínio.

As condições de fronteira permanecem segundo o entorno natural, considerado absorção de poluente nas margens. Para a resolução numérica do modelo de Difusão-Advecção, utilizaremos na discretização para a variável espacial o Método de Elementos Finitos triangulares lineares e para a variável temporal o Método de Crank-Nicolson.

2. Modelo Matemático

Um modelo amplamente utilizado para a dispersão de poluentes é obtido através da equação diferencial parcial de Difusão-Advecção (LeVeque, 2007; Cantrell e Cosner, 2003; Okubo e Levin, 1980). Denotando C a concentração de poluentes, $C = C(x, y, t)$, com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in I = (0, T] \subset \mathbb{R}$, a equação que descreve tal fenômeno é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \alpha \Delta C + \mathbb{V} \cdot \nabla C + \mu C = f, \quad (2.1)$$

onde:

- $\alpha(x, y, t)$, representa a difusibilidade do poluente no meio;
- $\mathbb{V} = (v_1, v_2)$, representa o fluxo advectivo;
- $\mu(x, y, t)$, representa o decaimento do poluente no meio;
- $f(x, y, t)$, representa as fontes de poluentes.

Para o fluxo advectivo, a circulação local é considerada como a resultante da circulação superficial das águas da baía V_a , com a velocidade superficial induzida pelo vento V_v . Em geral, a velocidade do vento é tomada a 10 metros de altura, assim, a constante de proporcionalidade c_v nos proporciona a velocidade do vento superficial, utilizando a equação de Ekman (ver: Oliveira, 2003) a constante de proporcionalidade recebe o valor de 0.03.

$$\mathbb{V} = V_a + c_v V_v, \quad (2.2)$$

2.1. Condições Iniciais e de Contorno

É importante para as aplicações e o modelo a situação inicial do sistema em todo o domínio espacial e, o tipo de interação que ele apresenta com o exterior através da sua fronteira, ou seja, se há entrada, saída ou variação da concentração do poluente nas fronteiras.

As informações que descrevem o estado inicial se conhecem como condições iniciais e as descrições da forma de interação do sistema com o meio exterior físico são denominadas condições de fronteira, ou condições de contorno.

Vamos supor que no domínio espacial Ω , a fronteira $\partial\Omega$ tem n subdivisões, nos quais o comportamento da função C pode ter variações significativas pelas características específicas do meio, assim:

$$\partial\Omega = \cup_{i=1}^n \Gamma_i \quad (2.3)$$

2.1.1. Condição de Contorno de Dirichlet

As condições de Dirichlet ocorre quando a função C da equação diferencial parcial (2.1) é fornecida por uma função g em cada ponto da fronteira Γ_i , para algum $i = 1, \dots, n$.

$$C(x, y, t)|_{\Gamma_i} = g(x, y, t) \quad \text{onde} \quad (x, y) \in \Gamma_i \subseteq \partial\Omega, \quad t \in I. \quad (2.4)$$

2.1.2. Condição de Contorno de von Neumann

As condições de von Neumann ocorrem quando a derivada da função C é especificada por uma função g em cada ponto da fronteira Γ_i , para algum $i = 1, \dots, n$.

$$\left. \frac{\partial C}{\partial \eta}(x, y, t) \right|_{\Gamma_i} = g(x, y, t) \quad \text{com } (x, y) \in \Gamma_i \subseteq \partial\Omega, \quad t \in I. \quad (2.5)$$

onde η é a normal à fronteira Γ_i .

Quando $g(x, y, t) = 0$ se diz que é uma condição de fronteira de Neumann homogênea.

2.1.3. Condição de Contorno de Robin

A condição de Robin é obtida da combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann, assim será expressada como a combinação linear dos valores da função C e os valores de sua derivada na fronteira.

$$kC(x, y, t) + \alpha \left. \frac{\partial C}{\partial \eta}(x, y, t) \right|_{\Gamma_i} = g(x, y, t), \quad \text{com } (x, y) \in \Gamma_i \subseteq \partial\Omega, \quad t \in I. \quad (2.6)$$

onde k e α são constantes e η é a normal à fronteira Γ_i .

A condição de Robin homogênea representa a perda de poluente nas margens, sendo k a constante de proporcionalidade da perda na fronteira Γ_i , para algum i . Nas fronteiras onde não há absorção de poluente, consideramos a condição de Neumann Homogênea, que é um caso particular da fronteira de Robin, com $k = 0$.

Para o nosso estudo consideramos condição inicial, $C(x, y, 0) = 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$, supondo que o estado inicial do domínio livre de poluição para todas as simulações.

Assim, para o nosso domínio de estudo, o modelo para a dispersão de poluentes com condição inicial e condições de contorno, torna-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \mu C = f \\ \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta}(x, y, t) \Big|_{\Gamma_i} = -kC(x, y, t) & (x, y) \in \Gamma_i \subseteq \partial\Omega, \quad t \in I. \\ C(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2. Formulação Variacional

Pensando que ainda não existem ferramentas analíticas para encontrar solução para o nosso problema, é assim que expressamos o problema (2.7) como um sistema de equações integrais chamada de formulação variacional (ou formulação fraca); garantindo que a existência e a unicidade do problema variacional corresponde à solução do problema clássico (Gockenbach, 2006). O método que usaremos para resolver numericamente as equações do nosso modelo é o Método de Galerkin via Elementos Finitos.

Este método de Elementos Finitos não é aplicado aos problemas em sua forma clássica, mas sim em sua forma variacional, assim é possível provar facilmente a existência e unicidade da solução do problema em questão (Miyaoaka, 2015).

Para a obtenção da formulação variacional, os espaços que serão usados são:

- $L^2(\Omega) = \{f(x, y); \int_{\Omega} |f(x, y)|^2 d\mu < \infty\}$, este é o espaço das funções quadrado integráveis, com integração no sentido de Lebesgue;
- $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega) e \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega)\}$, espaço de Sobolev;
- $H^1(\Omega, (t_0, t_f]) = \{u(x, y, \bar{t}) \in H^1(\Omega), \bar{t} \in (t_0, t_f]\}$, espaço de Sobolev com funções dependentes do tempo, para um \bar{t} fixo;
- $\mathcal{V}_0(\Omega) = \{c \in H^1(\Omega); v = 0 \in \partial\Omega\}$, espaço das funções de teste;
- $\mathcal{V}_0(\Omega, (t_0, t_f]) = \{c \in H^1(\Omega, (t_0, t_f]); v = 0 \in \partial\Omega\}$, espaço das funções de teste dependentes do tempo.

Para simplificar a escrita vamos utilizar as seguintes notações, para $f, g \in H^1(\Omega)$:

- $(f|g) = \int \int_{\Omega} f(x, y)g(x, y)d\mu,$

- $(\nabla f | \nabla g) = \int \int_{\Omega} \nabla f \nabla g d\mu,$
- $\langle f | g \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} f(x, y)g(x, y)d\mu.$

Agora, multiplicamos as equações de (2.7) pela função de teste $v \in \mathcal{V}_0(\Omega)$ e integramos em $(x, y) \in \Omega$, para obter formalmente a formulação variacional do problema:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \Big| v \right) - \alpha(\Delta C | v) + (\mathbb{V} \cdot \nabla C | v) + \mu(C | v) = (f | v), \quad (2.8)$$

sendo a integral no sentido de Lebesgue (para mais detalhes (ver: Bartle, 1995)).

Para o segundo termo na primeira equação de (2.7), pode ser escrita utilizando o Teorema de Green como segue:

$$\int \int_{\Omega} \alpha \Delta C v d\mu = \int \int_{\Omega} \alpha \nabla C \cdot \nabla v d\mu - \int_{\Gamma_1} \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} v d\mu - \int_{\Gamma_2} \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} v d\mu,$$

onde $\frac{\partial C}{\partial \eta}$ referem-se à derivada normal exterior sobre a fronteira Ω .

Substituindo, rearranjando e aplicando as condições de contorno pertinentes, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C}{\partial t} \Big| v \right) + \alpha(\nabla C | \nabla v) + k_1 \langle C | v \rangle_{\Gamma_1} + k_2 \langle C | v \rangle_{\Gamma_2} + v_1 \left(\frac{\partial C}{\partial x} \Big| v \right) \\ + v_2 \left(\frac{\partial C}{\partial y} \Big| v \right) + \mu(C | v) = (f | v), \end{aligned} \quad (2.9)$$

para todo $v \in \mathcal{V}_0(\Omega)$. Assim, a formulação variacional consiste em encontrar $C(x, y, t) \in \mathcal{V}_0(\Omega, (t_0, t_f])$, solução do sistema acima, desse modo $\mathcal{V}_0(\Omega, (t_0, t_f])$ é o espaço das funções admissíveis e $\mathcal{V}_0(\Omega)$ é o espaço das funções de teste.

Para as discretizações espaciais e temporais (ver: Wolmuth, 2009).

3. Equações de Navier-Stokes

A fim de melhorar as simulações e obtermos resultados mais realistas, serão utilizadas as Equações de Navier-Stokes (3.10) e (3.11) para obter a circulação superficial V_a .

Para o caso em que o fluido é considerado num meio homogêneo incompressível (a massa específica não varia durante o seu movimento) e as propriedades de transporte são constantes, as equações matemáticas das leis físicas de conservação são as equações de Navier-Stokes e continuidade, dadas por:

$$\frac{\partial \mathbb{V}_a}{\partial t} + (\mathbb{V}_a \cdot \nabla) \mathbb{V}_a + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbb{V}_a = f \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{V}_a = 0, \quad (3.11)$$

onde p é a pressão, \mathbb{V}_a é o vetor velocidade, ρ e μ são a densidade e a viscosidade dinâmica do fluido respectivamente, e f é o corpo de forças externas por unidade de massa. Esta formulação baseada na velocidade e a pressão é também conhecida como formulação mista.

As equações de Navier-Stokes são não-lineares, devido ao termo inercial. Para os casos com fluxos de pequena velocidade e/ou fluidos altamente viscosos, este termo é desprezível em comparação com o termo viscoso e é considerado nulo. O conjunto de equações resultante é linear e são chamadas Equações de Stokes.

3.1. Condições de Contorno

As equações (3.10) e (3.11) devem ser apoiadas por condições iniciais e de contorno. A distribuição de velocidade deve ser fornecida como uma condição inicial. Condições de contorno podem ser de três tipos:

- Entrada de fluido: A partir do conhecimento da velocidade da água na entrada do meio aquático a ser estudado, prescreveremos uma condição de Dirichlet não homogênea:

$$V|_{\Gamma_1} = V_0,$$

- Saída do fluido: considera-se que não há variação da velocidade na direção normal ao contorno, de forma que

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_2} = 0,$$

onde η é o vetor unitário exterior ao contorno Γ_2 .

- Contorno rígido: considera-se **No-slip (sem escorregamento)**, o fluido possui velocidade nula no contorno, isto é,

$$V|_{\Gamma_3} = 0,$$

3.2. Técnicas de Estabilização - SUPG

Os desenvolvimentos dos métodos numéricos têm sido motivado na tentativa de poder simular fenômenos complexos. As equações diferenciais parciais são usadas na modelagem de fenômenos físicos, naturais, como por exemplo a equação clássica de Difusão-Advecção que é bem sucedida na modelagem de problemas de dispersão de poluentes. Os métodos de diferenças finitas e elementos finitos são os mais usados para obter a solução numérica deste tipo de equações.

Problemas de instabilidade numérica, apresentam-se quando o termo advectivo é grande comparado com o termo difusivo, uma possibilidade para evitar as oscilações causadas pela instabilidade é o refinamento da malha, o que aumenta as dimensões do sistema a ser resolvido e que finalmente termina sendo caro computacionalmente (Rubianes et al., 2015).

Os Métodos Upwind, são uma boa ferramenta para enfrentar este tipo de problemas, na literatura pode-se encontrar entre os mais usados, Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG) e Galerkin Mínimos Quadrados (GLS) (Donea e Huerta, 2003). O método de estabilização utilizado nesse trabalho para a modelagem da dispersão de poluentes é o SUPG, para mais detalhes (ver: Rubianes, 2015).

4. Simulações

O campo de velocidades do vento e sua importância no transporte do poluente foi considerado constante em relação ao tempo e ao espaço. Para tornar nossos resultados mais realistas, procurou-se dados de artigos e teses que disponibilizassem as direções e intensidades dos ventos mais frequentes na baía.

Foi considerada uma fonte poluidora na baía localizada no setor da ponte El Pinal (ver Figura 1). Não foi considerada poluição inicial.

Na Tabela 1 apresentamos os valores para os parâmetros do modelo 2.7. Alguns destes valores foram tomados de Cajas et al. (2015), onde para a condição de fronteira de Robin, consideramos perda de poluente nas margens, no caso de solos moles como argila, limos tomamos como constante de proporcionalidade de perda k_1 e nos solos de areia tomamos k_2 e as fronteiras que apresentam falésias rochosas tomamos $k = 0$.

Tabela 1: Valores dos parâmetros utilizados nas simulações

Parâmetros	Valores	Unidades
f	15	$mg\ l^{-1}h^{-1}$
μ	0,0001	h^{-1}
α	0,026	$km^2\ h^{-1}$
$k_1 = 1,5 \times 10^{-4}$	0,01	$uc\ h^{-1}$
$k_2 = 2,5 \times 10^{-5}$	0,01	$uc\ h^{-1}$

4.1. Circulação Superficial da Baía de Buenaventura

Apresentamos alguns cenários de simulações resultantes da implementação computacional do modelo, os algoritmos foram programados no ambiente Matlab.

Como foi descrito na Introdução, o domínio das simulações será num meio aquático real, neste caso a baía de Buenaventura. Para isso, primeiro geramos a malha do domínio mediante o software livre chamado de Gmsh (gerador de malhas de Elementos Finitos em duas e três dimensões), que permite a ligação com outros geradores de malha específicos. Ele contém 4 módulos: para descrição geométrica, entrosamento, resolução e pós-processamento.

É importante ressaltar que a ferramenta que construímos pode ser utilizada para qualquer tipo de domínio uma vez que esse software nos dá as informações necessárias para a implementação e simulação.

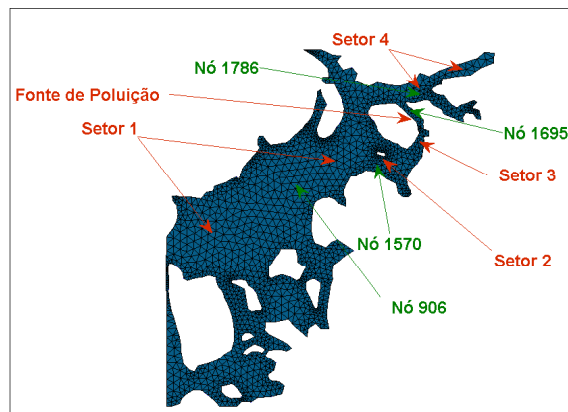


Figura 1: (a) Malha das simulações.

Para melhor análise dos resultados dividimos o domínio em quatro setores como mostra a Figura 1, também apresenta-se a malha de elementos finitos triangulares do domínio de estudo, obtida pelo software Gmsh e uma única fonte poluidora.

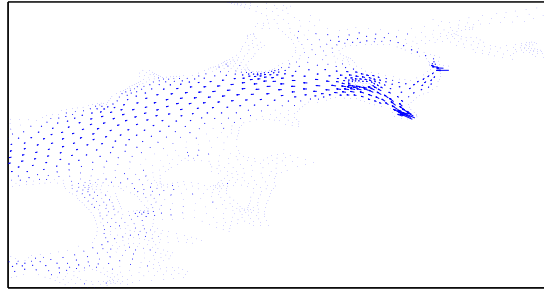


Figura 2: Setas indicando a direção da circulação superficial da baía influenciada pela entrada dos rios.

Na Figura 2, pode-se observar as setas do campo de velocidades da baía de Buenaventura obtidas pela resolução numérica das equações de Navier-Stokes.

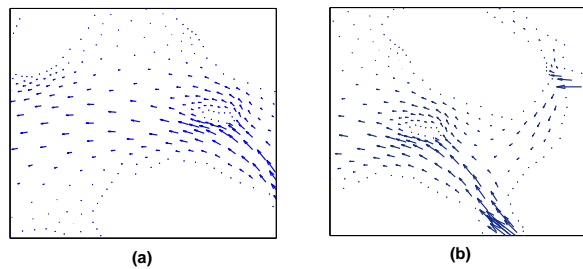


Figura 3: (a) Setas da circulação superficial do Setor 2 da baía. (b) Setas da circulação superficial do Setor 3 da baía.

As Figuras 2(a) e 2(b) apresentam um zoom dos setores 2 e 3 descritos na Figura 1. Pode-se observar de maneira mais detalhada as setas e direção da circulação superficial.

4.2. Cenário 1: Simulações com vento sudoeste

Neste cenário consideramos o vento sudoeste, que é o vento predominante na região da baía com velocidade média superficial de $0,216 \text{ km/h}$. Foram realizadas duas simulações, na primeira considerou-se como campo de velocidades só o vento predominante, já na segunda simulação, além do vento predominante sudoeste, consideramos a circulação superficial da baía.

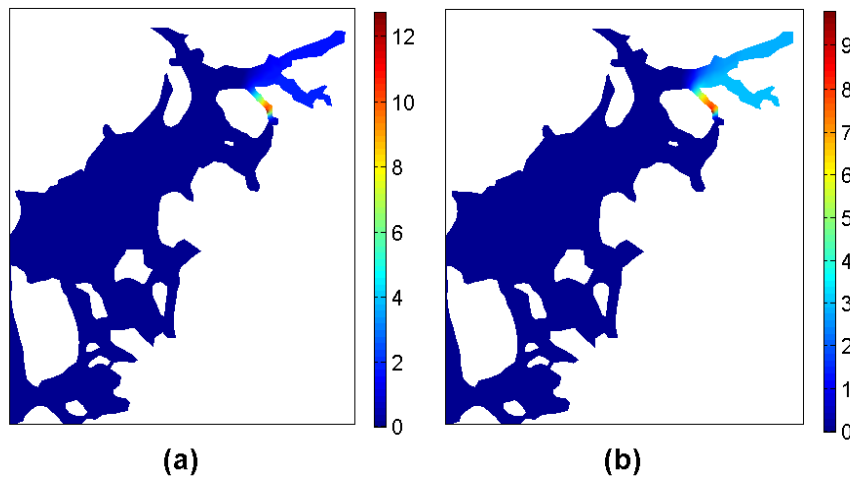


Figura 4: Concentração do poluente após 15 dias de simulação, considerando o vento sudoeste. (a) Sem a circulação superficial. (b) Com a circulação superficial.

A Figura 4(a), mostra o efeito do vento sudoeste na concentração do poluente após 15 dias de simulação, onde tem-se espalhado o poluente ao longo do setor 4 da baía, nesta simulação pode se observar uma maior concentração de poluente em torno da fonte em relação à simulação na Figura 4(b), onde a

dinâmica das águas, dada pela circulação superficial e o vento como foi ilustrado na Figura 3 influenciou na concentração, mas com uma maior concentração do poluente no setor 4.

A seguir, apresentamos as informações ao longo do tempo da evolução da concentração do poluente em quatro nós da malha cuja localização é descrita na Figura 1.

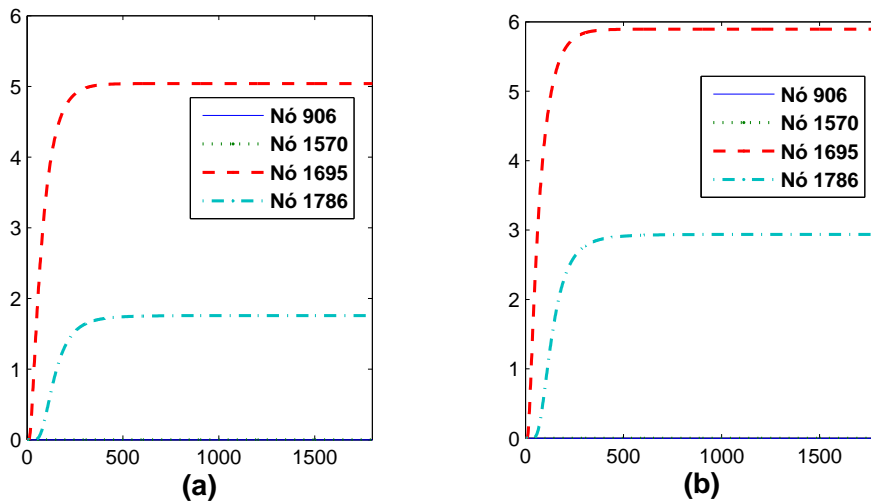


Figura 5: Comportamento Evolutivo do Poluente, considerando o vento sudoeste. (a) Sem a circulação superficial. (b) Com a circulação superficial.

Nas Figuras 5(a) e 5(b), apresenta-se o comportamento ao longo do tempo de quatro nós escolhidos da malha da discretização do domínio, onde pode-se observar a evolução do poluente. Em ambas as Figuras, nos nós 1695 e 1786, a concentração do poluente atinge um nível assintótico nas primeiras iterações. Já no nó 906 e no nó 1570 o vento predominante evita a chegada do poluente nesses setores.

Nota-se uma maior concentração do poluente na Figura 5(b), isto deve-se ao transporte do poluente influenciado pela circulação superficial da baía, o que permite um maior transporte do poluente pelos setores 3 e 4, isto pode ser

percebido nos nós 1695 e 1786.

4.3 Cenário 2: Simulações com vento leste

Neste cenário consideramos o vento leste com velocidade média superficial de $0,216 \text{ km/h}$. Similar ao Cenário 1, foram realizadas duas simulações, na primeira considerou-se como campo de velocidades só o vento leste e, na segunda simulação, além do vento leste, consideramos a circulação superficial da baía.

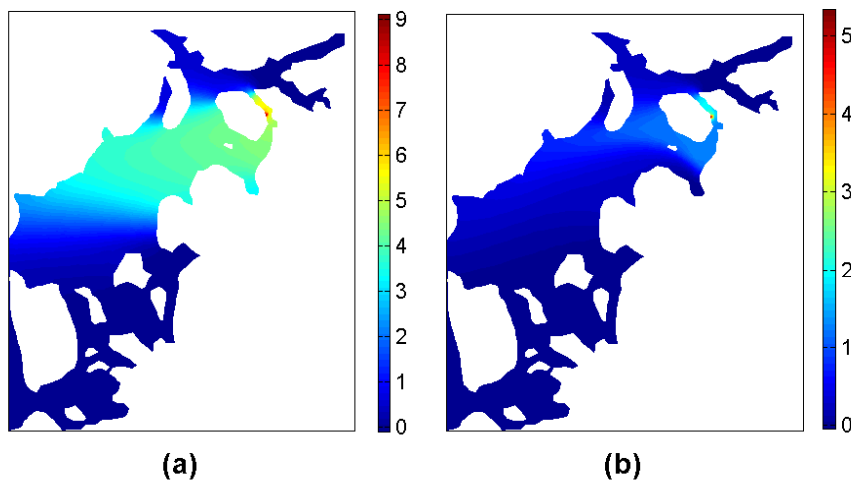


Figura 6: Concentração do poluente após 15 dias de simulação, considerando o vento leste. (a) Sem a circulação superficial. (b) Com a circulação superficial.

Na Figura 6(a) observa-se o espalhamento do poluente em grande parte da baía, assim, o vento leste permite que o poluente atinja os setores 1,2 e 3.

Na Figura 6(b), diferente da simulação sem circulação superficial, o poluente atingiu com uma concentração de poluente significativa o setor 3 e parte do setor 2. Nesta simulação, o efeito de considerar a circulação superficial influenciada pela entrada dos rios na baía, evitou o acúmulo de poluente no setor 1 e em parte do setor 2 onde a concentração do poluente é menor comparado

com a Figura 6(a). É importante ressaltar que a concentração do poluente em torno da fonte é também menor.

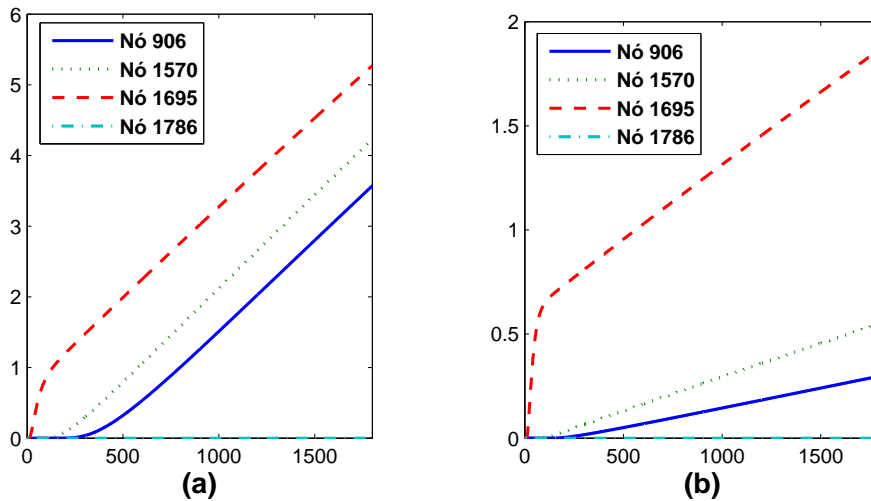


Figura 7: Comportamento Evolutivo do Poluente, considerando o vento leste. (a) Sem a circulação superficial. (b) Com a circulação superficial.

Nos nós 906 e 1570, na Figura 7(b) percebe-se uma menor concentração do poluente comparado com a Figura 7(a), isto era esperado pois a circulação superficial da baía tem um papel importante transportando o poluente e evitando o acúmulo de altas concentrações nesses setores da baía.

Para o nó 1695 perto da fonte de poluição, na simulação com circulação superficial Figura 7(b), observa-se uma menor concentração do poluente o que também era esperado devido ao maior transporte do campo de velocidades nesse setor.

Finalmente, no nó 1786 localizado no setor 4 da baía, o vento leste e a circulação superficial impedem a chegada do poluente nesse nó.

4.4. Cenário 3: Calmaria

Neste Cenário consideramos total ausência de ventos: Calmaria, que ocorre quando não é possível perceber a movimentação do ar, assim, só será considerada a circulação superficial da baía.

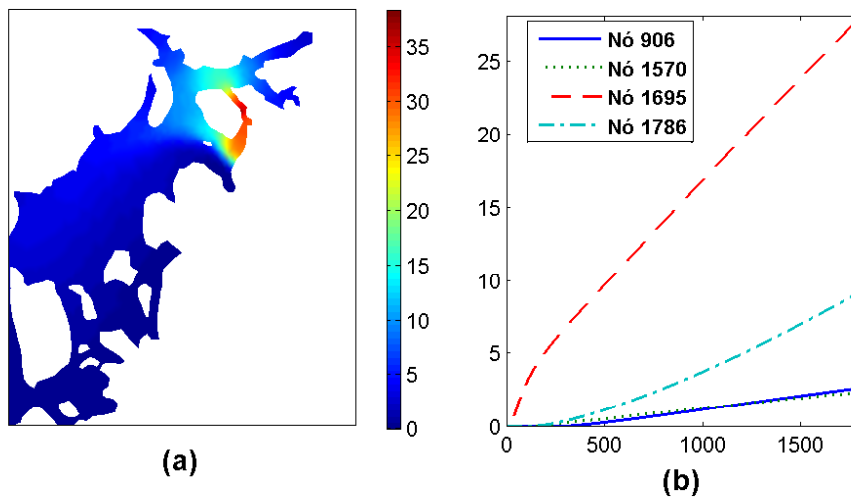


Figura 8: Concentração do poluente após 15 dias de simulação. (a) Considerando a circulação superficial sem vento. (b) Comportamento Evolutivo do Poluente.

Na Figura 8(b), nos nós 906 e 1570, observa-se a chegada do poluente nas primeiras iterações da simulação, o que deve-se ao transporte deste pela circulação superficial da baía, porém, com uma baixa concentração.

Para o nó 1786 localizado no setor 4 da baía, o poluente atinge este nó nas primeiras iterações obtendo uma concentração maior comparado com a Figura 5, fato relacionado pela ausência de campo de velocidades no setor 4. Finalmente, no nó 1695 localizado perto da fonte de poluição, o poluente atingiu sua concentração mais alta comparado com os Cenário 1 e 2. A circulação superficial neste setor é fraca o que permite um maior acúmulo de poluente.

5. Conclusões

A conjunção do modelo matemático, o tratamento numérico do modelo, implementação e simulação nos forneceram uma melhor interpretação do fenômeno e o comportamento evolutivo da dispersão de poluentes, com representações gráficas de fácil leitura.

Conseguimos obter a circulação superficial da baía de Buenaventura a partir da resolução numérica das Equações de Navier-Stokes e incorporá-las no modelo de Difusão- Adveção levando em consideração as características geográficas do domínio.

As simulações nos permitiram visualizar como a circulação superficial influencia significativamente no transporte e na concentração do poluente.

Existem outros fatores característicos do domínio de estudo que acreditamos influenciam na dispersão y concentração de poluentes, tais como a maré (maré alta e maré baixa) o qual também pode ser incorporado utilizando as Equações de Navier-Stokes assim trabalhos futuros podem nos permitir o estudo de outros cenários.

O uso da técnica SUPG, permitiu uma maior liberdade em relação ao coeficiente de difusão do poluente, ou seja, foi possível trabalhar com valores pequenos, mais próximos da realidade.

Referências

- Bartle, R. G. (1995). *The Elements of integration and Lebesgue Measure*, volume 1 ed. Wiley-Interscience.
- Cajas, D., Rubianes, J. C., e Meyer, J. F. C. A. (2015). Método de diferenças finitas para a modelagem e simulação da dispersão de poluentes em meios aquáticos. *Biomatemática*, 25:45–58.
- Cantrell, R. S. e Cosner, C. (2003). *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. Wiley.
- Donea, J. e Huerta, A. (2003). *Finite Element Methods for Flow Problems*, volume 396. John Wiley and Sons.
- Gockenbach, M. S. (2006). *Understanding and Implementing the Finite Element Method*. Siam.

- LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*, volume 98. Siam, S.Paulo.
- Miyaoka, T. Y. (2015). Impacto Ambiental e Populações que Interagem: Uma Modelagem Inovadora, Aproximação e Simulações Computacionais. Master's thesis, IMECC–Unicamp, Campinas/SP, Brazil.
- Okubo, A. e Levin, S. A. (1980). *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*. Springer.
- Oliveira, R. F. (2003). *O Comportamento Evolutivo de Uma Mancha de óleo na Baía de Ilha Grande, RJ: Modelagem, Análise Numérica e Simulações*. Tese de Doutorado, IMEEC–Unicamp, Campinas/SP. PhD thesis, IMECC–Unicamp, Campinas/SP, Brazil.
- Prestes, M. F. B., Meyer, J. F. C. A., e Poletti, E. C. C. (2013). Dispersão de material impactante em meio aquático: modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional - reservatório do salto grande, Americana/SP. *Biomatemática*, 23:43–56.
- Rubianes, J. C. (2015). *Modelagem Matemática e Simulação Computacional da Influência de Poluentes e da Velocidade de Corrente na Dinâmica Populacional de Macrófitas Aquáticas*. PhD thesis, IMECC–Unicamp, Campinas/SP, Brazil.
- Rubianes, J. C., Cajas, D., Meyer, J. F. C. A., e Rubianes, J. A. I. (2015). Esquema scharfetter-gummel e sua aplicação na modelagem da dispersão agrotóxicos no lago titicaca. *Biomatemática*, 25:59–74.
- Wolmuth, L. D. (2009). Modelagem e simulações do comportamento evolutivo de poluentes em corpos aquáticos de grande extensão: o caso da represa do rio manso. Master's thesis, IMECC–Unicamp, Campinas/SP, Brazil.

