

# H5N1, aves silvestres e de criação: equilíbrios mais prováveis

Juliana M. R. Souza<sup>1</sup>,  
IMECC, UNICAMP, 13.083-970 – Campinas/SP.

Laécio C. Barros<sup>2</sup>, João F. C. A. Meyer<sup>3</sup>,  
IMECC, UNICAMP, 13.083-970 – Campinas/SP.

**Resumo.** Este artigo traz a aplicação de uma análise frequencial como ferramenta para guiar o trabalho analítico no tocante à determinação de expressões para os pontos estacionários mais frequentes, ou mais frequentemente estáveis, e respectivos autovalores associados. A análise frequencial é um método valioso quando o problema envolve muitos parâmetros e as expressões obtidas para cada equilíbrio são inconclusivas. Neste artigo aplica-se tal análise a um modelo de infecção por H5N1 entre aves silvestres e de pequenas criações, com seis compartimentos populacionais. Ao fim do trabalho foi possível aferir qual é o ponto de equilíbrio factível mais frequente que, neste caso, é uma das duas opções de pontos de maior interesse, a saber, aqueles em que as populações saudáveis não são extintas.

**Palavras-chave:** *H5N1; Pontos Estacionários; Análise de frequência de pontos de equilíbrio, Método Monte Carlo.*

## 1. Introdução

A análise de estabilidade de pontos estacionários de Sistemas de Equações Diferenciais não-lineares frequentemente se mostra um trabalho inconclusivo devido aos parâmetros, geralmente em grande número, envolvidos nas expressões matemáticas de cada equilíbrio.

---

<sup>1</sup>jumarta@gmail.com

<sup>2</sup>laecio@ime.unicamp.br

<sup>3</sup>joni@ime.unicamp.br

Este trabalho apresenta os resultados da aplicação de uma abordagem como se vê em Passos (2006) à análise de estabilidade de pontos de equilíbrio. A proposta de Passos (2006) é que, diante da imprecisão na determinação de parâmetros do modelo, antes de iniciar esforços analíticos, se faça um estudo da frequência em que os pontos estacionários são, ou não, estáveis, a depender dos valores atribuídos aos parâmetros. Para tanto, um número estatisticamente relevante de valores para os parâmetros é gerado por um Método do tipo Monte Carlo e, para cada conjunto de parâmetros gerado, a factibilidade e estabilidade dos pontos de equilíbrio são aferidas. Conseqüentemente, ao final dos experimentos, dadas as distribuições de probabilidade dos parâmetros, é possível saber quais as configurações de estabilidade mais frequentes e, então, tratá-las em maior profundidade, analiticamente.

Neste trabalho, essa análise de frequência é aplicada a um sistema, originalmente de Equações Diferenciais Parciais não-lineares, proposto por Souza (2010) para modelar a infecção de aves de pequenos criadores pelo vírus H5N1, inserido no sistema por aves silvestres. Os compartimentos em que as populações de aves silvestres e aves de pequenos criadores, ou domésticas, são subdivididas pode ser visto na Tabela 1. Já as possibilidades de interação que levam à infecção, bem como uma ideia esquemática do modelo, que será formalmente apresentado na Seção 2, são apresentados na Figura 1.



$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & \beta_{SI}SI + \beta_{SM}SM + \beta_{SD}SD \\ & + \beta_{SF}SF - (\mu_I + \mu_S)I \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{dM}{dt} = \mu_I I - \nu_M M \quad (2.3)$$

$$\frac{dB}{dt} = \sigma(B + D) - \beta_{BI}BI - \beta_{BM}BM - \beta_{BD}BD - \beta_{BF}BF - \mu_B B \quad (2.4)$$

$$\frac{dD}{dt} = \beta_{BI}BI + \beta_{BM}BM + \beta_{BD}BD + \beta_{BF}BF - (\mu_D + \mu_B)D \quad (2.5)$$

$$\frac{dF}{dt} = \mu_D D - \nu_F F \quad (2.6)$$

O foco é no processo de disseminação do risco entre aves domésticas imediatamente após o surgimento da infecção, introduzida por aves silvestres. Portanto  $M(0) = 0$ ,  $D(0) = 0$  e  $F(0) = 0$ . Bem como,  $S(0) = S_0 \neq 0$ ,  $I(0) = I_0 \neq 0$  e  $B(0) = B_0 \neq 0$ .

Como foi dito, originalmente o sistema sobre o qual este trabalho se debruça era composto de EDP's. Mas, nesta primeira abordagem, trabalha-se com o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias que se obtém do sistema original quando as variações em relação às componentes espaciais não são consideradas. Assim, a busca será por pontos estacionários constantes também em relação ao domínio espacial.

Quanto aos parâmetros do modelo, de acordo com o retratado na Figura 1 e no sistema (2.1)-(2.6):

- os parâmetros  $\beta$  designam a taxa de contaminação quando do encontro entre aves suscetíveis e infectadas;
- os parâmetros  $\mu$  designam mortalidades, sejam elas infligidas pelo homem sem discriminar se determinada aves está infectada ou não, caso de  $\mu_S$  e  $\mu_B$ , sejam devidas à mortalidade induzida pela infecção  $\mu_I$  e  $\mu_D$ ;
- os parâmetros  $\nu$  referem-se ao decaimento da possibilidade de infecção pelo encontro com animais mortos.

Os demais parâmetros dizem respeito à dinâmica de crescimento populacional: no caso das aves silvestres o crescimento populacional é logístico tendo taxa de crescimento  $\lambda$  e capacidade de suporte do ambiente dada por  $K$ ; no caso das aves domésticas o espaço e o número de indivíduos não chega a restringir o crescimento da população que é, então, Malthusiano com taxa  $\sigma$ .

### 3. Metodologia

O procedimento neste trabalho se divide em dois âmbitos, a saber:

- um primeiro momento é o de obtenção das expressões para os pontos estacionários;
- o segundo momento diz respeito à geração dos parâmetros e avaliação da estabilidade dos pontos estacionários para cada configuração gerada.

Terminados os dois procedimentos é possível realizar, finalmente, a análise das frequências que são o objetivo final do trabalho.

#### 3.1 Quanto às configurações de equilíbrio

No caso estacionário, as derivadas temporais que aparecem à esquerda do sistema (2.1)-(2.6) são identicamente nulas. Assim, de (2.3) e (2.5) é possível obter prontamente as seguintes relações para os valores estacionários de  $M$  e  $F$ :

$$M(I) = \frac{\mu_I}{\nu_M} I, \quad (3.7)$$

$$F(D) = \frac{\mu_D}{\nu_F} D. \quad (3.8)$$

Somando a expressão (2.4) à expressão (2.5), obtém-se:

$$D(B) = \frac{-(\sigma - \mu_B)}{(\sigma - \mu_B - \mu_D)} B. \quad (3.9)$$

E, substituindo a expressão (3.9) em (3.8), chega-se a:

$$F(B) = -\frac{\mu_D}{\nu_F} \frac{(\sigma - \mu_B)}{\sigma - \mu_B - \mu_D} B. \quad (3.10)$$

Substituindo as expressões (3.7), (3.9) e (3.10) em (2.5), é possível obter uma expressão dependente de  $B$  e de  $I$ , apenas. De onde se conclui que  $B = 0$  ou:

$$B(I) = \frac{1}{\beta_{BD} + \beta_{BF} \frac{\mu_D}{\nu_F}} \left( (\mu_B + \mu_D) + I \left( \beta_{BI} + \frac{\beta_{BM} \mu_I}{\nu_M} \right) / \frac{\sigma - \mu_B}{\sigma - \mu_B - \mu_D} \right). \quad (3.11)$$

Se  $B = 0$ , de acordo com as expressões (3.9) e (3.10), tem-se  $D = 0$  e  $F = 0$ .

Mas, se  $B$  é dada de acordo com a expressão (3.11), é possível obter expressões para  $D$  e  $F$  em função de  $I$ , também:

$$D(I) = \frac{1}{\beta_{BD} + \beta_{BF} \frac{\mu_D}{\nu_F}} \left( -\frac{\sigma - \mu_B}{\sigma - \mu_B - \mu_D} (\mu_B + \mu_D) - I \left( \beta_{BI} + \frac{\beta_{BM} \mu_I}{\nu_M} \right) \right); \quad (3.12)$$

$$F(I) = \frac{1}{\frac{\nu_F}{\mu_D} \beta_{BD} + \beta_{BF}} \left( -\frac{\sigma - \mu_B}{\sigma - \mu_B - \mu_D} (\mu_B + \mu_D) - I \left( \beta_{BI} + \frac{\beta_{BM} \mu_I}{\nu_M} \right) \right). \quad (3.13)$$

Quanto às expressões para  $S$  e  $I$ , somando (2.1) a (2.2), obtém-se:

$$\lambda(S + I) \left( 1 - \frac{S + I}{K} \right) - \mu_S(S + I) - I\mu_I = 0. \quad (3.14)$$

Como a expressão (3.14) é de segundo grau em  $S$  e em  $I$ , é possível, obter dela  $S_1(I)$ , relativo à raiz negativa do discriminante, e  $S_2(I)$ , relativo à raiz positiva:

$$S(I) = \frac{1}{2\lambda} \left( (\lambda - \mu_S)K - 2I\lambda \pm \sqrt{K^2(\lambda - \mu_S)^2 - 4I\lambda K\mu_I} \right) \quad (3.15)$$

Ou seja, além do caso em que  $B = D = F = 0$ , obteve-se  $S_i(I)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $M(I)$ ,  $B(I)$ ,  $D(I)$ ,  $F(I)$ . Assim, é possível inserir essas últimas expressões em (2.2) e recuperar uma expressão para  $I$ .

Por outro lado, seja  $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{I}, \bar{M}, \bar{B}, \bar{D}, \bar{F})$  um ponto estacionário do sistema, o Jacobiano de (2.1)-(2.6) tem suas seis colunas,  $J_i(\bar{P})$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , dadas por:

$$J_1(\bar{P}) = \begin{pmatrix} \lambda \left( 1 - 2\frac{\bar{S} + \bar{I}}{K} \right) - \beta_{SI}\bar{I} - \beta_{SM}\bar{M} - \beta_{SD}\bar{D} - \beta_{SF}\bar{F} - \mu_S \\ \beta_{SI}\bar{I} + \beta_{SM}\bar{M} + \beta_{SD}\bar{D} + \beta_{SF}\bar{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2(\bar{P}) = \begin{pmatrix} \lambda \left( 1 - 2\frac{\bar{S} + \bar{I}}{K} \right) - \beta_{SI}\bar{S} \\ \beta_{SI}\bar{S} - \mu_I - \mu_S \\ \mu_I \\ -\beta_{BI}\bar{B} \\ \beta_{BI}\bar{B} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J_3(\bar{P}) = \begin{pmatrix} -\beta_{SM}\bar{S} \\ \beta_{SM}\bar{S} \\ -\nu_M \\ -\beta_{BM}\bar{B} \\ \beta_{BM}\bar{B} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$J_4(\bar{P}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta_{BI}\bar{I} - \beta_{BM}\bar{M} - \beta_{BD}\bar{D} - \beta_{BF}\bar{F} - \mu_B + \sigma \\ \beta_{BI}\bar{I} + \beta_{BM}\bar{M} + \beta_{BD}\bar{D} + \beta_{BF}\bar{F} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$J_5(\bar{P}) = \begin{pmatrix} -\beta_{SD}\bar{S} \\ \beta_{SD}\bar{S} \\ 0 \\ \sigma - \beta_{BD}\bar{B} \\ \beta_{BD}\bar{B} - \mu_B - \mu_D \\ \mu_D \end{pmatrix} \text{ e } J_6(\bar{P}) = \begin{pmatrix} -\beta_{SF}\bar{S} \\ \beta_{SF}\bar{S} \\ 0 \\ -\beta_{BF}\bar{B} \\ \beta_{BF}\bar{B} \\ -\nu_F \end{pmatrix}.$$

Quanto à estabilidade dos pontos estacionários, sejam  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , os autovalores de  $J(\bar{P})$ , o jacobiano do sistema avaliado no ponto estacionário  $\bar{P}$ . Então, de acordo com a teoria de Sistemas Dinâmicos, para mais aplicações a problemas biológicos ver Edelstein-Keshet (2004), o ponto de equilíbrio  $\bar{P}$  é considerado estável se o valor máximo de  $|Re(\lambda_i)|$  for negativo, para  $i = 1, \dots, 6$ .

Vai daí que os pontos estacionários e respectivas estabilidades dependem não só das componentes dos pontos de equilíbrio como também dos parâmetros do sistema. E os cálculos para obter expressões para os autovalores não é trivial.

### 3.2 Quanto à simulação estatística dos parâmetros

Todos parâmetros do sistema, aqui entendidos como indeterminados, foram gerados de maneira aleatória através de um Método de Monte Carlo que faz uso do Método da Transformada Inversa, ver Ross (2006). De acordo com esse método, é possível gerar valores para os parâmetros de acordo com uma distribuição estatística pré-estabelecida.

Neste trabalho todos os parâmetros terão distribuição uniforme entre 0 e 1. Esta opção se justifica pela razão de que, neste primeiro momento, não se fará nenhuma hipótese acerca dos espectros de valores dos parâmetros do problema.

Um exemplo de resultado, a geração dos parâmetros  $\lambda$  usados nos experimentos relativos aos resultados deste trabalho, pode ser visto na Figura 2.

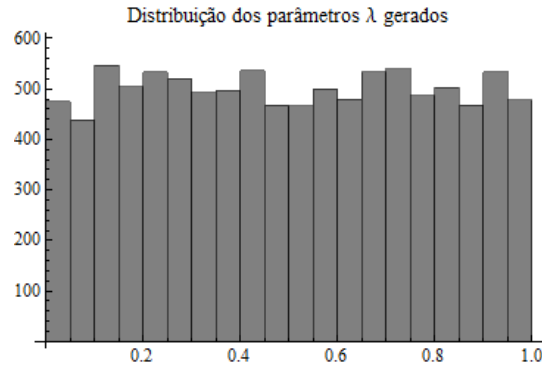


Figura 2: Histograma com a distribuição dos 10000 parâmetros  $\lambda$ , com distribuição uniforme entre 0 e 1, gerados por Método do tipo Monte Carlo .

## 4. Resultados

Os resultados a seguir advém de um experimento em que todos os parâmetros do sistema foram gerados aleatoriamente 10000 vezes com distribuição  $\sim U(0, 1)$ .

Do exposto na Seção 3, está claro que existem essencialmente dois tipos de pontos de equilíbrio:  $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{I}, \bar{M}, \bar{B}, \bar{D}, \bar{F})$ , em que nenhuma das populações é necessariamente nula, e  $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{I}, \bar{M}, 0, 0, 0)$ , em que as aves de criação estariam extintas.

O percentual de cada tipo de ponto de equilíbrio e respectivas estabilidades, obtidos no experimento com as 10000 simulações, podem ser vistos na Tabela 2.

Tabela 2: Frequências e características dos pontos de equilíbrio.

Tipos de equilíbrio	Pontos Inactíveis (%)		Pontos Factíveis (%)
	Imaginários	Com componentes negativas	
Instável	23.66	57.24	4.95
Estável	3.93	7.44	2.77

Da Tabela 2 se pode concluir que os pontos estacionários que possuem componentes negativas são os mais frequentes no total e os mais frequentemente atratores, também.



Ainda da Tabela 2, fica claro que o percentual de pontos estacionários factíveis, entre instáveis e estáveis não chega a 10%. E, dentre os pontos factíveis, aproximadamente 36% é de pontos atratores.

Tabela 3: Percentuais de pontos factíveis estáveis com relação a  $S_1(I)$  e  $S_2(I)$

Tipo de ponto estacionário	%
$\overline{P}_1 = (S_1, I, M, B, D, F)$	0.77
$\overline{P}_1 = (S_1, I, M, 0, 0, 0)$	0.02
$\overline{P}_2 = (S_2, I, M, B, D, F)$	1.57
$\overline{P}_2 = (S_2, I, M, 0, 0, 0)$	0.41
Total	2.77

Há um desequilíbrio entre o percentual de pontos factíveis estáveis dentre os advindos de  $S_1(I)$  e os advindos de  $S_2(I)$ . Os pontos estacionário factíveis advindos de  $S_2(I)$  que, como foi dito, relacionam-se com a raiz positiva do discriminante de (3.14), são mais frequentemente estáveis. Os percentuais de pontos factíveis estáveis advindos de  $S_1(I)$  e  $S_2(I)$  podem ser vistos na Tabela 3.

Quanto à distribuição dos valores das populações estacionárias, as configurações podem ser vistas nas Figuras 3-10.

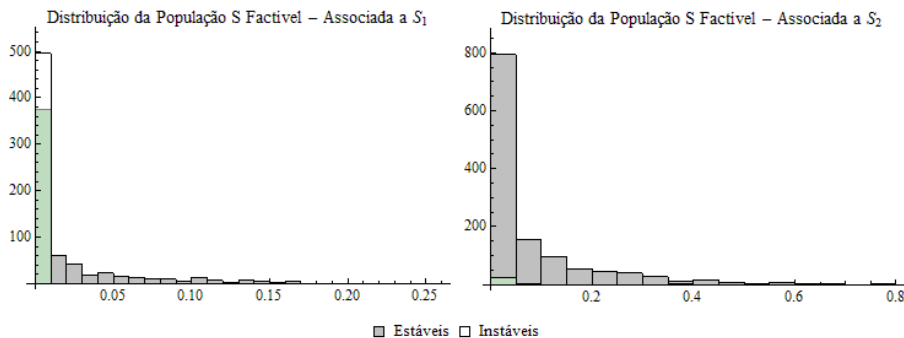


Figura 3: Distribuições das populações  $S$ . À esquerda provenientes de  $S_1$  e à direita provenientes de  $S_2$ .

Nas Figuras 3-8, estão expostas as distribuições das populações  $S$ ,  $I$ ,  $M$ ,  $B$ ,  $D$  e  $F$ , para os pontos estacionários sem componentes nulas, os  $\overline{P}$ 's. Tais

figuras, além de permitirem a comparação entre a distribuição dos valores de cada segmento de população, a depender de sua classificação quanto a estabilidade, também permitem que se compare as distribuições a depender de serem provenientes de  $S_1$ , à esquerda; ou  $S_2$ , à direita.

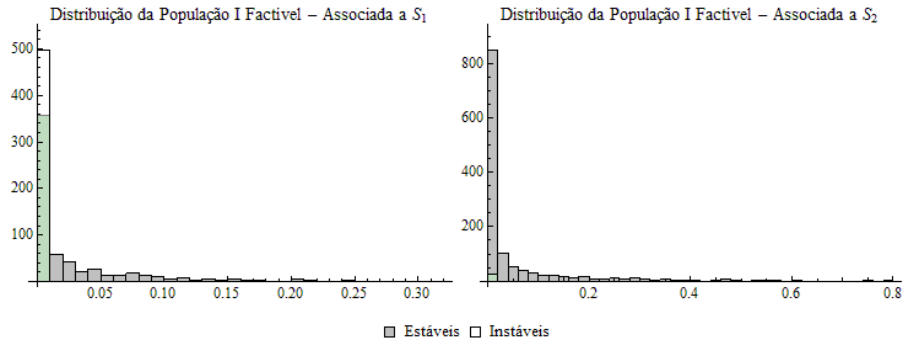


Figura 4: Distribuições das populações  $I$ . À esquerda provenientes de  $S_1$  e à direita provenientes de  $S_2$ .

A Figura 3 confirma, em números absolutos, o que aparece na Tabela 3 em termos de percentual: a expressão  $S_2$  leva a mais pontos estacionários factíveis de uma maneira geral e a mais pontos estacionários factíveis *estáveis*, especificamente.

Os compartimentos populacionais relativos à população silvestre se distribuem entre 0 e 1 e este comportamento é coerente com os valores que a capacidade de suporte,  $K$ , pode assumir. Além disso, ainda no tocante à população de aves silvestres, há mais pontos factíveis instáveis provenientes de  $S_1$  do que de  $S_2$  mas, em geral, esses pontos factíveis instáveis são nulos, vide Figuras 3-5.

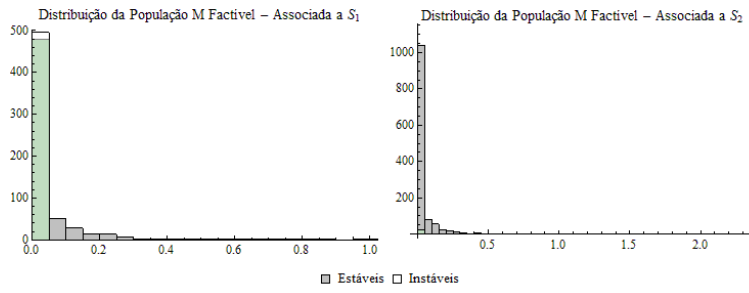


Figura 5: Distribuições das populações  $M$ . À esquerda provenientes de  $S_1$  e à direita provenientes de  $S_2$ .

Observa-se também que os valores que as populações estacionárias estáveis devidas à  $S_2$  podem assumir apresentam uma amplitude maior.

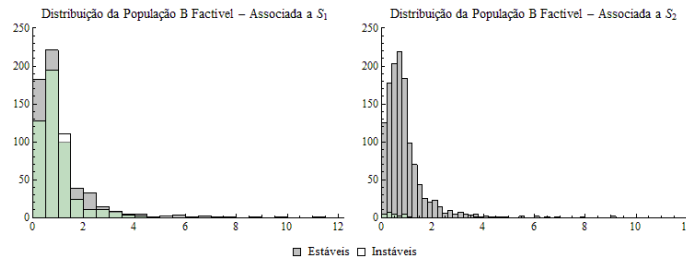


Figura 6: Distribuições das populações  $B$ . À esquerda provenientes de  $S_1$  e à direita provenientes de  $S_2$ .

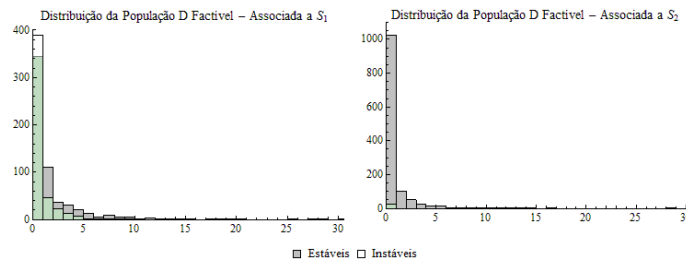


Figura 7: Distribuições das populações  $D$ . À esquerda provenientes de  $S_1$  e à direita provenientes de  $S_2$ .

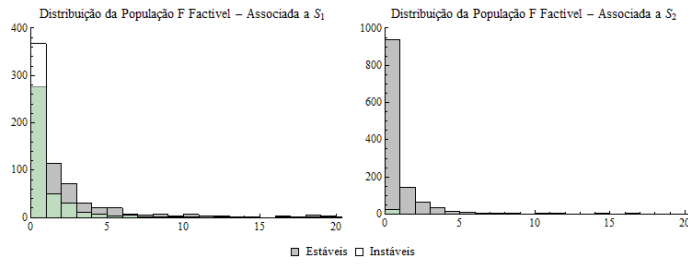


Figura 8: Distribuições das populações  $F$ . À esquerda provenientes de  $S_1$  e à direita provenientes de  $S_2$ .

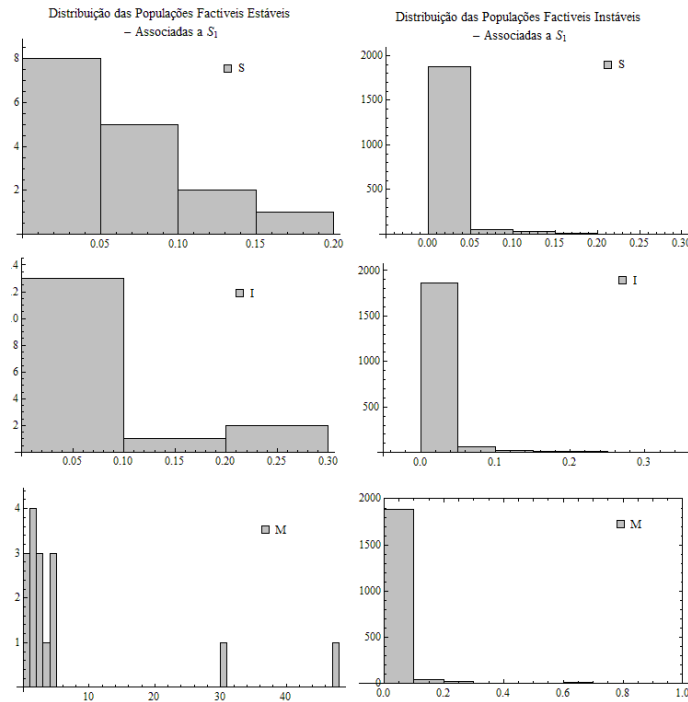


Figura 9: Distribuições das populações  $S_1$ ,  $I$  e  $M$  quando  $B = D = M = 0$ . À esquerda, populações factíveis estáveis e à direita, populações factíveis instáveis.

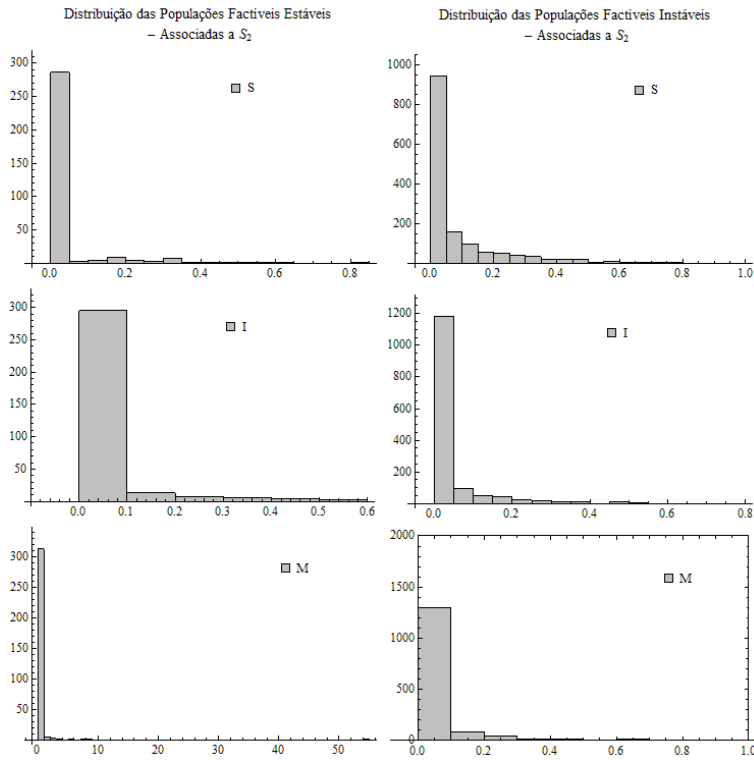


Figura 10: Distribuições das populações  $S_2$ ,  $I$  e  $M$  quando  $B = D = M = 0$ . À esquerda, populações factíveis estáveis e à direita, populações factíveis instáveis.

Posto que o crescimento da população de criação não é limitado, o espectro de valores estacionários assumidos pelas populações  $B$ ,  $D$  e  $F$  é da ordem das dezenas, vide Figuras 6-8. Cabe ressaltar que as curvas de distribuição referentes às populações  $B$  têm seu pico nitadamente ao redor de 1, e não em 0, como as demais distribuições de valores estacionários.

Quanto aos pontos estacionários do tipo  $\overline{\overline{P}}_i$ ,  $i = 1, 2$ ; as distribuições para suas populações estacionárias relativas a  $S_1$  podem ser vistas na Figura 9. E as distribuições para as populações estacionárias relativas a  $S_2$  aparecem na Figura 10.

Os pontos estacionários instáveis do tipo  $\overline{\overline{P}}_1$  apresentam populações  $S_1$ ,  $I$  e  $M$  fortemente concentradas no 0. Os pontos do tipo  $\overline{\overline{P}}_1$  estáveis apresentam comportamento similar para as populações  $S_1$  e  $I$ , mas a população  $M$  tem um

espectro de possibilidades que se estende à ordem da dezena.

Quanto aos pontos estacionários do tipo  $\overline{P_2}$ , é a estabilidade que está intimamente relacionada à concentração de  $S_2$ ,  $I$  e  $M$  ao redor do 0. Já as distribuições das populações relativas a equilíbrios instáveis, e que possivelmente tenderão a zero, se estendem até 0.8.

## 5. Conclusões

Antes de mais nada, cabe dizer, diante dos percentuais da Tabela 2, que os pontos estáveis são menos de 15% do total de pontos estacionários. Sendo os pontos estacionários reais e com todas as componentes não-negativas seu menor subconjunto. Mais da metade dos pontos de equilíbrio é instável e tem todas as componentes reais, mas com ao menos uma população assumindo valor negativo.

Os pontos factíveis do tipo  $\overline{P_i}$ ,  $i = 1, 2$ , não são interessantes por duas razões, primeiramente porque um dos objetivos, que levou à modelagem do problema era minimizar o impacto da infecção sobre as populações  $S$  e  $B$  e, para estes pontos de equilíbrio,  $B = 0$ ; em segundo lugar porque, já partindo de  $B = 0$ , a tendência é que  $S \approx 0$ . De todo modo, os pontos estáveis do tipo  $\overline{P_1}$ , que assumem uma gama maior de valores e que não se concentra tão fortemente ao redor do 0, seriam mais interessantes do que os do tipo  $\overline{P_2}$ .

Dado que o interesse é em equilíbrios que contam com  $B \neq 0$ , a nova abordagem, que se guia pela frequência estatística com a qual um ponto é estável, quando aplicada ao sistema (2.1)-(2.6), permitiu que se concluísse que, em termos de esforços analíticos, o foco deve ser dirigido para os pontos de equilíbrio provenientes de  $S_2$  e seus respectivos autovalores.

O leitor atento reparou que a expressão para obtenção de  $I$  sequer foi apresentada e que os valores das demais populações estacionárias depende diretamente do valor de  $\bar{I}$ . A ausência da expressão para  $\bar{I}$  se deve ao fato de que quando os parâmetros são substituídos pelos valores gerados, trabalhar com a expressão para  $I$  se torna muito mais simples. Mas, dada a relevância de  $\bar{I}$  e o fato de que todos os pontos estacionários contam com esta componente não-nula, a menos da possibilidade de uma combinação ideal de parâmetros, outra conclusão que se tira deste artigo é que seria importante trabalhar analiticamente tal expressão a fim de determinar se é possível obter uma combinação de parâmetros que acarrete em  $\bar{I} = 0$ . E, então, seria possível averiguar o que tal

combinação de parâmetros acarretaria na estabilidade dos pontos estacionários.

Pode ser útil, também, para poder aventar modos de ação, averiguar quais os parâmetros, se algum, determinantes na obtenção de pontos de equilíbrio estáveis, por meio de uma análise de correlação, por exemplo. E, em se obtendo resposta, tentar intervir de maneira a favorecer os cenários desejados.

Como perspectivas futuras de análise da abordagem guiada pela frequência em que um ponto estacionário é estável, tem-se, ainda:

- a averiguação de como os resultados se modificariam a partir de mudanças no limite inferior e superior da distribuição uniforme dos parâmetros;
- o trabalho com outras distribuições para os parâmetros, tais como a distribuição exponencial e Weibull, possivelmente mais adequadas, para os parâmetros do modelo acerca dos quais se dispõe de mais conhecimento.

Por fim, dado que em Souza (2010) foi obtido um esquema numérico de segunda ordem no tempo e no espaço, combinando o Método de Elementos Finitos, o Método de Galerkin e o Método de Crank-Nicolson, para obter uma aproximação numérica para a solução do modelo original dependente das componentes espaciais; um próximo passo seria acoplar a geração de parâmetros e o código que viabiliza as simulações de modo que, para cada conjunto de parâmetros gerados, uma simulação seja executada até que um estado estacionário, não necessariamente independente das coordenadas espaciais, seja atingido.

## Agradecimentos

Presta-se os devidos agradecimentos à CAPES pela bolsa de Pós-Doutorado e ao CNPq, projeto 305862/2013-8, que tornaram este trabalho possível.

## Referências

- Edelstein-Keshet, L. (2004). *Mathematical Models in Biology*. SIAM, Philadelphia.
- Passos, J. R. S. (2006). Sensitivity analysis of lotka-volterra model. In *Anais do XXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. IEEE Ed.
- Ross, S. M. (2006). *Simulation*. Elsevier, California.

Souza, J. M. R. (2010). Estudo da dispersão de risco de epizootias em animais: o caso da influenza aviária. Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP.