

Controle ótimo de pragas: Uma abordagem direta usando o pacote bvp4c do MATLAB[©]

Jônathas D.S.Oliveira¹, Rodney C.Bassanezi²,
IMECC, UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

Luciana T.Gomes³,
Depto.Física, Química e Matemática, UFSCAR, 18.052-780, Sorocaba/SP.

Resumo. A incidência de pragas nas lavouras afeta o desenvolvimento das plantas e, se não controladas, podem trazer sérios prejuízos aos produtores rurais. Apresentamos duas abordagens para o problema de controle ótimo de pragas, cujo objetivo é manter a população de pragas em um determinado limiar que não cause danos econômicos ao produtor. São considerados os casos de controle químico e biológico. A resolução se difere de outras encontradas na literatura e consiste em resolver numericamente o sistema de equações diferenciais proveniente das condições de otimalidade em sua forma original usando o pacote bvp4c do MATLAB[©].

Palavras-chave: Controle ótimo; Biomatemática, Pragas.

1. Introdução

Um dos maiores problemas enfrentados por pequenos e grandes produtores rurais em todo o mundo é a incidência de pragas em suas lavouras (Rodrigues, 2013; Simonato et al., 2015). Muitas vezes com origens desconhecidas, elas se espalham pelas lavouras e podem causar prejuízos desastrosos.

Existem diferentes maneiras de controlar a população de pragas em uma lavoura, em destaque podemos citar o controle biológico, com a inserção de um predador no meio e o controle químico, com o uso de agrotóxicos

¹jonathas.math.oliveira@gmail.com

²rodney@ime.unicamp.br

³lucianagomes.math@gmail.com

Problemas de controle ótimo de pragas tem sido bastante estudados. Em Oliveira (1999) é estudado controle ótimo na aplicação de fungicida na lavoura de feijão; em Campos (2007) são explorados problemas de controle ótimo da lagarta da cana-de-açúcar utilizando modelos linearizados e funcional quadrático, além disso é usado programação dinâmica para resolução numérica dos problemas; e em Feltrin e Rafikov (2002) e Tuset e Rafikov (2004) é estudado problema de controle ótimo de pragas na soja.

Nesse trabalho apresentamos dois modelos de controle ótimo de pragas, tanto químico quanto biológico. Diferentemente do que foi estudado em Feltrin e Rafikov (2002), Campos (2007) e Tuset e Rafikov (2004) não usamos a linearização das equações para a resolução numérica dos problemas, resolvemos o sistema de equações diferenciais provenientes das condições de otimalidade, através do pacote `bvp4c` do **MATLAB**®.

2. Controle químico de pragas

Nesta seção descreveremos um modelo matemático para representar a evolução da população de pragas em uma lavoura sob controle químico (Moragas e de Oliveira Schneider, 2003) e simularemos o resultado do controle ótimo através da resolução numérica do sistema de equações diferenciais resultante usando o pacote `bvp4c` do **MATLAB**®.

2.1. Modelo matemático

Um modelo amplamente empregado para representar a dinâmica do crescimento de uma população x considerando-se recursos limitados do meio é a equação logística

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right),$$

onde a é a taxa de crescimento intrínseco da população e K é a capacidade suporte do meio.

O objetivo é controlar a evolução da densidade x de pragas, de modo a não causar prejuízo à lavoura, o que acarretaria um dano financeiro ao agricultor. O controle químico u é uma função do tempo e consideramos sua eficiência proporcional à população de pragas, como em Diniz (2016).

Com isso, a dinâmica de crescimento da praga pode ser escrita como

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - bx(t)u(t)$$

onde b é um parâmetro que pondera a influência do controle no crescimento da praga.

Em um agro-ecossistema, geralmente, é conhecido um valor x_d de densidade de pragas que não causa danos econômicos na lavoura. Por exemplo, para um sistema envolvendo a lagarta de soja este valor é $x_d \approx 20$, considerando a quantidade de lagartas grandes por m^2 (ver Savio e Pinott, 2008). Por isso, é interessante manter a variável x abaixo desse valor.

Existem inúmeras escolhas de $u(t)$ que realizam essa tarefa e busca-se encontrar aquela que tenha o melhor desempenho (no caso, minimiza o custo e controla a população de pragas). A melhor escolha está baseada num critério de performance do controle aplicado, critério este que pode ser modelado através do seguinte funcional:

$$J(u) = \int_0^{t_f} c_1 x^2(t) + c_2 u^2(t) dt. \quad (2.1)$$

O funcional definido em (2.1) considera como custo a quantidade de veneno aplicado $u(t)$ e a quantidade de praga na lavoura $x(t)$. Ambos os termos estão elevados ao quadrado para evitar a influência de valores negativos dos mesmos no cálculo de $J(u)$. As constantes c_1 e c_2 são usadas para ponderar a importância relativa entre os termos $x(t)$ e $u(t)$. Este não é o único tipo de funcional coerente com esse problema, pode-se modelar a função de performance $J(u)$ de diversas formas. Sendo assim, podemos formalizar esse problema de controle ótimo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathbb{U}} J(u) &= \int_0^{t_f} c_1 (x(t) - x_d)^2 + c_2 u^2(t) dt \\ \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - bx(t)u(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= \text{livre} \\ u(t) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

O Hamiltoniano do problema (2.2) é dado por (ver Kirk, 2012):

$$H(t, x, u, p) = c_1 (x(t) - x_d)^2 + c_2 u(t)^2 + p(t) \left[ax(t) - \frac{ax(t)^2}{K} - bu(t)x(t) \right] \quad (2.3)$$

e as condições necessárias para esse problema são dadas pelo princípio do mínimo de Pontryagin (ver Kirk, 2012):

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = ax^*(t) - \frac{ax^*(t)^2}{K} - bu^*(t)x^*(t) \\ \frac{dp^*}{dt} = -2c_1(x^*(t) - x_d)^2 - ap^*(t) + \frac{2ap^*(t)}{K} + bu^*(t)p^*(t) \\ 2c_2u^*(t) - bp^*(t)x^*(t) = 0 \\ x^*(0) = x_0 \\ p^*(t_f) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Note que podemos escrever o Halmitoniano na forma

$$\begin{aligned} H(t, x, u, p) = & \left[c_1(x(t) - x_d)^2 + ap(t)x(t) - \frac{ap(t)x(t)^2}{K} \right] \\ & - [bp(t)x(t)]u(t) + \frac{1}{2}u(t)\frac{c_2}{2}u(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $f(x(t), p(t), t) = c_1(x(t) - x_d)^2 + ap(t)x(t) - \frac{ap(t)x(t)^2}{K}$,
 $c(x(t), p(t), t) = -bp(t)x(t)$ e $R(t) = \frac{c_2}{2}$.

Portanto, se o conjunto de condições necessárias (2.4) são satisfeitas com $c_2 > 0$, então o controle encontrado é um minimizador global para o problema (2.2) (ver Kirk, 2012).

2.2. Resolução numérica

Para realizar as simulações computacionais foi considerado o sistema lagarta de soja, cujos valores dos coeficientes a , b , K e x_d são fornecidos em Feltrin e Rafikov (2002) e Tuset e Rafikov (2004). O valor do coeficiente b que representa a eficiência do agrotóxico foi escolhido aleatoriamente, visto que depende do agrotóxico utilizado e, a princípio, escolhemos $c_1 = c_2 = 1$ (ver 1).

Tabela 1: Valores dos coeficientes e parâmetros para o modelo de controle de pragas

x_0	a	$\frac{a}{K}$	b	c_1	c_2	x_d
25	0,16	0,001	0,142	1	1	19

O gráfico da Figura 1 corresponde à evolução da população de pragas sem a aplicação do controle.

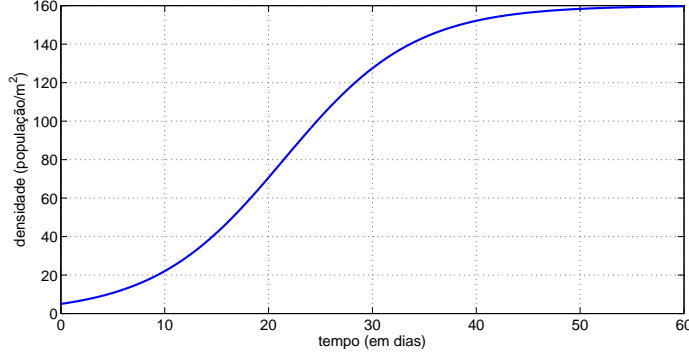


Figura 1: Evolução da população de pragas sem controle

Note que apesar de que o sistema sem controle estabiliza-se em $x = 160$, esse nível de equilíbrio está bem acima do limiar desejado $x_d = 19$. Com isso, é necessário a aplicação de um controle, nesse caso, inseticida, para que durante toda a dinâmica, a quantidade de pragas por m^2 não cause muitos danos a lavoura.

Para resolvermos o problema com controle é necessário resolver o sistema (2.4), que consiste de uma equação algébrica

$$2c_2u^*(t) - bp^*(t)x^*(t) = 0 \quad (2.6)$$

junto com um sistema de equações diferenciais não-lineares. Podemos isolar u na equação (2.6) e, com isso, para que possamos obter a solução desejada do problema precisamos resolver o seguinte sistema de equações não-lineares, que depende apenas de p e x .

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = ax^*(t) - \frac{ax^*(t)^2}{K} - \frac{b}{2c_2}p^*(t)x^*(t)^2 \\ \frac{dp^*}{dt} = -2c_1(x^*(t) - x_d)^2 - ap^*(t) + \frac{2ap^*(t)}{K} + \frac{b}{2c_2}x^*(t)p^*(t)^2 \\ x^*(0) = x_0 \\ p^*(t_f) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Note que ainda precisamos inserir a restrição $u(t) \geq 0$ no problema, isto

é, $u(t) = \frac{b}{2c_2} p^*(t) x^*(t) \geq 0$. Ou seja, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = ax^*(t) - \frac{ax^*(t)^2}{K} - \frac{b}{2c_2} p^*(t) (x^*(t))^2 \\ \frac{dp^*}{dt} = -2c_1 (x^*(t) - x_d)^2 - ap^*(t) + \frac{2ap^*(t)}{K} + \frac{b}{2c_2} x^*(t) (p^*(t))^2 \\ x^*(0) = x_0 \\ p^*(t_f) = 0 \\ \frac{b}{2c_2} p^*(t) x^*(t) \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

O sistema (2.8) é um sistema de equações diferenciais não-lineares sobre o qual se desconhece um método de resolução analítica e, além disso, temos uma condição inicial para x e uma condição final para p , dificultando ainda mais a obtenção da solução.

Um problema do valor de fronteira (BVP) pode ser formulado como um sistema de equações diferenciais $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ com condições aplicadas em dois diferentes pontos $x = a$ e $x = b$. Ao contrário dos Problemas de Valor Inicial (IVPs), um problema de valor de fronteira pode não ter uma solução, ou pode ter um número finito, ou pode ter infinitas soluções. Devido a isso, os programas para resolver BVPS exigem que os usuários forneçam uma boa estimativa (solução inicial) para a solução desejada.

Frequentemente existem parâmetros que têm de ser determinadas de modo a ter uma solução para o BVP. Mais uma vez, pode haver mais de uma possibilidade, assim que os programas requerem um palpite para os parâmetros desejados. Singularidades em coeficientes e problemas levantados em intervalos infinitos não são incomuns.

BVPS são muito mais difíceis de resolver do que IVPs e qualquer *solver* pode falhar, mesmo com boas estimativas para a solução e os parâmetros desconhecidos. Para tentarmos resolver o sistema (2.8) numericamente, usamos o pacote **bvp4c** do **MATLAB**[®]. O **bvp4c** é um solucionador eficaz, no entanto requer um trabalho árduo para escolha de uma solução inicial e de uma malha de pontos de tal modo que o problema requerido seja resolvido. Para maiores detalhes sobre o pacote **bvp4c** ver Shampine et al. (2000).

Para o problema em questão, como primeiro chute para solução inicial escolhemos $x(t) = 25$ e $p(t) = 0$, de modo que o algoritmo não convergiu, e com isso não conseguimos resolver o problema. Depois escolhemos como solução inicial $x(t) = 30$ e $p(t) = 0$ e neste caso o algoritmo convergiu e, portanto, conseguimos obter uma solução para o nosso problema. As Figuras

2 e 3 mostram o controle e o estado encontrados.

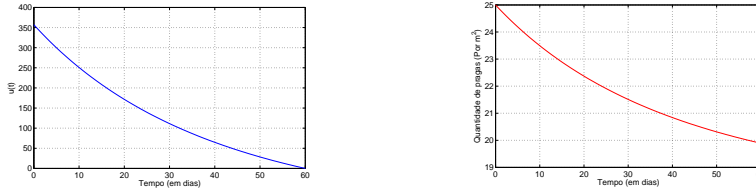


Figura 2: Solução para o controle $u(t)$. Figura 3: Solução para o estado $x(t)$.

Como $c_2 = 1 > 0$, o controle encontrado é um minimizador global. Vamos ilustrar, através de comparações com alguns casos particulares, que a solução encontrada é um minimizador. A princípio são realizadas duas perturbações no controle $u^*(t)$ encontrado.

A Figura 4 mostra o gráfico de $u_1(t) = 0.1t^2 - 12t + 352$, que está por baixo do gráfico de $u^*(t)$, bem como o gráfico de $u_2(t) = -5.96666t + 357.2$ que está por cima de $u^*(t)$.

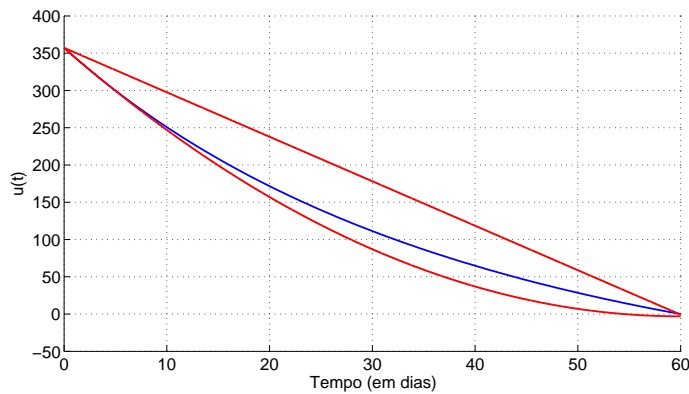


Figura 4: Perturbações em $u^*(t)$.

Analisando cada um dos controles no funcional objetivo, temos os resultados da Tabela 2, na qual pode-se observar que o valor do funcional avaliado em $u^*(t)$ é bem menor que o valor do funcional avaliado em $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Tabela 2: Controle \times Valor do funcional

u	$J(u)$
$u_1(t)$	4.7237×10^7
$u_2(t)$	7.4617×10^7
$u^*(t)$	2.7437×10^6

3. Controle biológico de pragas

Devido à conscientização sobre a necessidade de manutenção da qualidade ambiental e segurança da saúde humana, os métodos de controle químico de insetos-praga têm sido fonte de preocupação da sociedade. Deste modo, é necessário buscar um sistema de produção agrícola que contemple a sustentabilidade ambiental e que promova a biodiversidade no agroecossistema.

Com isso, ao invés de controle químico, uma alternativa é fazer o controle biológico de pragas (Hoffmann-Campo et al., 2000; Simonato et al., 2015; Tordin, 2014). A ideia básica do controle biológico consiste em controlar as pragas agrícolas e os insetos transmissores de doenças a partir do uso de seus inimigos naturais, que podem ser outros insetos benéficos, predadores, parasitóides, e microrganismos, como fungos, vírus e bactérias.

Trata-se de um método de controle racional e sadio, que tem como objetivo final utilizar esses inimigos naturais que não deixam resíduos nos alimentos e ocasionam baixo impacto ao meio ambiente e à saúde da população.

4. Modelo matemático

De maneira geral, as interações entre pragas e inimigos numa lavoura podem ser representados por um modelo do tipo presa-predador:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= yg(x, y) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $x(t)$ representa a densidade de presas e $y(t)$ a densidade de predadores, em um tempo $t \geq 0$. O sistema (4.9) é do tipo Kolmogorov.

Para sistemas presa-predador (4.9) as funções f e g satisfazem às seguintes condições $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ (para grandes valores de x), $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, $\frac{\partial g}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} < 0$ (ver Bassanezi e Ferreira Jr., 1988).

Em um agro-ecossistema a presa é uma praga e, geralmente, é conhecido um valor x_d de densidade de pragas que não causa danos econômicos na lavoura. Suponhamos que precisamos manter o sistema no ponto de equilíbrio desejado (x^*, y^*) através da introdução de mais predadores na população y a uma taxa u . Podemos considerar $x^* = x_d$ e nesse caso podemos encontrar y^* resolvendo a equação

$$f(x^*, y^*) = 0$$

O sistema com controle tem a forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y) + u \end{cases} \quad (4.10)$$

O problema de controle ótimo de pragas pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \bar{U}} J(u) &= \int_0^{t_f} c_1 \left[(x(t) - x^*)^2 + (y(t) - y^*)^2 \right] + c_2 u(t)^2 dt \\ \frac{dx}{dt} &= xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= yg(x, y) + u \\ x(t_0) &= x_0 \quad y(t_0) = y_0 \\ x(t_f) &= \text{livre} \quad y(t_f) = \text{livre} \\ u(t) &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

A minimização do funcional (4.11) implica a minimização do desvio do estado desejado e a minimização dos gastos com a aplicação do controle resultante da inserção de inimigos naturais. .

Para o nosso modelo utilizamos um sistema presa-predador, ou seja

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a - \gamma x - \alpha y \\ g(x, y) &= -b + \beta x \end{aligned} \quad (4.12)$$

O Halmitoniano do problema é dado por

$$\begin{aligned} H(t, x, u, p) &= c_1 \left[(x(t) - x^*)^2 + (y(t) - y^*)^2 \right] + c_2 u(t)^2 \\ &+ p_1(t) [ax(t) - \gamma x^2 - \alpha xy] \\ &+ p_2(t) [-by(t) + \beta x(t)y(t) + u(t)], \end{aligned} \quad (4.13)$$

cujas condições de otimalidade são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(a - \gamma x - \alpha y) \\
\frac{dy}{dt} &= y(-b + \beta x) + u \\
\frac{dp_1}{dt} &= -2c_1(x - x^*) - ap_1 + 2\gamma p_1 x + \alpha p_1 y - \beta p_2 y \\
\frac{dp_2}{dt} &= -2c_1(y - y^*) + \alpha p_1 x + bp_2 - \beta p_2 x \\
2c_2 u + p_2 &= 0 \\
x(0) &= 25 \quad y(0) = 5 \\
p_1(t_f) &= p_2(t_f) = 0 \\
u(t) &\geq 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Podemos isolar u na equação $2c_2 u + p_2 = 0$ e substituir em (4.14) e, com isso, obtemos um sistema de equações diferenciais nas variáveis x, y, p_1 e p_2 , ou seja, em um problema de contorno com dois valores de fronteira.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(a - \gamma x - \alpha y) \\
\frac{dy}{dt} &= y(-b + \beta x) - \frac{p_2}{2c_2} \\
\frac{dp_1}{dt} &= -2c_1(x - x^*) - ap_1 + 2\gamma p_1 x + \alpha p_1 y - \beta p_2 y \\
\frac{dp_2}{dt} &= -2c_1(y - y^*) + \alpha p_1 x + bp_2 - \beta p_2 x \\
x(0) &= 25 \quad y(0) = 5 \\
p_1(t_f) &= p_2(t_f) = 0 \\
u(t) &\geq 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Para implementação utilizamos os mesmos parâmetros da seção anterior retirados de Tuset e Rafikov (2004).

Tabela 3: Valores dos coeficientes e parâmetros para o modelo de controle de pragas

x_0	y_0	a	γ	b	β	c_1	c_2	x^*	y^*
25	5	0,16	0,001	0,19	0.0029	1	1	19	7.05

A Figura 5 mostra a evolução da densidade populacional de presas e de predadores sem a aplicação do controle u .

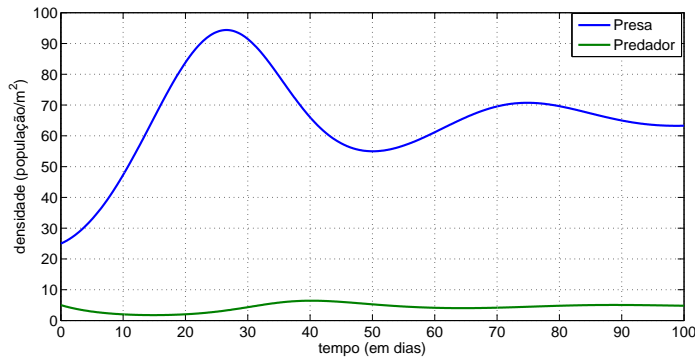


Figura 5: Variações das densidades populacionais de pragas e predadores do sistema sem controle

Note que durante todo o processo da dinâmica, a densidade populacional de pragas sempre está acima do limiar desejado, o que se faz necessário uma intervenção por parte do produtor para controlar a quantidade de pragas, ou seja, se faz necessário a aplicação de um controle, no nosso caso, a inserção de inimigos naturais.

4.1. Resolução numérica

Para a resolução numérica do sistema (4.15) proveniente do problema com controle, usamos novamente o pacote **bvp4c** do **MATLAB**[®]. E, para encontrarmos um chute para a solução inicial, separamos o sistema de equações diferenciais como uma soma da parte linear com a parte não linear.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dp_1}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ -by - \frac{p_2}{2} \\ -2(x - x^*) - ap_1 \\ -2(y - y^*) + bp_2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -\gamma x^2 - \alpha xy \\ \beta xy \\ 2\gamma p_1 x + \alpha p_1 y - \beta p_2 y \\ \alpha p_1 x - \beta p_2 x \end{bmatrix}$$

Resolvemos para os valores de $\delta = 0; 0.1; 0.25; 0.3; 0.31; 0.4; 0.41; 0.47; 0.5; 0.55$ e, finalmente, para $\delta = 1$. Inicialmente resolvemos o problema para $\delta = 0$ (não precisamos de um chute inicial pois o sistema é linear) e usamos a solução como chute inicial para o problema com $\delta = 0.1$.

Posteriormente, resolvemos o problema para $\delta = 0.1$ e usamos a solução encontrada como chute inicial para o problema com $\delta = 0,25$, e assim sucessivamente, até encontrarmos um chute inicial considerado suficientemente bom para resolvermos o problema com $\delta = 1$, que é o problema original que queremos resolver.

A solução numérica é apresentada nas Figuras 6 e 7.

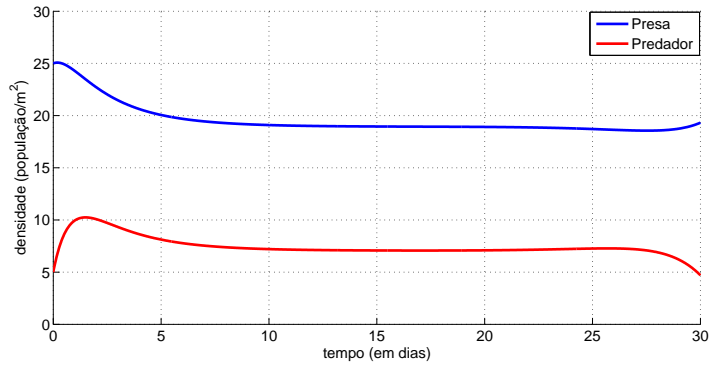


Figura 6: Valores das populações de pragas e predadores do sistema com controle.

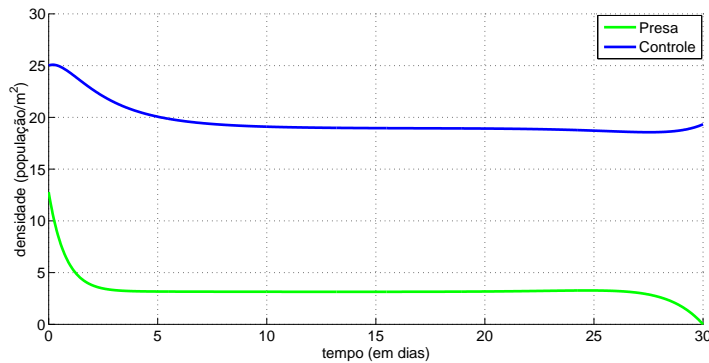


Figura 7: Valores do controle e da densidade populacional de pragas.

Mais uma vez é importante ainda observar que, as condições de otimalidade dadas pelo sistema (4.15) são apenas condições necessárias de otimalidade e, com isso, a solução numérica que encontramos é apenas um candidato

a mínimo.

No entanto, podemos escrever o Halmitoniano do problema na forma

$$\begin{aligned} H(t, x, u, p) &= c_1 \left[(x(t) - x^*)^2 + (y(t) - y^*)^2 \right] \\ &+ p_1(t) [ax(t) - \gamma x^2 - \alpha xy] \\ &+ p_2(t) [-by(t) + \beta x(t)y(t)] + p_2 u(t) + \frac{1}{2} u(t)^2 c_2 u(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

e, nesse caso, $R(t) = 2c_2 = 2 > 0$. Logo, o candidato encontrado é mínimo global (ver Kirk, 2012).

5 Conclusão

Apresentamos dois modelos de controle ótimo de pragas, um químico e outro biológico. As condições de otimalidade se reduziram a um sistema de equações diferenciais não-lineares, com dois valores de contorno.

De modo diferente do que apresentado na literatura, não resolvemos a linearização do problema de valores de contorno, mas sim o problema original não-linear.

Por fim, verificamos que o valor encontrado era de fato o ótimo global.

Referências

- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais: com aplicações*. Habra, S.Paulo.
- Campos, J. R. (2007). Controle ótimo da lagarta da cana-de-açúcar utilizando modelos linearizados e funcional quadrático: uma resolução usando programação dinâmica. *Tutorial notes*, 3(1):241–252.
- Diniz, M. M. (2016). *Otimização de funções, funcionais e controle fuzzy*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.
- Feltrin, C. e Rafikov, M. (2002). Aplicação da função de Lyapunov num problema de controle ótimo. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 1:83–92.
- Hoffmann-Campo, C. B., Moscardi, F., Corrêa-Ferreira, B. S., Oliveira, L. J., Sosa-Gómez, D. R., Panizzi, A. R., Corso, I. C., Gazzoni, D. L., e Oliveira,

- E. B. (2000). *Pragas da soja no Brasil e seu manejo integrado*. Embrapa Soja Londrina, Londrina.
- Kirk, D. E. (2012). *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, New York.
- Moragas, W. M. e de Oliveira Schneider, M. (2003). Biocidas: suas propriedades e seu histórico no Brasil. *Caminhos de Geografia*, 4(10):26–40.
- Oliveira, R. Z. G. (1999). *Controle ótimo da aplicação de fungicidas na lavoura*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.
- Rodrigues, P. (2013). O ataque da lagarta. URL:<https://www.embrapa.br/hortalicas/busca-de-noticias/-/noticia/1930990/o-ataque-da-lagarta>.
- Savio, G. M. e Pinott, E. B. (2008). Controle biológico da lagarta-da-soja (*anticarsia gemmatalis*) por baculovirus anticarsia. Exemplos desta publicação podem ser solicitados à: Associação Cultural e Educacional de Garça – ACEG.
- Shampine, L. F., Kierzenka, J., e Reichelt, M. W. (2000). Solving boundary value problems for ordinary differential equations in matlab with bvp4c. *Tutorial notes*, páginas 437–448.
- Simonato, J., Grigolli, J. F. J., e Oliveira, H. N. (2015). *Controle biológico de insetos-praga na soja*, capítulo VIII, páginas 178–193. Embrapa Agropecuária Oeste (ALICE). Embrapa, Dourados/MS.
- Tordin, C. (2014). Embrapa mostra a importância do manejo integrado de pragas na agrishow. URL:<https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/1671932/embrapa-mostra-a-importancia-do-manejo-integrado-de-pragas-na-agrishow>.
- Tusset, A. M. e Rafikov, M. (2004). Controle ótimo de pragas: Modelos linearizados, funcional quadrático. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 5(3):145–154.