

# Mortalidad de salmones por florecimiento de microalgas. Estudio matemático de un problema ecológico

Daniel Sánchez Ibáñez,<sup>1</sup> João F. C. A. Meyer<sup>2</sup>  
DMA, IMECC, Unicamp, 13.083-859 - Campinas/SP.

Alejandro Rojas-Palma<sup>3</sup>  
Depto. Matemática, Física y Estadística, Universidad Católica del Maule,  
Talca/Chile.

**Resumen.** Es presentado un modelo matemático representativo de la variación temporal en el crecimiento poblacional y la contaminación producida debido a la interacción entre dos especies: salmones y microalgas. Un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias es establecido. Además de caracterizar diferentes formas de contaminación asociada a la interacción, las ecuaciones utilizadas incluyen términos de crecimiento logístico en ambas especies, una respuesta funcional sigmoide (para microalgas) y un coeficiente “ $\gamma$ ” que interpreta la influencia de corrientes marinas (por temperatura y flujo) en el florecimiento de microalgas. Desde caracterizar un problema ecológico, realizamos un análisis cualitativo para establecer la existencia y estabilidad (local) de ciertos puntos de equilibrio de interés. Además, fue establecido un valor crítico “ $G_0$ ” que determina la presencia endémica (o no) de las microalgas para el modelo. Finalmente, simulaciones numéricas son realizadas para obtener trayectorias dinámicas, espacios de fase y confirmar propiedades de estabilidad.

**Palabras-clave:** *Ecología matemática; Dinámica poblacional; Sistemas no-lineales; Estabilidad local.*

---

<sup>1</sup>daniel@ime.unicamp.br

<sup>2</sup>joni@ime.unicamp.br

<sup>3</sup>arojaspalma@gmail.com

## 1. Introducción

Procesos de cultivo de salmones (acuicultura) generan contaminación del hábitat acuático natural donde se establece la producción, aumentando la materia orgánica y nutrientes favorables para el florecimiento (crecimiento acelerado, o *bloom*) de microalgas por *eutrofización* (Heisler et al., 2008), las cuales son perjudiciales para los salmones, provocándoles asfixia y, consecuentemente, la muerte (ProMED-mail, 2016). Contaminación asociada al material orgánico en descomposición y emisión de ácido sulfhídrico debido a una masiva muerte de salmones generan un problema ecológico, de gran impacto ambiental y económico (AQUA-news, 2016), que puede ser abordado y representado a través de un modelo matemático (Sánchez et al., 2017).

Así, nuestro objetivo es, en sección (2), caracterizar un modelo matemático, representativo de este problema ecológico, junto a sus términos y coeficientes utilizados. Luego, en sección (3), tratar analíticamente la existencia y estabilidad (local) de puntos de equilibrio de interés para, posteriormente en sección (4), comprobar visualmente representaciones del modelo y verificar estabilidad a través de simulaciones numéricas computacionales.

## 2. Modelo matemático

Consideremos un modelo clásico de variación temporal de tres compartimentos (Edelstein-Keshet, 2005), que contempla la interacción de salmones ( $S$ ) y microalgas ( $A$ ), más la contaminación ( $P$ ) asociada a tal proceso, representado por el siguiente sistema, no lineal, de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= c_1S \left(1 - \frac{S}{k_1}\right) - c_2S \left(\frac{A^2}{b + A^2}\right) - c_3SP \\ \frac{dA}{dt} &= c_4A \left(1 - \frac{A}{k_2}\right) - \gamma AP \\ \frac{dP}{dt} &= c_6S + c_7SA + \rho_0c_3SP - c_8PA - c_9P\end{aligned}\tag{2.1}$$

La especie de salmones es caracterizada, en primera ecuación de (2.1), desde considerar su crecimiento no natural, debido al cultivo humano, donde el primer término representa su crecimiento logístico, el segundo corresponde a la muerte de salmones debido al encuentro con microalgas a través de una respuesta funcional *sigmóide* (Miyaoaka e Meyer, 2015; Rojas-Palma e González-

Olivares, 2012) y el tercer término establece el daño, para los salmones, debido a la contaminación de su hábitat artificial.

La especie de microalgas es caracterizada, en segunda ecuación de (2.1), considerando su crecimiento natural, asociado a condiciones ambientales favorables de luminosidad incidente, temperatura y cantidad de nutrientes en el agua (Heisler et al., 2008), donde el primer término representa su crecimiento logístico y el segundo su decrecimiento debido a la dispersión y limpieza (de microalgas y nutrientes) por flujo y por temperatura de corrientes marinas.

La contaminación es caracterizada, en tercera ecuación de (2.1), considerando al primer, segundo y tercer término como favorables en su aumento debido a residuos de los criaderos de salmones (como exceso de nutrientes por alimentación, desechos de los peces y uso de antibióticos y químicos), por mortalidad de salmones en el encuentro con microalgas y por la contaminación del hábitat, respectivamente. Luego, el cuarto y el quinto término establecen un decaimiento de la contaminación, por absorción (de nutrientes) por microalgas y por limpieza natural (por corrientes marinas), respectivamente.

### 3. Análisis

Puntos de equilibrio (Edelstein-Keshet, 2005) son obtenidos a partir de (2.1), al considerar una variación temporal nula en la dinámica de crecimiento de las especies ( $\frac{dS}{dt} = \frac{dA}{dt} = 0$ ) y contaminación asociada ( $\frac{dP}{dt} = 0$ ), esto es, resolver (para  $S$ ,  $A$  e  $P$ ) el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} 0 &= S \left[ c_1 \left( 1 - \frac{S}{k_1} \right) - c_2 \left( \frac{A^2}{b + A^2} \right) - c_3 P \right] \\ 0 &= A \left[ c_4 \left( 1 - \frac{A}{k_2} \right) - \gamma P \right] \\ 0 &= S [c_6 + c_7 A] + P [\rho_0 c_3 S - c_8 A - c_9] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Luego, análisis de estabilidad (local) del sistema (2.1), en puntos de equilibrio obtenidos en (3.2), son realizados utilizando el método de linealización y el criterio de Routh-Hurwitz como comprobación (Edelstein-Keshet, 2005; Rubio, 2017).

Así, la matriz Jacobiana ( $J_E = J(E)$ ) del sistema (2.1), evaluada en un

punto de equilibrio  $E = (\bar{S}, \bar{A}, \bar{P})$ , es calculada y dada por:

$$J_E = \begin{bmatrix} c_1 - \frac{2c_1\bar{S}}{k_1} - \frac{c_2\bar{A}^2}{b + \bar{A}^2} - c_3\bar{P} & -\frac{2c_2\bar{S}\bar{A}b}{(b + \bar{A}^2)^2} & -c_3\bar{S} \\ 0 & c_4 - \frac{2c_4\bar{A}}{k_2} - \gamma\bar{P} & -\gamma\bar{A} \\ c_6 + c_7\bar{A} + \rho_0c_3\bar{P} & c_7\bar{S} - c_8\bar{P} & \rho_0c_3\bar{S} - c_8\bar{A} - c_9 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Consecuentemente, para que un punto de equilibrio  $E$  sea asintóticamente estable en (2.1) toda parte real de los autovalores de la matriz Jacobiana (3.3) deben ser negativos, esto es,  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . De forma equivalente, el punto de equilibrio  $E$  será asintóticamente estable en (2.1) si toda parte real de las raíces del polinomio característico dado por  $\Lambda(\lambda) = \det(J_E - \lambda I)$  sean negativas, esto es, desde  $\Lambda(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$  se debe satisfacer  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$  y  $a_1a_2 - a_3 > 0$ , o bien, si  $\Lambda(\lambda) = (k - \lambda)(\lambda^2 + \tilde{a}_1\lambda + \tilde{a}_2)$  se debe comprobar  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in \mathbb{R}^+$  (Edelstein-Keshet, 2005; Rubio, 2017).

Para el análisis matemático (cualitativo) del modelo, consideramos a todos los coeficientes (parámetros) del sistema (2.1) como números constantes positivos, esto es,  $c_1, k_1, c_2, b, c_3, c_4, k_2, \gamma, c_6, c_7, \rho_0, c_8$  e  $c_9 \in \mathbb{R}^+$ .

Así, considerando la naturaleza de los coeficientes, son presentadas (en tabla (1)) condiciones sobre los parámetros para existencia de puntos de equilibrio y estabilidad asociada (comportamiento cualitativo).

Tabla 1: Condiciones sobre los parámetros para existencia y estabilidad.

Punto de Equilibrio	Existencia (Condición)	Comportamiento Cualitativo (Condición)
$(0, 0, 0)$	Si (trivial)	inestable (ver en 3.1)
$(\bar{S}, 0, 0)$	No ( $\nexists$ solución)	—
$(0, \bar{A}, 0)$	Si ( $\bar{A} = k_2$ )	estable (si $c_1 < \frac{c_2\bar{A}^2}{b + \bar{A}^2}$ )
$(0, 0, \bar{P})$	No ( $\bar{P} = 0$ )	—
$(0, \bar{A}, \bar{P})$	Si ( $\bar{A} = \frac{-c_9}{c_8} < 0$ )	inestable ( $\tilde{a}_1 = \frac{c_4\bar{A}}{k_2} < 0$ )
$(\bar{S}, \bar{A}, 0)$	No ( $\nexists$ solución)	—
$(\bar{S}, 0, \bar{P})$	Si ( $\bar{S} = \bar{S}_1, \bar{P} = \bar{P}_1$ )	estable (ver en 3.2)
$(\bar{S}, \bar{A}, \bar{P})$	Si ( $\bar{S} = \bar{S}_2, \bar{A} = \bar{A}_2, \bar{P} = \bar{P}_2$ )	estable (ver en 3.3)

Observamos, desde tabla (1), que no es posible (matemáticamente) la existencia de puntos de equilibrio de forma  $(\bar{S}, 0, 0)$  y  $(\bar{S}, \bar{A}, 0)$ , como también

para  $(0, 0, \bar{P})$  si se desea  $P \neq 0$ .

Además, vemos que el punto de equilibrio  $(0, \bar{A}, \bar{P})$  existe matemáticamente, pero no es viable en sentido biológico (ya que representaría una población negativa de microalgas) y es inestable según el Criterio de Routh-Hurwitz.

También, el punto de equilibrio  $(0, \bar{A}, 0)$  existe para  $\bar{A} = k_2$  (límite máximo de la capacidad de soporte para microalgas) y es estable (autovalores negativos) si se cumple la condición sobre los parámetros presentada. Luego, el primer punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  será analizado en sección (3.1).

Finalmente, los dos últimos puntos de equilibrio  $(\bar{S}, 0, \bar{P})$  y  $(\bar{S}, \bar{A}, \bar{P})$  representarán dos escenarios posibles, sin y con presencia de microalgas en el modelo, y serán analizados en secciones (3.2) y (3.3), respectivamente.

### 3.1. Equilibrio y estabilidad para $E_0 = (0, 0, 0)$

La existencia de un punto de equilibrio  $E_0$  (trivial) es inherente al sistema (3.2). Su comportamiento cualitativo es inestable, considerando la naturaleza de los coeficientes, desde observar a partir de la matriz Jacobiana  $J(E_0) = J_{E_0}$ ,

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 \\ c_6 & 0 & -c_9 \end{bmatrix},$$

que su polinomio característico  $\Lambda_0(\lambda) = (c_1 - \lambda)(c_4 - \lambda)(-c_9 - \lambda)$  determina dos raíces reales negativas y una positiva.

Sin embargo, en forma bidimensional, puntos de equilibrio de tipo *silla* relacionan la contaminación asociada junto con la población de salmones o la población de microalgas, como también, un punto de equilibrio de tipo *repulsor* relaciona a las dos especies en proximidades del punto de origen  $(0, 0)$ .

Simulaciones numéricas del modelo (2.1) para este punto de equilibrio  $E_0$ , evidenciando los comportamientos cualitativos mencionados, son presentadas en sección (4).

### 3.2. Equilibrio y estabilidad para $E_1 = (\bar{S}_1, 0, \bar{P}_1)$

Para el primer escenario de interacción, fue posible determinar analíticamente dos condiciones de existencia para puntos de equilibrio de la forma  $E_1$ , esto es, sin presencia de microalgas en el modelo.

Así, a partir de (3.2) y considerando  $\bar{A}_1 = 0$ , encontramos soluciones analíticas para  $\bar{S}_1 \neq 0$  y  $\bar{P}_1 \neq 0$  resolviendo el sistema homogéneo simplificado:

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{k_1}\right) - c_3 \bar{P}_1 \\ 0 &= c_6 \bar{S}_1 + \bar{P}_1 [\rho_0 c_3 \bar{S}_1 - c_9] \end{aligned} \quad (3.4)$$

La primera condición de existencia (sobre los parámetros) fue establecer como necesario que la solución para

$$\bar{S}_1 = \frac{\left(c_6 + \rho_0 c_1 + \frac{c_1 c_9}{c_3 k_1}\right) \pm \sqrt{\left(c_6 + \rho_0 c_1 + \frac{c_1 c_9}{c_3 k_1}\right)^2 - \frac{4 \rho_0 c_1^2 c_9}{k_1 c_3}}}{\frac{2 \rho_0 c_1}{k_1}}, \quad (3.5)$$

obtenida a partir de (3.4), sea un número real positivo, esto es, para que  $\bar{S}_1 \in \mathbb{R}^+$ , se debe satisfacer:

$$\left(c_6 + \rho_0 c_1 + \frac{c_1 c_9}{c_3 k_1}\right)^2 \geq \frac{4 \rho_0 c_1^2 c_9}{k_1 c_3}. \quad (3.6)$$

La segunda condición de existencia (sobre los parámetros) fue establecer como necesario que la solución para

$$\bar{P}_1 = \frac{c_1}{c_3} \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{k_1}\right), \quad (3.7)$$

obtenida a partir de (3.4), sea (también) un número real positivo, esto es, para que  $\bar{P}_1 \in \mathbb{R}^+$ , se debe satisfacer:

$$\bar{S}_1 \leq k_1. \quad (3.8)$$

Así, ambas condiciones (3.6 y 3.8) son compatibles matemática y biológicamente según el modelo representado y soluciones para un punto de equilibrio de forma  $E_1 = (\bar{S}_1, 0, \bar{P}_1)$  son determinadas analíticamente (3.5 y 3.7).

A continuación, es obtenida la matriz Jacobiana evaluada en el punto de equilibrio  $E_1$ , a partir de (3.3) y simplificada considerando (3.4), dada por:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -\frac{c_1 \bar{S}_1}{k_1} & 0 & -c_3 \bar{S}_1 \\ 0 & c_4 - \gamma \bar{P}_1 & 0 \\ c_6 + \rho_0 c_3 \bar{P}_1 & c_7 \bar{S}_1 - c_8 \bar{P}_1 & \rho_0 c_3 \bar{S}_1 - c_9 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Luego, el polinomio característico, correspondiente a (3.9), es:

$$\Lambda_1(\lambda) = (J_{11} - \lambda) [(J_{22} - \lambda)(J_{33} - \lambda)] - J_{13} [J_{31} (J_{22} - \lambda)]. \quad (3.10)$$

Como  $\Lambda_1(\lambda) = (J_{22} - \lambda) Q(\lambda)$ , vemos que una raíz de (3.10) es  $J_{22} = \lambda_1 = c_4 - \gamma \bar{P}_1$ .

Así, una primera condición necesaria para estabilidad de  $E_1$  será que  $\lambda_1 < 0$ , lo cual implica en que:

$$\bar{P}_1 > \frac{c_4}{\gamma}. \quad (3.11)$$

Luego, tenemos que:

$$Q(\lambda) = (J_{11} - \lambda)(J_{33} - \lambda) - J_{13}J_{31} = \lambda^2 + \underbrace{(-J_{11} - J_{33})}_{a_1} \lambda + \underbrace{(J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31})}_{a_2}.$$

Para comprobar estabilidad (local) del punto  $E_1$ , por el criterio de Routh-Hurwitz es necesario satisfacer en el polinomio  $Q(\lambda)$  que los valores  $a_1 > 0$  y  $a_2 > 0$ . Considerando (3.4) verificamos que:

$$\begin{aligned} a_1 &= -J_{11} - J_{33} = -\left(\frac{-c_1 \bar{S}_1}{k_1}\right) - (\rho_0 c_3 \bar{S}_1 - c_9) \\ &= \frac{c_1 \bar{S}_1}{k_1} - \left(\frac{-c_6 \bar{S}_1}{\bar{P}_1}\right) = \frac{c_1 \bar{S}_1}{k_1} + \frac{c_6 \bar{S}_1}{\bar{P}_1} \Rightarrow a_1 > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} = \left(\frac{-c_1 \bar{S}_1}{k_1}\right) (\rho_0 c_3 \bar{S}_1 - c_9) - (-c_3 \bar{S}_1) (c_6 + \rho_0 c_3 \bar{P}_1) \\ &= \frac{c_1 \bar{S}_1}{k_1} \frac{c_6 \bar{S}_1}{\bar{P}_1} + (c_3 \bar{S}_1) (c_6 + \rho_0 c_3 \bar{P}_1) \Rightarrow a_2 > 0. \end{aligned}$$

Una vez que las condiciones para estabilidad  $a_1 > 0$  y  $a_2 > 0$  son satisfechas por la naturaleza de los coeficientes del modelo, resta solo satisfacer la condición (3.11) para probar y garantizar que el punto de equilibrio  $E_1 = (\bar{S}_1, 0, \bar{P}_1)$  sea estable (localmente).

Ahora, considerando el florecimiento de microalgas como indeseado, por impacto ambiental y económico, fue caracterizado un valor crítico que establece el umbral hasta donde el punto  $E_1$  es considerado estable. Similar a modelos epidemiológicos (Edelstein-Keshet, 2005; Rubio, 2017), podemos interpretar este valor crítico  $G_0$  como una tasa reproductiva intrínseca de las microalgas, determinado a partir de (3.11) como:

$$\bar{P}_1 > \frac{c_4}{\gamma} \Rightarrow \gamma \bar{P}_1 \left(1 - \frac{c_4}{\gamma \bar{P}_1}\right) = \gamma \bar{P}_1 (1 - G_0) > 0 \Rightarrow G_0 < 1. \quad (3.12)$$

Así, dadas condiciones iniciales, establecemos desde (3.12) que si  $G_0 < 1$ , el sistema (2.1) representativo del modelo en estudio, se estabilizará en el punto de equilibrio  $E_1$  para  $t \rightarrow \infty$ , esto es, las microalgas van (matemáticamente) para la *extinción*. En caso contrario, si  $G_0 > 1$  el sistema (2.1) no se estabilizará en  $E_1$ , esto es, el modelo considerará la existencia *endémica* de microalgas.

Simulaciones numéricas del modelo (2.1) para el primer escenario, evidenciando la dinámica de microalgas (extinción o prevalencia) según el comportamiento (crítico) de  $G_0$ , son presentadas en sección (4).

### 3.3. Equilibrio y estabilidad para $E_2 = (\bar{S}_2, \bar{A}_2, \bar{P}_2)$

Para el segundo escenario, no fue posible determinar soluciones analíticas ni condiciones de existencia para puntos de equilibrio de la forma  $E_2$ , esto es, con presencia de microalgas en el modelo.

Sin embargo, considerando soluciones numéricas aproximadas para un punto de equilibrio  $E_2$ , a partir de (3.2), con sentido biológico mínimamente viable, esto es, para  $\bar{S}_2, \bar{A}_2, \bar{P}_2 \in \mathbb{R}^+$ , establecimos un polinomio característico, correspondiente a (3.3) cuando  $J(E_2)$ , dado por

$$\Lambda_2(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

en donde  $a_1 = -J_{11} - J_{22} - J_{33}$ ,  $a_2 = J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32} + J_{11}(J_{22} + J_{33}) - J_{13}J_{31}$ , y  $a_3 = J_{31}(J_{13}J_{22} + J_{12}J_{23}) - J_{11}(J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32})$ .

Luego, por el Criterio de Routh-Hurwitz, el punto de equilibrio  $E_2$  será estable si, y solamente si, los coeficientes  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$  y que  $a_1a_2 - a_3 > 0$ , o sea, son establecidas y deben ser satisfechas condiciones (sobre los parámetros) para verificar estabilidad local (Edelstein-Keshet, 2005; Rubio, 2017).

Simulaciones numéricas del modelo (2.1) para el segundo escenario, representativo de la coexistencia entre las especies y contaminación asociada, son presentadas en siguiente sección (4).

## 4. Simulación y Resultados

Para las simulaciones, fueron considerados números constantes positivos para los coeficientes (parámetros) del modelo (en tabla (2)), los cuales, básicamente, consiguen representar visualmente el fenómeno de florecimiento de microalgas y una masiva muerte de salmones asociada.



Tabla 2: Coeficientes del modelo para simulaciones.

Coeficiente	Valor	Interpretación
$c_1$	0.01/3	tasa reproducción controlada para $S$
$k_1$	100	capacidad de soporte de $S$
$c_2$	0.01/3	tasa efectiva encuentro de especies
$b$	10000	parámetro de escala
$c_3$	0.0001/3	tasa efectiva perjuicio de $S$ por $P$
$c_4$	0.1/3	tasa reproducción natural para $M$
$k_2$	100	capacidad de soporte de $M$
$c_6$	0.001/3	tasa efectiva beneficio para $P$ por $S$
$c_7$	0.001/3	tasa mortalidad de $S$ encuentro con $M$
$\rho_0$	0.1	parámetro de escala
$c_8$	0.001/3	tasa disminución $P$ por alimento de $M$
$c_9$	0.01/3	tasa limpieza por corrientes marinas

Así, a partir de lo mencionado en sección (3.1), resultados numéricos computacionales permiten corroborar visualmente el comportamiento cualitativo inestable del punto de equilibrio  $E_0$ , en Figuras 1a y 1b, que representan inestabilidad con singularidad de tipo *silla* y de tipo *repulsor*, respectivamente.

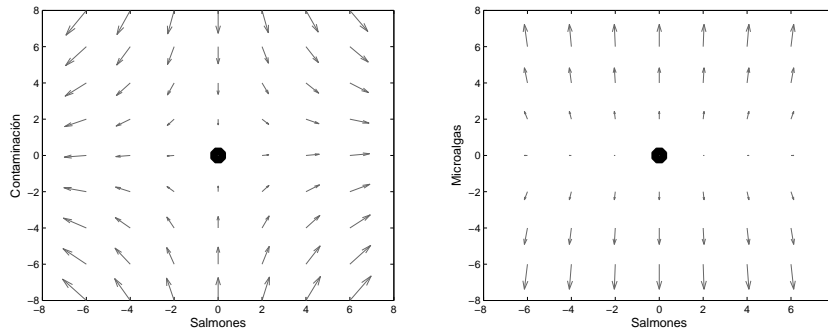


Figura 1: Simulaciones gráficas (planos de fase) del modelo (2.1) en punto de equilibrio  $E_0 = (0, 0, 0)$ , con: a) inestabilidad de tipo silla, b) inestabilidad de tipo repulsor.

Luego, para el primer escenario, resultados numéricos computacionales

permiten corroborar (mediante el comportamiento de  $G_0$ ) la estabilidad de un punto de equilibrio (sin presencia de microalgas) y visualizar situaciones (extremas) posibles en función de la variabilidad de flujo y temperatura de corrientes marinas representadas por el valor  $\gamma$ . La interpretación y valores para  $\gamma$  (asumidos) y para  $G_0$  (obtenidos) son caracterizados en tabla (3):

Tabla 3: Valores de  $\gamma$  y  $G_0$ , según flujo y temperatura de corrientes marinas.

Situación n°	Flujo	Temperatura	Interpretación de $\gamma$	valor de $\gamma$	valor de $G_0$
1	alto	baja	muy alto	0.3333	0.0101
2	bajo	baja	alto	0.0337	0.1000
3	alto	alta	bajo	0.0034	0.9898
4	bajo	alta	muy bajo	0.0003	9.7991

Ahora, con  $\gamma$  establecido, podemos visualizar (en Figuras 2a y 3a) trayectorias dinámicas de la simulación obtenida para las situaciones 3 y 4 de tabla 2, que asocian los valores críticos para estabilidad  $G_0 < 1$  y  $G_0 > 1$ , respectivamente, para el modelo (2.1) con condiciones (porcentuales) iniciales  $S(0) = 75$ ,  $A(0) = 20$  y  $P(0) = 5$ , durante tres años ( $t = 1080$  días).

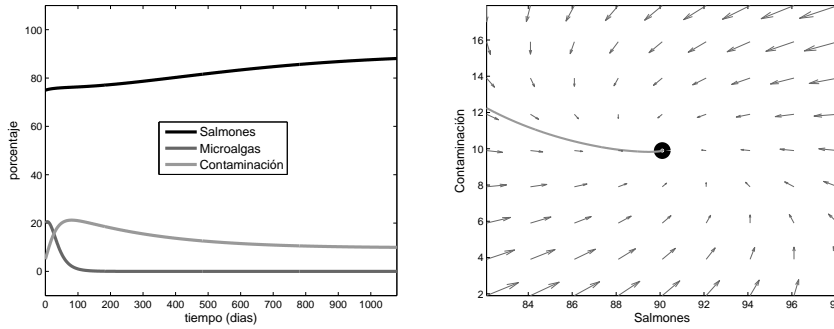


Figura 2: Simulaciones gráficas para el modelo (2.1) con  $S(0) = 75$ ,  $A(0) = 20$  y  $P(0) = 5$  para: a)  $G_0 < 1$  (microalgas tienden a extinguirse), b) plano de fase y órbita de estabilidad.

La estabilidad del modelo (2.1), para el primer escenario, desde satisfacer  $G_0 < 1$ , es alcanzada (para  $t \rightarrow \infty$ ) en el punto de equilibrio (atractor)  $E_1 = (90.10, 0, 9.90)$  cuyo plano de fase, y órbita de estabilidad, es presentado

en Figura 2b.

Para el segundo escenario, un punto de equilibrio  $E_2$ , obtenido numéricamente, con  $\bar{S}_2 \approx 36.79$ ,  $\bar{A}_2 \approx 66.38$  y  $\bar{P}_2 \approx 32.61$ , satisface las condiciones del criterio de Routh-Hurwitz, por tanto, es estable (localmente). Además, el espacio de fase asociado para  $E_2$  y la órbita de estabilidad, a partir de las condiciones iniciales, es presentado en Figura 3b.

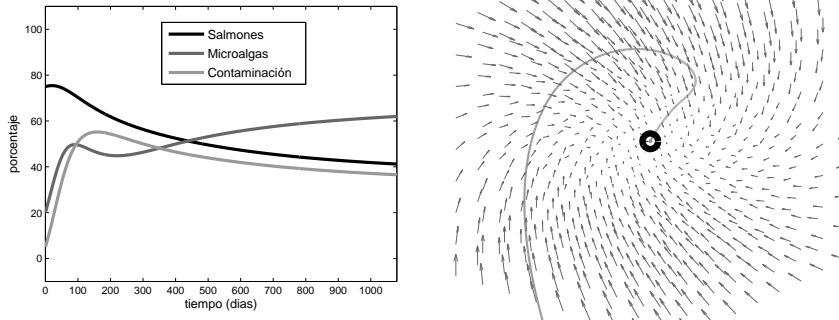


Figura 3: Simulaciones gráficas para el modelo (2.1) con  $S(0) = 75$ ,  $A(0) = 20$  y  $P(0) = 5$  para: a)  $G_0 > 1$  (presencia endémica de microalgas), b) espacio de fase y órbita de estabilidad.

## 5. Conclusiones

Fue posible establecer un modelo matemático representativo de la dinámica temporal de crecimiento entre dos especies (salmones y microalgas) y la contaminación producida en la interacción, consiguiendo representar el fenómeno de *bloom* de microalgas y una masiva muerte de salmones. Dos escenarios de interés biológico y económico (basados en un problema ecológico real) fueron analizados (cualitativamente).

Para el punto de equilibrio  $E_0$  (trivial), fue posible comprobar analíticamente su comportamiento cualitativo inestable y visualizar, en forma bidimensional, a este punto de origen como un punto de equilibrio inestable tipo *silla* (entre alguna especie y la contaminación asociada) o como un punto de equilibrio inestable de tipo *repulsor* (entre ambas especies).

Para el primer escenario, fueron establecidas condiciones (sobre los parámetros del modelo) necesarias para existencia de puntos de equilibrio ( $E_1$ ) que no consideran la presencia de microalgas. Luego, al establecer condiciones

necesarias de estabilidad (local) para estos puntos ( $E_1$ ) fue determinado un valor crítico  $G_0$ , interpretado como la tasa reproductiva intrínseca de microalgas a partir de la cual es prevista la presencia endémica ( $G_0 > 1$ ) o la extinción (matemática) de microalgas ( $G_0 < 1$ ) para el modelo. Desde que  $G_0(\gamma)$  fue posible configurar una representación de la influencia del flujo y temperatura de corrientes marinas (a través de diferentes valores interpretativos para  $\gamma$ ) que determinan el florecimiento de microalgas (presencia endémica, perjudicial en este modelo).

Para el segundo escenario, fue posible obtener soluciones numéricas (aproximadas) para puntos de equilibrio de la forma  $E_2$ , esto es, con presencia de microalgas, y fueron satisfechas condiciones necesarias de estabilidad (local) para un ejemplo simulado.

Además, es visualizada la característica realista de no linealidad de la respuesta funcional *sigmóide*, que interpreta un bajo impacto de una especie sobre otra (las microalgas sobre los salmones) cuando su densidad poblacional es baja, pero un fuerte impacto cuando esta densidad aumenta (ver figura 3a). Otra característica del modelo fue la representación del fenómeno biológico de *amensalismo*, donde las microalgas perjudican el crecimiento de salmones sin obtención directa de beneficios (como alimento por depredación).

Finalmente, para ambos escenarios fue considerada una linealización del modelo, el uso de la matriz Jacobiana y el criterio de Routh-Hurwitz para verificar estabilidad. Además, fueron reproducidas simulaciones numéricas que visualizan y corroboran el comportamiento estable de los puntos de interés, en ambos escenarios, a través de trayectorias dinámicas y espacios de fase.

## Referencias

- AQUA-news (2016). Bloom de algas provoca muerte de salmones en Chile. URL: <http://www.aqua.cl/2016/01/29/bloom-de-algas-provoca-muerte-de-salmones-en-chiloe/> Acceso em: 17/12/2016.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical models in biology*, volume 46. SIAM.
- Heisler, J., Glibert, P. M., Burkholder, J. M., Anderson, D. M., Cochlan, W., Dennison, W. C., Dortch, Q., Gobler, C. J., Heil, C. A., Humphries, E., et al. (2008). Eutrophication and harmful algal blooms: A scientific consensus. *Harmful Algae*, 8(1):3–13.

- Miyaoka, T. Y. e Meyer, J. F. (2015). Impacto ambiental e populações que interagem: uma modelagem inovadora, aproximação e simulações computacionais. *Biomatemática*, 2015(25):109–130.
- ProMED-mail (2016). Marine ecosystem health - Chile: (LG) implications of algal blooms. URL: <http://www.promedmail.org/post/4397013> Acesso em: 23/11/2016.
- Rojas-Palma, A. e González-Olivares, E. (2012). Optimal harvesting in a predator–prey model with Allee effect and sigmoid functional response. *Applied Mathematical Modelling*, 36(5):1864–1874.
- Rubio, F. A. (2017). Modelagem matemática da ação das plaquetas na prevenção de infecção de hemácias por merozoítos. Dissertação de Mestrado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.
- Sánchez, D., Meyer, J. F., e Rojas-Palma, A. (2017). Análisis para un modelo de mortalidad en Salmones por florecimiento de Microalgas. In *X Congreso Latinoamericano de Biomatemática (Accepted)*, Aug 7-11, Cusco, Perú.

