

# Uso de $t$ -normas em modelos matemáticos de presa-predador.

Francielle Santo Pedro<sup>1</sup>, Laécio C. Barros<sup>2</sup>,  
DMA, IMECC, UNICAMP – 13.083-970, Campinas/SP.

**Resumo.** Neste trabalho propomos que a interação entre espécies seja modelada por  $t$ -normas mais gerais. Neste caso, apesar da modelagem do sistema ser feita através de lógica fuzzy, as soluções dessas equações são determinísticas.

**Palavras-chave:** Modelos fuzzy;  $t$ -norma de Hamacher;  $t$ -norma do mínimo; interação interespecífica.

## 1. Introdução

Geralmente modelamos a interação entre espécies e/ou indivíduos pela “lei” de ação de massas derivada da físico-química, que afirma que a taxa de colisões moleculares de duas substâncias químicas é proporcional ao produto das suas concentrações (Edelstein-Keshet, 2005). Chamamos atenção para o fato que a operação produto é um tipo particular de  $t$ -norma e, dessa forma, vamos investigar o uso de  $t$ -normas mais gerais na modelagem dessas interações, uma vez que possuem o mesmo comportamento qualitativo.

## 2. Modelo presa-predador

O modelo clássico de dinâmica de interação entre duas espécies de Lotka-Volterra utiliza a hipótese de que a taxa de predação está relacionada com a probabilidade de um predador encontrar uma presa. O modelo, conforme

---

<sup>1</sup>fran.stopedro@gmail.com

<sup>2</sup>laeciob@ime.unicamp.br

Edelstein-Keshet (2005); Murray (2002), é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}, \quad (2.1)$$

sendo  $x, y$  o número (ou densidade) de presas e predadores, respectivamente;  $a > 0$  a taxa de crescimento de presas,  $c > 0$  a taxa de mortalidade de predadores,  $b > 0$  a proporção de sucesso dos ataques dos predadores e  $d > 0$  a taxa de conversão de biomassa das presas em predadores. Os pontos de equilíbrio do modelo são os pontos  $P = (0, 0)$  sela instável e  $Q = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  centro (ver: Bassanezi e Ferreira Jr., 1988; Edelstein-Keshet, 2005; Murray, 2002). O plano de fase e a solução de (2.1) podem ser vistos nas figuras 1 e 2.

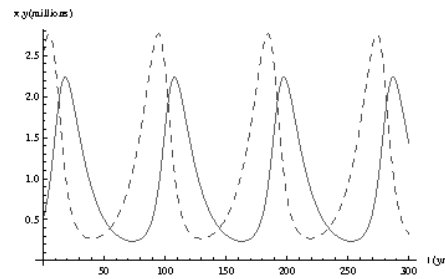
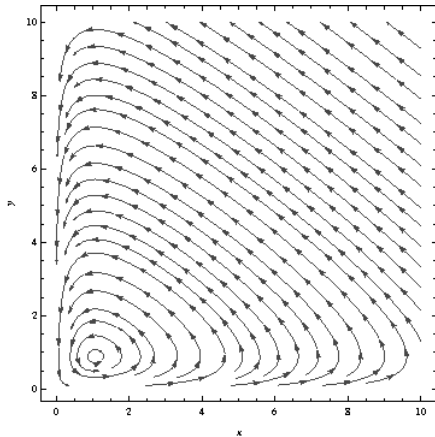


Figura 1: Plano de fase do modelo (2.1) sendo  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ .

Figura 2: Solução  $x, y$  (milhões) por tempo  $t$  (anos), sendo a curva  $x$  em tracejado as presas.

Modelos de interação entre espécies devem satisfazer as seguintes hipóteses (Edelstein-Keshet, 2005):

- h1. Para sobreviver, os predadores dependem da presença de presas;
- h2. A taxa de predação depende da probabilidade em que uma presa interage com um predador;
- h3. A taxa de crescimento da população de predadores é proporcional a ingestão de alimentos (taxa de predação).

Em outras palavras, a interação entre a presa e o predador é favorável para o predador e prejudicial para a presa.

Em Kreinovich e Fuentes (2011) temos a seguinte observação: se o habitat onde as presas e predadores convivem é pequeno, a predação acontece rapidamente desde que haja presas suficiente. Dessa forma, temos que se o número de presas é maior do que o de predadores, a taxa de predação será predominantemente, determinada pelo número de predadores e, em situação contrária, se houver mais predadores do que presas essa taxa será proporcional ao número de presas. Portanto, em ambos os casos, a taxa de predação é proporcional ao mínimo entre presas e predadores.

Com base nessas observações, surgiu nossa inspiração para o uso de  $t$ -normas diferentes da  $t$ -norma do produto e trataremos desse assunto na próxima seção.

### 2.1. Presa-predador de Lotka-Volterra com a $t$ -norma do mínimo

O conceito de  $t$ -norma é importante para interpretação de conjunções e também para operações entre conjuntos fuzzy (Klement et al., 2000; Massad et al., 2009; Pedrycz e Gomide, 2007; Simões, 2013; Barros e Bassanezi, 2006). Uma  $t$ -norma  $T$  é uma operação binária  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz quatro propriedades:

- elemento neutro:  $1Tx = x$ ;
- comutativa:  $xTy = yTx$ ;
- associativa:  $xT(yTz) = (xTy)Tz$ ;
- monotonicidade: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $xTy \leq uTv$ .

Alguns exemplos de  $t$ -norma são:  $T_1(x, y) = xy$ ,  $T_2(x, y) = \min\{x, y\}$  e  $T_3(x, y) = \frac{xy}{x+y-xy}$ .

Notamos que a operação produto é um caso particular de  $t$ -normas. Assim, faremos uso destas para modelar a interação entre as espécies envolvidas. Com base nas observações de (Kreinovich e Fuentes, 2011), vamos inicialmente adotar a  $t$ -norma do mínimo ( $T_2(x, y)$ ) na interação entre as espécies. Dessa forma,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - b(x \wedge y) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + d(x \wedge y) \end{cases} \quad (2.2)$$

O modelo (2.2) satisfaz as hipóteses  $h1$ ,  $h2$  e  $h3$ , pois os predadores precisam das presas para sobreviver e a taxa de predação depende da interação entre eles (que nesse caso é dado pelo mínimo). O único ponto de equilíbrio desse sistema é dado por  $(x, y) = (0, 0)$  e analisando a matriz do Jacobiano de (2.2) neste ponto, obtemos:

- para  $x > y$  os autovalores são  $a > 0$  e  $d - c$ , ou seja, o ponto  $(0, 0)$  é nó instável se  $d - c > 0$  e ponto de sela se  $d - c < 0$ .
- para  $x < y$  os autovalores são  $c > 0$  e  $a - b$ , ou seja, o ponto  $(0, 0)$  é nó instável se  $a - b > 0$  e ponto de sela se  $a - b < 0$ .

Na figura 3, o ponto  $(0, 0)$  é ponto de sela em (2.2) da mesma forma que o é em (2.1). Chamamos atenção para o fato de que o modelo (2.2) é baseado na  $t$ -norma do mínimo, pois as populações de presas e predadores não variam apenas no intervalo  $[0, 1]$  onde está definida a  $t$ -norma.

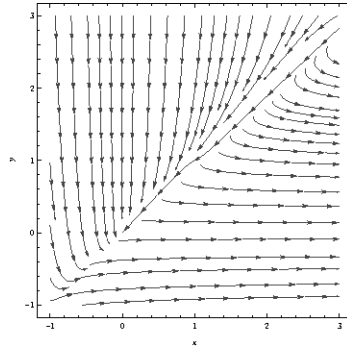


Figura 3: Plano de fase do modelo 2.2, sendo  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ .

Com o propósito de aprimorar nossa modelagem utilizaremos a  $t$ -norma de Hamacher. Veremos isso na próxima seção.

## 2.2. Presa-predador de Lotka-Volterra com a $t$ -norma de Hamacher

A  $t$ -norma de Hamacher é dada por

$$T_3(x, y) = \frac{xy}{p + (1-p)(x + y - xy)}, \quad (2.3)$$

(Klement et al., 2000; Pedrycz e Gomide, 2007) para  $p \neq 0$  temos  $x, y \in [0, 1]$  (se  $p = 0$ ,  $x, y \neq 0$ ).

Substituindo o produto entre as populações  $x$  e  $y$  por (2.3) em (2.1), obtemos o seguinte modelo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \frac{bxy}{p+(1-p)(x+y-xy)} \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \frac{dxy}{p+(1-p)(x+y-xy)} \end{cases}, \quad (2.4)$$

sendo  $a, b, c$  e  $d$  como em (2.1).

Como o modelo anterior, o modelo (2.1), é baseado na  $t$ -norma de Hamacher. O modelo (2.4) satisfaz todas as hipóteses ( $h1 - h3$ ) de um sistema presa-predador, pois os predadores precisam das presas para sobreviver, a taxa de predação é proporcional a interação (dada por (2.3)) entre os indivíduos e o crescimento dos predadores é proporcional a taxa de predação.

Nas figuras 4 e 5 estão ilustradas as soluções do modelo (2.4) obtidas através de uma análise numérica para alguns valores de  $p$ .

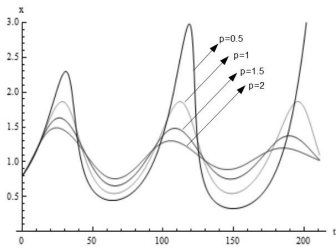


Figura 4: Solução  $x$  por tempo  $t$ , sendo  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ .

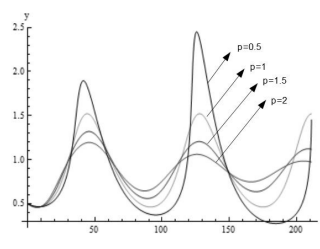


Figura 5: Solução  $y$  por tempo  $t$ , sendo  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ .

Fazendo  $\frac{dx}{dt} = 0$  e  $\frac{dy}{dt} = 0$ , obtemos, para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , as isóclinas

$$y_1 = \frac{a(p(x-1) - x)}{-b + a(1 + p(x-1) - x)}$$

e

$$y_2 = \frac{c(p(x-1) - x) + dx}{c(p-1)(x-1)}.$$

Para os parâmetros  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ , obtemos os seguintes pontos de equilíbrios

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{-0.54 + 1.1p}{p-1} \pm 0.004 \sqrt{\frac{14641 + 706p + 529p^2}{(p-1)^2}}$$

e

$$(\bar{x}_3, \bar{y}_3) = (0, 0).$$

A matriz jacobiana é dada por

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{b(1-p)x(1-y)y}{(p+(1-p)(x+y-xy))^2} & \frac{b(1-p)(1-x)xy}{(p+(1-p)(x+y-xy))^2} - \frac{bc}{d} \\ -\frac{d(1-p)x(1-y)y}{(p+(1-p)(x+y-xy))^2} + \frac{ad}{b} & -\frac{d(1-p)(1-x)xy}{(p+(1-p)(x+y-xy))^2} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Calculamos, para alguns valores de  $p$ , os pontos de equilíbrio do modelo (2.4) como podemos ver na Tabela 1.

Tabela 1: Pontos de equilíbrio de (2.4) para diversos valores de  $p$ , sendo  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ .

$p$	$(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$	$(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$	$(\bar{x}_3, \bar{y}_3)$
0	(1.08, 0.896)		
0.3	(-0.479, -0.397)	(0, 0)	(1.077, 0.894)
0.5	(-1.12, 0.942)	(0, 0)	(1.075, 0.892)
0.7	(-2.618, -2.172)	(0, 0)	(1.074, 0.891)
1	(0, 0)	(1.071, 0.889)	
1.5	(0, 0)	(1.067, 0.885)	(3.38, 2.81)
2	(0, 0)	(1.063, 0.882)	(2.266, 1.88)
100	(0, 0)	(1.003, 0.832)	(1.212, 1.006)
1000	(0, 0)	(1.000, 0.829)	(1.206, 1.000)

Percebemos que para  $p = 0.5$ , conforme o tempo aumenta os picos das soluções também aumentam em relação as demais, isso tanto para as presas quanto para os predadores, seguido pelos picos das soluções com  $p = 1$ , ( $t$ -norma do produto),  $p = 1.5$  e  $p = 2$ . Entre um pico e outro a ordem das curvas invertem, ou seja, quanto mais as presas crescem, maior será a sua oferta para os predadores.

O plano de fase, para diversos valores de  $p$ , pode ser visto nas figuras 6 à 10.

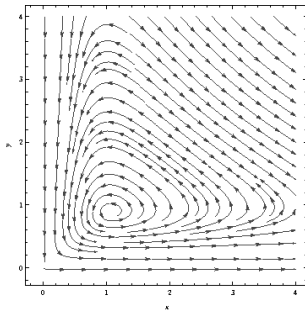


Figura 6: Plano de fase da solução com  $p = 0$ .

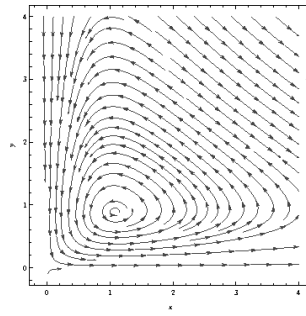


Figura 7: Plano de fase da solução com  $p = 0.5$ .

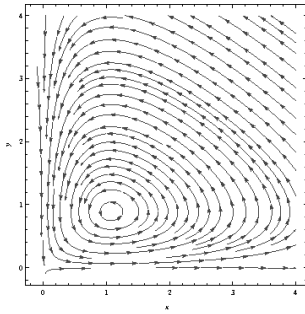


Figura 8: Plano de fase da solução com  $p = 1$ .

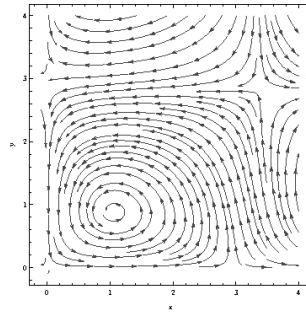


Figura 9: Plano de fase da solução com  $p = 1.5$ .

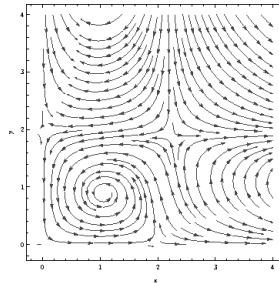


Figura 10: Plano de fase da solução com  $p = 2$ .

Através da análise dos autovalores da matriz do jacobiano (2.5) do problema linearizado descritos nas figuras 6 à 10, obtemos:

- Para  $p = 0$ , o ponto de equilíbrio  $P = (1.08, 0.896)$  é centro instável.
- Para  $p = 0.5$ , os pontos de equilíbrio  $P = (0, 0)$  é ponto de sela e  $Q = (1.075, 0.892)$  é centro instável.
- Para  $p = 1$  (figura 8), temos que o modelo (2.4) é o próprio modelo de Lotka-Volterra e ele é analisado na primeira secção desde capítulo.
- Para  $p = 1.5$ , os ponto de equilíbrio  $P = (1.067, 0.885)$  é centro estável,  $P = (0, 0)$  e  $Q = (3.38, 2.81)$  são pontos de sela.
- Para  $p = 2$ , os pontos de equilíbrio  $P = (1.063, 0.882)$  é centro estável,  $Q = (2.266, 1.88)$  e  $R = (0, 0)$  são pontos de sela.

Desta forma, notamos que para  $p < 1$  temos pontos de equilíbrios repulsores, para  $p = 1$  temos órbitas fechadas em torno do ponto de equilíbrio e para  $p > 1$  temos pontos de equilíbrio atratores e pontos de sela.

Podemos interpretar o parâmetro  $p$  como a dificuldade da interação entre as espécies envolvidas, pois como vemos nas figuras 4 e 5 quando  $p = 1$  a interação dada é probabilística (próprio Lotka-Volterra), ver figura 8. Para valores de  $p > 1$  (figuras 9 e 10), a dificuldade de interação aumenta, isto é, a interação depende de fatores mais específicos, como por exemplo, o habitat, a habilidade ou até mesmo a falta desta, mudanças de hábito entre outras.

Já quando o parâmetro  $0 \leq p < 1$  (figuras 6 e 7), a interação ocorre facilmente, ocasionando um favorecimento de ambas as espécies com o passar do tempo (Simões, 2013).

Portanto, o modelo (2.4) é determinado pela escolha do parâmetro  $p$ , pois ele determinará a estabilidade do sistema, obtendo assim uma ferramenta a mais na modelagem desse fenômeno.

### 3. Conclusões

Neste trabalho modelamos a interação entre espécies por meio de  $t$ -normas diferentes da tradicional  $t$ -norma do produto ( $T(x, y) = xy$ ) e fizemos isso através do uso das  $t$ -normas do mínimo ( $T(x, y) = x \wedge y$ ) e da  $t$ -norma de Hamacher ( $T(x, y) = \frac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$ ).

No modelo presa-predador de Lotka-Volterra (2.1) trocamos a  $t$ -norma do produto, na interação entre espécies, pelo uso da  $t$ -norma do mínimo que apresentou resultados bem interessantes.



Já no uso da  $t$ -norma de Hamacher na interação entre presa e predador os resultados foram significantes, pois conseguimos mais um parâmetro para a modelagem do fenômeno. Este parâmetro ( $p$ ) ajusta a dificuldade (ou facilidade) da interação entre as espécies envolvidas e dependendo do valor adotado para  $p$ , nosso sistema tem comportamentos bem diferenciados uns dos outros.

Por exemplo, para  $p = 1$  temos o modelo de Lotka-Volterra, para  $p < 1$  temos pontos de equilíbrios repulsivos e para  $p > 1$  pontos de equilíbrio atrativos e de sela. Assim, ajustamos nosso modelo de acordo com o problema proposto.

## Referências

- Barros, L. C. d. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Unicamp-Imecc.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações diferenciais: com aplicações*. Harbra.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical models in biology*, volume 46. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E., e Klement, E. (2000). *Triangular norms*. Kluwer Academic Publishers Dordrecht.
- Kreinovich, V. e Fuentes, O. (2011). High-concentration chemical computing techniques for solving hard-to-solve problems, and their relation to numerical optimization, neural computing, reasoning under uncertainty, and freedom of choice.
- Massad, E., Ortega, N. R. S., de Barros, L. C., e Struchiner, C. J. (2009). *Fuzzy logic in action: Applications in epidemiology and beyond*, volume 232. springer.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction*. Springer, New York.
- Pedrycz, W. e Gomide, F. (2007). *Fuzzy systems engineering: toward human-centric computing*. Wiley-IEEE Press.

Simões, F. S. P. (2013). Modelos matemáticos para dinâmica de doenças de transmissão direta e de presa-predador considerando parâmetros interativos e t-normas. Dissertação de Mestrado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP, Brazil (*in Portuguese*).