

A influência da dispersão de material impactante
em meio aquático na dinâmica populacional
entre duas espécies de peixes: modelo
matemático, aproximação numérica e simulação
computacional - Lagoa do Taquaral -
Campinas/SP

Manoel F. B. Prestes¹ João F. C. A. Meyer²;
DMA, IMECC–UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo. Este artigo visa descrever a influência da evolução de material impactante na Lagoa do Taquaral, na competição entre duas espécies de peixes. Para a modelagem deste fenômeno utilizou-se a o sistema de EDP clássico de Difusão-Advecção, tradicionalmente empregada na modelagem de fenômenos deste gênero, com condições de contorno ditas de Robin para o poluente e Von Neumann para as duas espécies de peixes. Resultados aproximados são obtidos usando o Método das Diferenças Finitas com saídas gráficas qualitativas.

Palavras-chave: *Impacto ambiental, sistema de EDP de difusão-advecção, método das diferenças finitas e simulação computacional.*

1. Introdução

Uma Lagoa, enquanto habitat de espécies de peixes exóticas e nativas identificados na cadeia trófica se constituem em um cenário susceptível à ocorrência de um possível impacto ambiental, sobretudo na presença de algum poluente. Na introdução de novas espécies, portanto, em termos de política

¹ra919008@ime.unicamp.br

²joni@ime.unicamp.br

pública é importante poder contar com um instrumento algorítmico para simular a situação a curto, médio e longo prazos com vistas a estabelecer um manejo mais adequado deste ambiente.

A situação é modelada com um sistema de EDPs, um algoritmo de aproximação é desenvolvido com diferenças finitas e simulações são apresentadas. Esta situação é discutida no estudo desenvolvido no Instituto de Biociências da Unesp de Botucatu (Barreto, 2012). Como exemplo, do ponto de vista dos peixes brasileiros de água doce, a competição com a Tilápia-do-Nilo* configura-se como paradigmática pois além de bastante agressiva e facilmente adaptável a diversas condições aquáticas, a Tilápia-do-Nilo é onívora, disputando o mesmo nicho ecológico com várias espécies nativas, que enfrentam, nesta situação, uma competição para a qual não estão preparadas.

A tilápia sobrevive ainda com facilidade numa faixa enorme de temperatura de 8 °C a 42 °C, tolera algum grau de salinidade na água e não tem medo de encarar uma boa disputa, se o que estiver em jogo for o domínio do local. Além da espécie de Cará † ser severamente ameaçada com a presença da Tilápia, o domínio territorial desta é ruim também para a saúde humana, pois o Cará , alimenta-se também de larvas de um parasita que, uma vez adulto, ao alojar-se no hospedeiro (caramujo) é causador da esquistossomose.

O parasita do caramujo não faz parte da dieta da espécie africana, razão pela qual há cientistas preocupados com o potencial aumento da prevalência desta doença tropical nos lugares em que, acossados pelas tilápias, os carás estão em declínio (Barreto, 2012). O Instituto Hórus de Desenvolvimento e Conservação Ambiental, órgão que cataloga as espécies invasoras no Brasil, estuda meios para minimizar os impactos ambientais gerados pelas Tilápias do Nilo.

A ideia era criá-la em tanques isolados, mantendo-se um sistema rígido de segurança, contudo, atualmente, todos os Estados, exceto o Pará, registram sua ocorrência em rios. O Instituto Hórus classifica a tilápia-do-nilo como espécie invasora “de alto risco” (Barreto, 2012). Estas espécies são citadas porque, mesmo na ausência de parâmetros descritivos das espécies e do efeito dos poluentes, representam um cenário que, de fato, ocorre na Lagoa do Parque

*Peixe africano da espécie *Oreochromis niloticus*, introduzido no Brasil em 1971 por iniciativa do Departamento Nacional de Obras contra a Seca-DNOCS para fomentar a piscicultura e como parte de uma política de erradicação da pobreza da população.

†Peixe da espécie *Geophagus brasiliensis*, podendo ser encontrado em rios de toda América do Sul, que também atende pelos nomes Acará-topete ou Papa-terra.

Portugal, em Campinas/SP, Brasil.

2. Objetivos

- Verificar que a existência de competição das espécies de peixes envolvidas, aliada à presença de material impactante no meio aquático, contribui significativamente para o declínio do Cará, espécie nativa notadamente importante para a saúde pública.

3. Metodologia

Considerando-se modelos clássicos, por exemplo Edelstein-Keshet (1988); Marchuck (1986); Okubo e Levin (1980), apresentamos uma modelagem matemática análoga para esta situação, com uma opção específica em termos do contorno. A equação aqui utilizada é a Equação de Difusão-Advecção, empregada em diversos e diferentes estudos ligados a situações gerais e a análises em Ecologia Matemática cf. Poletti e Meyer (2009).

Iremos considerar como domínio da função concentração a superfície da lagoa constituindo-se de um conjunto aberto, não-vazio, limitado e de fronteira suficientemente regular. Denotamos este domínio como $\Omega \subset R^2$. Optamos por um domínio bidimensional em função das dimensões da lagoa. Iremos denotar por $P(t, x, y)$ a concentração do poluente, $U(t, x, y)$ a população do Cará e $V(t, x, y)$ a população da tilápia do nilo, todas consideradas no instante $t \in I = (0, t]$ e num ponto $(x, y) \in \Omega$. Assim, teremos o seguinte sistema de EDP:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \text{div}(\alpha \nabla P) + \text{div}(P \mathbf{V}) + \sigma P = f, t \in I, (x, y) \in \Omega \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \text{div}(\alpha \nabla U) = \lambda_u U \left(1 - \frac{U}{K_u} - a_u V\right) - (\tau_u P)U, t \in I, (x, y) \in \Omega \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \text{div}(\alpha \nabla V) = \lambda_v V \left(1 - \frac{V}{K_v} + a_v U\right) - (\tau_v P)V, t \in I, (x, y) \in \Omega \quad (3.3)$$

Condições iniciais:

$$P(x, y, 0) = P_0(x, y) \quad \text{distribuição inicial do poluente} \quad (3.4)$$

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y) \quad \text{distribuição inicial da população do Cará} \quad (3.5)$$

$$V(x, y, 0) = V_0(x, y) \quad \text{distribuição inicial da população da Tilápia} \quad (3.6)$$

Quanto às condições de fronteira adotadas neste trabalho, a condição de Robin se apresenta como a melhor opção na modelagem da perda de poluentes para a margem.

$$\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} + b.C = h \quad (3.7)$$

com $(x, y) \in \partial\Omega, t \in (0, T]$ e no caso estudado

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \eta} \right|_{\tau_i} = -\frac{k_i \cdot U}{\alpha} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0$$

onde:

- α representa o coeficiente de difusibilidade descrito anteriormente
- η , denota a normal unitária externa à fronteira
- $k = k_i$ representa o índice de absorção d'água, que varia conforme o agregado considerado, determinando parte da saída do poluente, que varia conforme determinado trecho da fronteira, sendo que, neste trabalho, foram adotados os índices de absorção para o solo $k_i (i = 1, 2, 3)$ representando respectivamente: a areia, a argila o cascalho (Mota e Pejon, 2010).

Ademais, consideramos que na fronteira à jusante (vertedouro) da Lagoa onde há o deságüe, a perda de poluentes é integral $k_i (i = 4)$, sendo que, para tal situação, também utilizamos a condição de Robin homogênea.

4. Caracterização e descrição do domínio

A partição bidimensional do domínio foi realizada de modo a contemplar, da melhor forma possível, a irregularidade existente na fronteira do corpo d'água considerado, dadas as limitações da malha para o Método.

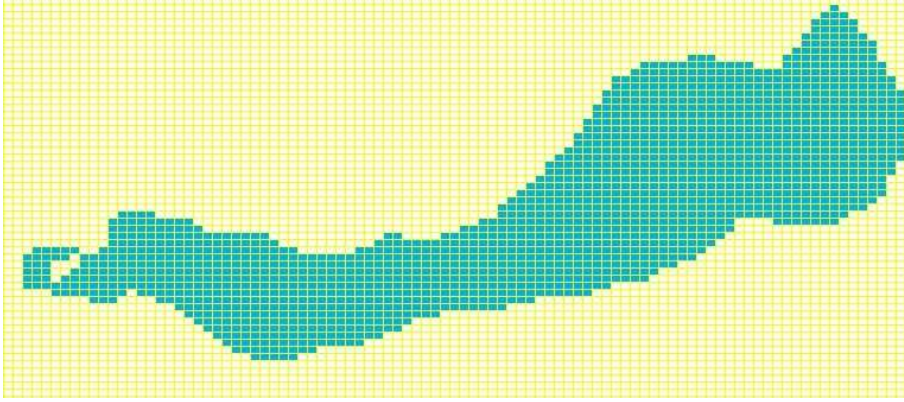


Figura 1: Ilustração do domínio

4.1. Discretização do problema

A discretização foi pelo Método das Diferenças Finitas centradas de 2ª ordem para as variáveis espaciais e Crank-Nicolson, para o tempo, também $O(\Delta t^2)$. Assim, usando a mesma notação do algoritmo e denotando-se por P , U e V respectivamente, a concentração do material impactante, a população do Cará e a população da Tilápia num dado instante, obtêm-se as substituições

$$\frac{\partial P^2}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) \simeq \frac{P_{i-1,j}^n - P_{i,j}^n + P_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_i, y_j, t_n) \simeq \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial P^2}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_n) \simeq \frac{P_{i,j-1}^n - P_{i,j}^n + P_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_i, y_j, t_n) \simeq \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{\Delta y} \quad (4.11)$$

onde os subíndices $i+1$ e $i-1$ identificam respectivamente (para os pontos interiores de Ω), os nós abaixo e acima do par (x_i, y_j) , bem como os subíndices $j+1$ e $j-1$ identificam os nós à esquerda e à direita do par (x_i, y_j) no instante

tn. De modo análogo, se obtêm a discretização para as variáveis espaciais das populações de Cará e Tilápia.

4.2. Discretização pelo método de Crank-Nicolson

No procedimento denominado Crank-Nicolson usamos

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x_i, y_j, t_{n+\Delta t/2}) \simeq \frac{P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

Para usar esta aproximação, estima-se $P_{i,j}^{n+1} = P(x_i, y_j, t_n + \Delta t/2)$ com

$$P_{i,j}^{n+1/2} \simeq \frac{P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n+1}}{2} = P_i^{n+1/2} + O(\Delta t^2) \quad (4.12)$$

Analogamente adotou-se o mesmo critério para obtenção da discretização para as variáveis temporais das populações de Cará e da Tilápia.

5. Procedimentos Numéricos

5.1. Pontos Interiores: parte linear do sistema

$$P_{i-i,j}^{n+1} \left[\frac{-\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} \right] + P_{i,j-1}^{n+1} \left[\frac{-\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta y} \right] \quad (5.13)$$

$$+ P_{i,j}^{n+1} \left[1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{\sigma\Delta t}{2} \right] + P_{i,j+1}^{n+1} \left[\frac{-\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right] \quad (5.14)$$

$$+ P_{i+1,j}^{n+1} \left[\frac{-\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right] = P_{i-i,j}^n \left[\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u\Delta t}{2\Delta x} \right] \quad (5.15)$$

$$+ P_{i,j-1}^n \left[\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta y} \right] + P_{i,j}^n \left[1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{\sigma\Delta t}{2} \right] \quad (5.16)$$

$$+ P_{i,j+1}^n \left[\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right] + P_{i+1,j}^n \left[\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right] + \Delta t f_{i,j}^{n+1/2} \quad (5.17)$$

Na realidade, este esquema identifica a maior parte de um sistema linear da forma: $M.P^{n+1} = N.P^n + \Delta t.f.b$, onde $M = m(i, j)_{i,j}$ e $N = n(i, j)_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq nn$ (nn é o número de nós da malha vista na Figura 2) e com termo independente da forma $b = (b_i)$ com $i = 1, 2, 3...n$ e, finalmente $b_i = \Delta t f_i^{n+1/2}$. Ainda $P^{(0)} = P_i^{(0)}$, $i = 1, 2, 3...nn$. As matrizes M e N são matrizes esparsas e seus elementos não nulos são:

Matriz M	Matriz N
$m_{i,j} = 1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{\sigma\Delta t}{2}$	$q_{i,j} = 1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{\sigma\Delta t}{2}$
$p_{i,j-1} = \frac{-\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v\Delta t}{2\Delta y}$	$q_{i,j-1} = \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v\Delta t}{2\Delta y}$
$p_{i,j+1} = \frac{-\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{2\Delta y}{u\Delta t}$	$q_{i,j+1} = \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{2\Delta y}{u\Delta t}$
$p_{i-1,j} = \frac{2\Delta x^2}{\alpha\Delta t} - \frac{2\Delta x}{u\Delta t}$	$q_{i-1,j} = \frac{2\Delta x^2}{\alpha\Delta t} + \frac{2\Delta x}{u\Delta t}$
$p_{i+1,j} = \frac{2\Delta x^2}{2\Delta x^2} - \frac{4\Delta x}{4\Delta x}$	$q_{i+1,j} = -\frac{2\Delta x^2}{2\Delta x^2} + \frac{4\Delta x}{4\Delta x}$

Além do esquema acima adotado que identifica a primeira equação do sistema de EDP, que descreve o poluente na superfície da Lagoa, os demais, que representam respectivamente a população do Cará (segunda equação do sistema de EDP) e da Tilápia (terceira equação do sistema de EDP), podem ser obtidos similarmente ao anterior, considerando-se para tal, somente a parte linear destes. Por oportuno, convém destacar ainda a existência de uma parte não-linear, que afeta estritamente os elementos das diagonais principais, a qual descrevemos abaixo.

5.2. Pontos Interiores: parte não-linear do sistema

Ademais, acerca da parte não-linear do algoritmo, podemos ilustrar através de outro esquema sem perda de generalidades, os termos que figuram nas diagonais principais, responsáveis, portanto, pela álgebra envolvida na simulação computacional.

Matrizes do Sistema	
Matriz Esquerda: população de Cará	
$p_{i,j} = \dots + \frac{\lambda_u\Delta t}{4k_u}(u_i^{n+1} + u_i^n) + \frac{\lambda_u\Delta t a_u}{4}(v_i^{n+1} + v_i^n) + \frac{\Gamma_u\Delta t}{4}(p_i^{n+1} + p_i^n)$	
Matriz Direita: população de Cará	
$q_{i,j} = \dots - \frac{\lambda_u\Delta t}{4k_u}(u_i^{n+1} + u_i^n) - \frac{\lambda_u\Delta t a_u}{4}(v_i^{n+1} + v_i^n) - \frac{\Gamma_u\Delta t}{4}(p_i^{n+1} + p_i^n)$	
Matriz Esquerda: população de Tilápia	
$p_{i,j} = \dots - \frac{\lambda_v a_v \Delta t}{4}(u_i^{n+1} + u_i^n) + \frac{\lambda_v \Delta t}{4k_v}(v_i^{n+1} + v_i^n) + \frac{\Gamma_u \Delta t}{4}(p_i^{n+1} + p_i^n)$	
Matriz Direita: população de Tilápia	
$q_{i,j} = \dots \frac{\lambda_v a_v \Delta t}{4}(u_i^{n+1} + u_i^n) - \frac{\lambda_v \Delta t}{4k_v}(v_i^{n+1} + v_i^n) - \frac{\Gamma_u \Delta t}{4}(p_i^{n+1} + p_i^n)$	

6. Parâmetros

6.1. Ventos Predominantes

É geral e notória a dificuldade na obtenção de dados de qualidade para o vento. Estes dados são obtidos a partir de locais de observação, onde medidas são realizadas ou são confirmadas por modelos de circulação, tais como o modelo estatístico de Paluszkiwicz (1988) e também através das equações de Navier-Stokes (Oliveira, 2003).

Para o caso em estudo, na região da Lagoa do Taquaral, definiremos os regimes predominantes obtidos das Tabelas de Mahoney (Chvatal, 1998), nas tabelas 1 e 2.

Tabela 1: Direção predominante dos ventos em Campinas.

Meses	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Direção ¹	C	C	C	SE	C	C	C	SE	SE	SE	SE	C
Direção ²	C	C	SE	SE	C	C	SE	SE	SE	SE	SE	SE

¹Valores referentes ao período de 1.978 à 1.994(exceto 1.991 e 1.992)

²Valores referentes ao período de 1.981 à 1.997(exceto 1.991 e 1.992)

onde C denota calmaria (velocidade do vento inferior a $1,8\text{km/h} = 0,5\text{m/s}$)

Tabela 2: Velocidade média dos ventos em Campinas.

Meses	Velocidade ^{1 2} (Km/h)	Velocidade ^{3 4} (m/s)
Jan	6,8	1,9
Fev	6,8	1,9
Mar	7,5	2,1
Abr	8,2	2,3
Mai	7,2	2,0
Jun	6,8	1,9
Jul	9,3	2,6
Ago	10,0	2,8
Set	12,2	3,4
Out	11,8	3,3
Nov	10,4	2,9
Dez	9,3	2,6
Média	9,0	2,5

¹Valores referentes ao período de 1.981 à 1.997(exceto 1.991 e 1.992)

²Velocidade dos ventos coletada à 10 metros de altura da superfície do solo

³Valores referentes ao período de 1.981 à 1.997(exceto 1.991 e 1.992)

⁴Velocidade dos ventos coletada à 10 metros de altura da superfície do solo

De acordo (Barbano et al., 2001), as direções diárias dos ventos coletadas por meio de um Anemógrafo Universal, instalado a 10m do solo, localizado no Posto Meteorológico da Estação Experimental do Instituto Agrônomo de Campinas, aponta também para a direção sudeste, como direção predominante do vento para Campinas, embora, em média, 23,6 % das observações feitas às 14 horas apontem para a direção noroeste, destaca-se também a direção norte, com frequência média mensal em torno de 12,0 %. Deste modo podemos assumir que em Campinas as direções de vento consideradas para gerar cenários serão: sudeste, noroeste e norte.

Quanto à velocidade a ser adotada em relação aos vetores dos ventos atuantes na superfície do corpo aquático, estes foram considerados como sendo 3,0% em relação à velocidade média anual do vento(4), conforme (Oliveira, 2003). Adotando-se a aproximação linear clássica da Equação de Ekman, como sendo:

$$V_{vento} = 0,03 \cdot Vv = 0,03 \cdot 9,0 = 0,27 \text{ km/h.}$$

onde,

V_{vento} : velocidade induzida da corrente e Vv : vetores de vento a 10 metros acima da superfície aquática e que serão invariantes no domínio considerado

7. Resultados

Com os parâmetros aqui adotados e considerando-se a direção sudeste como a preferencial dos ventos, apresentamos qualitativamente o cenário obtido, decorrente da influência do material impactante sobre a dinâmica populacional entre duas espécies de peixes; neste sentido adotou-se o crescimento de Verhulst para às populações, além de se considerarem capacidades de suporte do meio, distintas em relação às espécies.

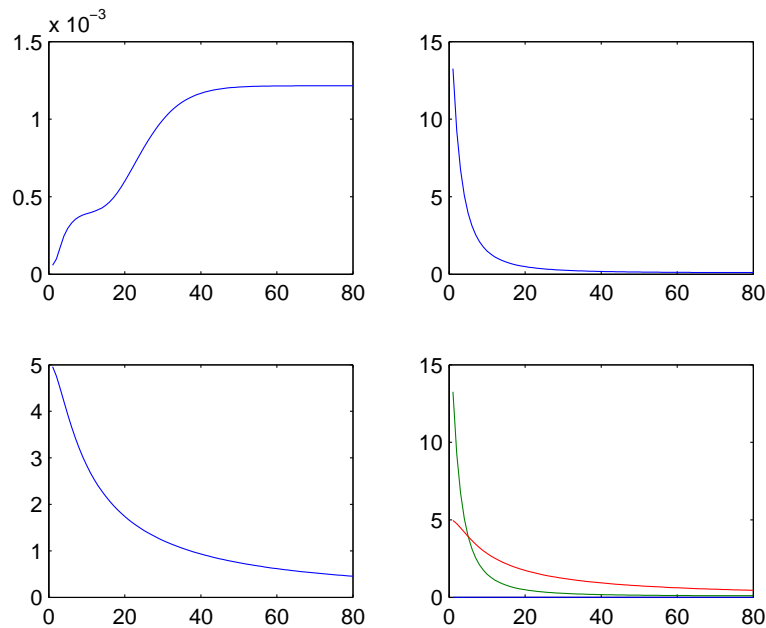


Figura 2: Evolução no tempo: concentração de poluente e populações das espécies de peixes - Nó: 780

8. Conclusões

Tendo em vista a gravidade da situação enfrentada pela população de Cará (nativa) no tocante à competição com a Tilápia do Nilo (exótica), aliada à presença de material impactante no meio aquático, sugeridas acima, visamos, com este trabalho, apontar a necessidade premente de um manejo mais adequado da Lagoa, enquanto acervo ambiental, pelo poder público municipal. Tal situação nos leva a um cenário temerário, como dito anteriormente, pois a redução do Cará responsável diretamente pelo controle da esquistossomose, poderia contribuir para a disseminação da doença, que, de certo modo, se encontra sob controle das autoridades sanitárias.

Apesar dos modelos aqui empregados serem modelos bidimensionais, eles se apóiam em um largo espectro de informações locais obtidas, caracterizando-se, desta forma, como ferramental para possíveis usuários, oferecendo a confi-

abilidade necessária em situações como aquela aqui descrita.

Enfatizamos, ainda, que uma intervenção do poder público se faz necessária através da adoção de medidas mitigadoras na Lagoa, capazes de reduzir significativamente a carga de poluentes gerada no entorno daquela (Lagoa) através de descartes clandestinos de efluentes, aliadas ao manejo adequado das espécies de peixes, medidas essas que poderiam contribuir de forma significativa para o crescimento do Cará, acossado pela espécie invasora (Tilápia do Nilo).

Referências

- Barbano, M. T., Brunini, O., e Pinto, H. S. H. (2001). Direção predominante do vento para a localidade de campinasr. In *XII Congresso Brasileiro de Agrometeorologia*, Santa Maria/RS, Brasil. UFSM.
- Barreto, R. E. (2012). Vale-tudo no aquário. *Revista Unesp-Ciência*, 31:1–3.
- Chvatal, K. M. S. (1998). A prática do projeto arquitetônico em campinas-sp e diretrizes para o projeto de edificações adequadas ao clima. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil/UNICAMP, Campinas/SP, Brasil.
- Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*. McGraw-Hill, México.
- Marchuck, G. I. (1986). *Mathematical Models in Environmental Problems, Studies in Mathematics and its Applications*. Elsevier, North Holland.
- Mota, F. S. e Pejon, O. P. (2010). Análise das relações entre absorção de água e condutividade hidráulica dos solos em estudo de erosão. In *XIV Simpósio Internacional de Iniciação Científica*, São Carlos/SP, Brasil. EESC-USP.
- Okubo, A. e Levin, S. A. (1980). *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*. Springer, Berlin.
- Oliveira, R. F. (2003). *O Comportamento Evolutivo de uma Mancha de Óleo na Baía de Ilha Grande, RJ: Modelagem, Análise Numérica e Simulações*. Tese de Doutorado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP, Brasil.
- Poletti, E. C. C. e Meyer, J. F. C. A. (2009). Dispersão de poluentes em um sistema reservatório: Modelagem matemática via lógica fuzzy e aproximação numérica. *Biomatemática*, 19:57–68.