

Algumas abordagens para o modelo epidemiológico SIS fuzzy: doença de Chagas aguda

Francielle S. Pedro¹, Laécio C. Barros²
DMA, IMECC–UNICAMP, 13083-859, Campinas/SP.

Resumo. A doença de chagas aguda é um tipo caso de modelo epidemiológico SIS (suscetível-infectado-susceptível). O modelo *SIS* é caracterizado por não fornecer imunidade permanente aos indivíduos que se recuperaram da infecção, fazendo com que esses retornem à classe dos suscetíveis. Consideramos duas abordagens diferentes para o modelo *SIS*; uma, com o uso de *t*-normas para modelar o encontro entre indivíduos e outra baseada no sistema de inferência de Mamdani para descrever a evolução do número de infectados.

Palavras-chave: Doença de Chagas; modelo *SIS*; *t*-norma; controlador fuzzy.

1. Introdução

O modelo SIS é caracterizado por não oferecer imunidade permanente aos indivíduos que se recuperam da infecção, fazendo com que estes voltem a ser suscetíveis. Quando as variações das taxas de natalidade e mortalidade não são significativas na população total, podemos descartá-las de modo que no modelo assume-se que a população total é constante em cada instante (Soares, 2010; Edelstein-Keshet, 1988).

Assim,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda xy + \beta y; & x(0) = x_0 > 0 \\ \frac{dy}{dt} = \lambda xy - \beta y; & y(0) = y_0 > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

¹fran.stopedro@gmail.com

²laeciocb@ime.unicamp.br

sendo $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, as frações de indivíduos suscetíveis e infectados no instante t ; o parâmetro $\lambda > 0$ é a taxa de transmissão da doença e $\beta > 0$ é a taxa de retorno dos infectados ao grupo de suscetíveis. Como supomos que o total da população é constante, temos $x + y = 1$. Além disso, é importante observar que sempre teremos $\beta \ll \lambda$.

Tradicionalmente assume-se que a taxa de transmissão é proporcional ao número de encontros de indivíduos suscetíveis e infectados, usualmente modelado pelo produto entre suas densidades (quantidades) (Massad et al., 2008; Edelstein-Keshet, 1988; Barros e Bassanezi, 2010). Dessa forma, para estender a maneira de descrever a interação de duas populações, usamos uma classe de operadores, chamada t -norma, onde a operação produto é um caso especial.

1.1 Doença de Chagas aguda

A *doença de Chagas*, também chamada tripanossomíase americana, foi descoberta por Carlos Chagas por volta de 1909. A doença de Chagas é uma infecção causada pelo protozoário cinetoplástida flagelado *trypanosoma cruzi* e transmitida por um inseto conhecido como *barbeiro*.

A doença de Chagas se manifesta em três etapas distintas: No primeiro momento há o que os epidemiologistas chamam de fase aguda que dura em média 3 a 8 semanas, seguida pela fase crônica que dura em média 15 a 20 anos e por último a fase clínica que é a fase final da doença. A fase crônica pode ser subdividida em três: fase indeterminada, cardíaca e digestiva (Júnior, 2002; Coura, 1988).

Na fase aguda, também denominada fase assintomática (devido ao fato do doente chagásico ser praticamente assintomático) a vítima apresenta apenas uma reação local à picada em conjunto com febre alta contínua ou intermitentemente, cansaço e desânimo. Nessa fase apenas 1% dos casos são diagnosticados e desses apenas 7% se recuperam. Assim, quando diagnosticadas cedo existe a possibilidade de cura através de tratamentos clínico específicos que podem durar um mês (Júnior, 2002).

A doença de Chagas é do tipo *SIS*, pois na fase aguda e crônica inicial ela possui chances de cura (Júnior, 2002). Da mesma forma que Velasco-Hernández (1991) e Júnior (2002), iremos agregar as fase aguda e crônica em uma só, pois isso não altera o comportamento qualitativo da doença. Dos dados obtidos pelo Ministério da Saúde da Doença de chagas aguda durante o período de 2005 até 2009 (distribuição anual) e de Júnior (2002), nós ajustamos os parâmetros do

modelo. A figura 1 mostra a distribuição anual de casos da doença de Chagas aguda no Brasil de 2005 até 2009. A figura 2 mostra a curva de solução de indivíduos infectados no modelo clássico (1.1).

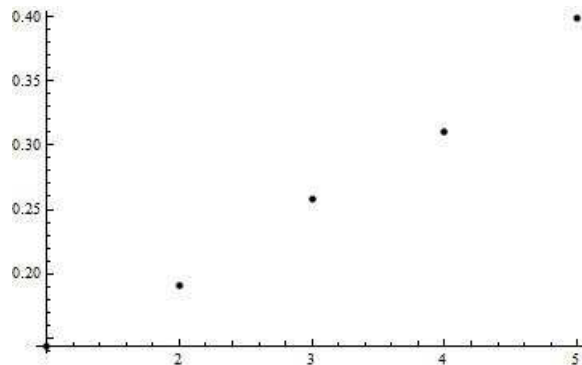


Figura 1: Distribuição anual de casos da doença de chagas aguda, Brasil, 2005–2009 (Ministério da Saúde).

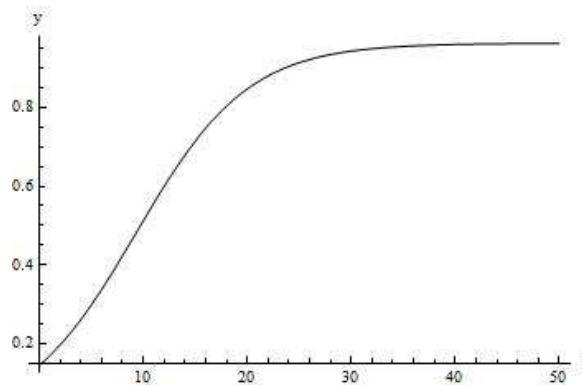


Figura 2: Solução de infectados no modelo clássico com condição inicial 0.144, $\beta = 0.007$ e $\lambda = 0.1934$ obtidos a partir dos dados.

Na secção 3, apresentaremos outros modelos, além do (1.1). Os casos 1) e 2) são obtidos de (1.1), onde trocamos a t -norma do produto por outras t -normas.

2. Preliminares

As t -normas são importantes operações entre conjuntos fuzzy (Klement et al., 2000; Massad et al., 2008; Pedrycz e Gomide, 2007). Uma t -norma T é uma operação binária $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz quatro propriedades:

- elemento neutro: $1Tx = x$;
- comutativa: $xTy = yTx$;
- associativa: $xT(yTz) = (xTy)Tz$;
- monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $xTy \leq uTv$.

Alguns exemplos de t -norma são: $T_1(x, y) = xy$, $T_2(x, y) = \min\{x, y\}$ e

$$T_3(x, y) = \frac{xy}{p + (1 - p)(x + y - xy)}, p \geq 0.$$

Outra metodologia adotada em nosso estudo para produzir a evolução do número de infectados são os conhecidos sistemas de base de regras fuzzy (SBRF), são formados por quatro passos (Barros e Bassanezi, 2010):

- Processador de entrada;
- Base de Regras;
- Inferência Fuzzy de Mamdani;
- Processador de saída (defuzzificação).

Este sistema será melhor formalizado na seção 3.

3. Metodologia e aplicação

Em todos os modelos apresentados a seguir vamos utilizar: condição inicial sendo 0.144, $\lambda = 0.1934$ e $\beta = 0.007$ obtidos a partir dos dados.

3.1. Modelo SIS com t -norma do mínimo

Essa abordagem se dá da seguinte forma: quando a fração de indivíduos suscetíveis é muito pequena, a variação da população de suscetíveis cai proporcional a essa população, ou seja, quanto menor o número de indivíduos

suscetíveis menor será o decaimento desta. Por outro lado, quando a fração de infectados for muito pequena a variação desses indivíduos também é pequena. Em ambos os casos, a taxa de transmissão é proporcional ao mínimo entre suscetíveis e infectados (Pedro e Barros, 2013; Simões, 2013).

Assim obtemos,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda(x \wedge y) + \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \lambda(x \wedge y) - \beta y \end{cases} . \quad (3.2)$$

A solução de (3.2) é dada por

$$y(t) = \begin{cases} y_0 e^{(\lambda-\beta)t} & \text{se } t \leq \bar{t} \\ \frac{0.5(\beta-\lambda)e^{-(\beta+\lambda)(t-\bar{t})} + \lambda}{\beta + \lambda} & \text{se } t > \bar{t} \end{cases} , \quad (3.3)$$

sendo $\bar{t} = \frac{1}{(\lambda-\beta)} \ln \frac{0.5}{y_0}$ e podemos vê-la na Figura 3.

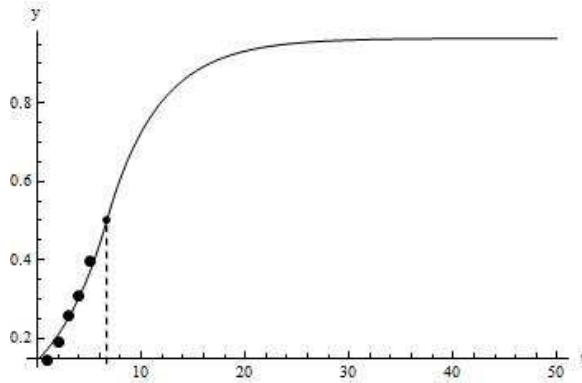


Figura 3: Solução de infectados com a t -norma do mínimo e dados.

3.2. Modelo SIS com t -norma de Hamacher

A t -norma de Hamacher é dada por

$$T_3(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{p + (1-p)(x+y-xy)} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} , \quad (3.4)$$

sendo $x, y \in [0, 1]$. Portanto,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{-\lambda xy}{p+(1-p)(x+y-xy)} + \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\lambda xy}{p+(1-p)(x+y-xy)} - \beta y \end{cases} \quad (3.5)$$

Em (3.5) não temos a solução explícita para qualquer p , mas a solução numérica é mostrada na Figura 4 para vários valores de p .

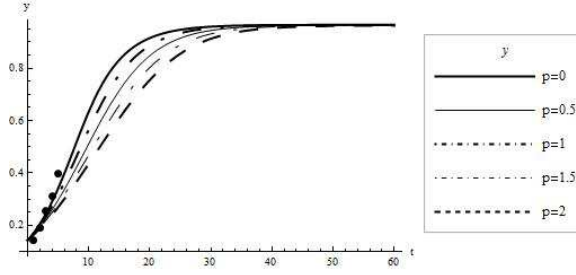


Figura 4: Solução com a t -norma de Hamacher para diversos valores de p e dados.

O ponto de inflexão da solução usando a t -norma do mínimo é $y = 0.5$ e os pontos de inflexão usando a t -norma de Hamacher são apresentados na Tabela 1

t -norma de Hamacher	Ponto de inflexão
$p=0$	$y=0.4898$
$p=0.5$	$y=0.4861$
$p=1$	$y=0.4819$
$p=1.5$	$y=0.4771$
$p=2$	$y=0.4717$

A importância em se reconhecer a fase assintótica (fase aguda e crônica inicial) é pelo fato dela ser o “marcador” da potencialidade da parasitose em vigência numa região (Dias e Coura, 1997). Além disso, os modelos que assumem população constante e não envolvem hospedeiro além dos humanos,

podem ser úteis na descrição da tendência geral da doença (Velasco-Hernández, 1991). Indivíduos infectados em regiões endêmicas estão sujeitos a contínuos ataques por vetores (Babeiros), produzindo potencialmente uma nova infecção mesmo quando ela já está presente na população. Esse processo poderia ser a causa início do estágio agudo da doença em áreas endêmicas.

De fato, a investida (ou início da reação) da infecção aguda é produzida depois de reinfecções contínuas do parasita (Coura, 1988; Velasco-Hernández, 1991). Assim, o ponto de inflexão indica uma situação importante na população endêmica, pois indica que até esse momento ainda há reinfecção na população, ou seja, o vetor ainda está atuante naquela região. A Tabela 1 apresenta valores de inflexões para diversos valores de p na t -norma de Hamacher.

A Figura 5 mostra a solução de infectados para diferentes t -normas.

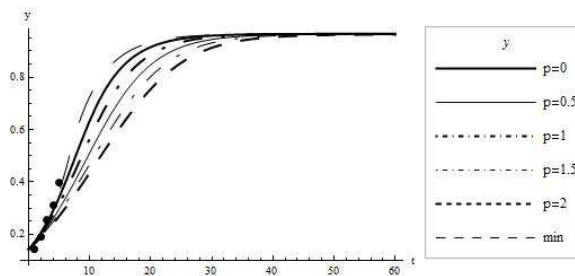


Figura 5: Solução de infectados com t -norma e dados.

Note que em $p = 1$, temos que o modelo (3.5) torna-se o modelo (1.1). A seguir faremos uma abordagem um pouco diferente utilizando o controlador fuzzy do tipo Mamdani para obter a curva de infectados.

3.3. Modelo SIS via controlador fuzzy do tipo Mamdani

Neste caso usamos a regra de base para descrever taxa de variação. As regras foram elaboradas baseando-se em conhecimento de especialistas. Para formular a base de regras usamos como variável de entrada o número de indivíduos infectados (y) e como variável de saída, usamos avariação relativa (denotada por $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$).

As regras seguem abaixo:

- Se y é baixo então $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é baixa positiva;

- Se y é médio baixo então $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é alta positiva;
- Se y é médio alto então $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é baixa positiva;
- Se y é alto então $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$ é baixa negativa.

As Figuras 6 e 7 mostram as funções de pertinência para y e $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$.

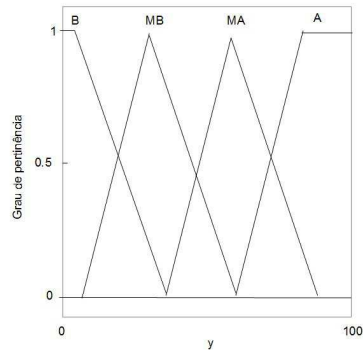


Figura 6: Funções de pertinência para a variável linguística y .

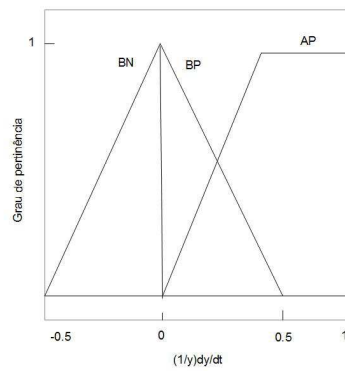


Figura 7: Funções de pertinência para a variável linguística $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt}$.

Com a ajuda de um especialista e com a metodologia descrita na Seção 2, pode-se obter uma função f . Em seguida, de maneira tradicional, é possível resolver a seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(y).$$

Portanto, f não é conhecida explicitamente uma vez que ela é dada por um sistema de base de regras fuzzy. Assim, podemos adotar um método numérico (Runge-Kutta, por exemplo) para obter a solução do problema (L. C. Barros e Bassanezi, 2014). A Figura 8 mostra o sistema fuzzy acoplado para o método numérico de Runge-Kutta e a Figura 9 mostra o número de infectados dado por este esquema.

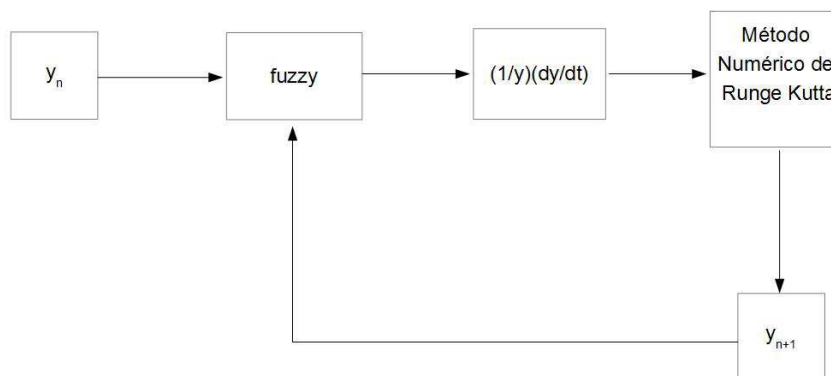


Figura 8: Método iterativo.

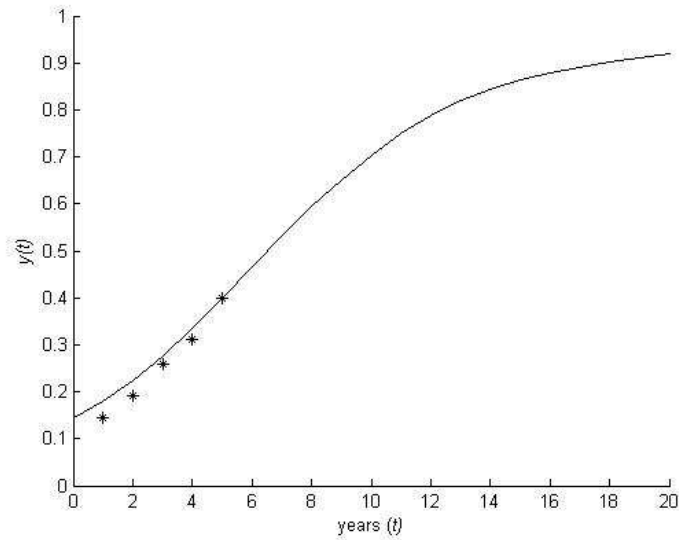


Figura 9: Solução via controlador fuzzy do tipo Mamdani com condição inicial 0.144.

4. Conclusão

Através de dados obtidos do Nordeste brasileiro, modelamos a doença de chagas aguda de formas não usuais (i.e. t -normas diferentes do produto) e mostramos que podemos obter soluções tão boas ou mesmo melhores do que aquelas encontradas por métodos tradicionais, i.e. a t -norma do produto.

Os dados foram utilizados para ajustar as curvas em ambos os modelos da Seção 3. Os dois modelos mostrados aqui são bem representativos, sendo que o modelo utilizando a t -norma de Hamacher engloba o caso clássico. A vantagem de usá-la é que, dependendo da situação, podemos decidir qual seria a melhor t -norma a aplicar em uma determinada região, a fim de melhor representar o fenômeno.

Embora tenhamos usado conceitos fuzzy em que cada instante a solução é real (crisp). Não é o caso quando utilizamos equações diferenciais fuzzy para resolver isso (Barros et al., 2013).

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq pela ajuda financeira (processos 141085/2014 – 2 e 305862/2013 – 8)

Referências

- Barros, L. e Bassanezi, R. C. (2010). *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Unicamp-Imecc.
- Barros, L. C., Gomes, L. T., e Tonelli, P. A. (2013). Fuzzy differential equations: an approach via fuzzification of the derivative operator. *Fuzzy Sets and Systems*, 230:39–52.
- Coura, J. (1988). Determinantes epidemiológicos da doença de chagas no brasil: a infecção, a doença e sua morbi-mortalidade. *Memórias do Instituto Oswaldo Cruz*, 83:392–402.
- Dias, J. C. P. e Coura, J. R. (1997). *Clínica e terapêutica da doença de Chagas: uma abordagem prática para o clínico geral*. Editora Fiocruz.
- Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical models in biology*, volume 46. SIAM.
- Júnior, D. S. A. (2002). Um estudo sobre epidemiologia matemática: a doença de chagas. Dissertação de Mestrado, State University of Campinas (UNICAMP).
- Klement, E. P., Mesiar, R., e Pap, E. (2000). *Triangular norms*. Springer.
- L. C. Barros, R. Zotin, M. B. L. e Bassanezi, R. C. (2014). Epidemiological models of directly transmitted diseases: an approach via fuzzy sets theory. In *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*.
- Massad, E., Barros, L. C., Kacprzyk, J., Ortega, N. R. S., e Struchiner, C. J. (2008). Fuzzy logic in action: Applications in epidemiology and beyond. *Studies*.
- Pedro, F. S. e Barros, L. C. (2013). The use of t-norms in mathematical models of epidemics. In *Fuzzy Systems (FUZZ), 2013 IEEE International Conference on*. IEEE. Forthcoming.

- Pedrycz, W. e Gomide, F. (2007). *Fuzzy systems engineering: toward human-centric computing*. John Wiley & Sons.
- Simões, F. S. P. (2013). Modelos matemáticos para dinâmica de doenças de transmissão direta e de presa-predador considerando parâmetros interativos e t-normas. Dissertação de Mestrado.
- Soares, A. L. O. (2010). Modelagem alternativa para sistemas epidemiológicos. Dissertação de Mestrado, Federal University of ABC (UFABC).
- Velasco-Hernández, J. X. (1991). An epidemiological model for the dynamics of chagas' disease. *BioSystems*, 26(2):127–134.