Biomatemática **23** *(2013), 97–102* **ISSN 1679-365X**
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Uma nota sobre taxas médias e instantâneas

Raul A. de Assis[1],
Depto. de Matemática, UNEMAT, 78.550-000, Sinop/MT.

Resumo. Neste breve artigo apresentamos algumas relações entre taxas médias e taxas instantâneas para modelos populacionais. Em particular, são abordados o modelo de Malthus, modelos lineares multidimensionais e o modelo de Verhulst. Quando o crescimento populacional é suave com relação a escala temporal as taxas médias e instantâneas podem ser aproximadas uma pela outra.

Palavras-chave: *Biomatemática; equações diferenciais; taxas médias; taxas instantâneas.*

1 Introdução

Neste breve artigo, apresentamos algumas relações entre parâmetros de modelos contínuos e discretos. Apesar dessas relações serem bem conhecidas, não é muito comum encontrá-las nos textos elementares de Matemática Biológica.

2 Taxas instantâneas e o modelo de Malthus

O modelo de Malthus é um dos modelos de crescimento populacional mais simples que podem ser construídos. Tomando sua forma discreta e denominando $P(k)$ a população no instante $k\Delta t$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, sua fórmula de recursão é:

$$P(k+1) = P(k) + sP(k) = (1+s)P(k). \tag{2.1}$$

Inicialmente, vamos imaginar que os indivíduos não morrem, de forma que s representa o número médio de descendentes gerados por indivíduo em um

[1] raulaassis@gmail.com

intervalo de tempo Δt, de forma que, neste caso, o próprio parâmetro s depende da escolha de Δt.

Quando quisermos destacar esse fato, escreveremos $s \equiv s(\Delta t)$. Em muitos casos, as espécies estudadas apresentam um período bem definido de reprodução (anual, mensal, diário, *etc*) de forma que a escolha de Δt torna-se óbvia e, em algumas situações, impossível de ser medida em intervalos menores.

Uma das formas de obtermos o modelo contínuo a partir do discreto, é através da fórmula de recursão na forma da *variação* de $P(k)$:

$$P(k+1) - P(k) = \Delta P(k) = sP(k) \tag{2.2}$$

de forma que podemos escrever (sendo flexíveis com a notação):

$$P(k\Delta t + \Delta t) - P(k\Delta t) = s(\Delta t)P(k\Delta t)$$

dividindo ambos termos por Δt e fazendo $k\Delta t = t'$, ficamos com:

$$\frac{P(t' + \Delta t) - P(t')}{\Delta t} = s(\Delta t)P(t') \tag{2.3}$$

finalmente, tomando o limite com $\Delta t \to 0$, temos:

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} s(\Delta t)P(t') = \lambda P \tag{2.4}$$

onde $\lambda = \lim_{\Delta t \to 0} s(\Delta t)$.

Ora, esta forma de definir o parâmetro instantâneo é, em um certo sentido, um tanto inútil, pois em situações experimentais jamais poderemos obter tal tipo de limite. Naturalmente, o que as equações 2.3 e 2.4 significam é que, ao medirmos o parâmetro s em intervalos cada vez menores, esperamos que a dinâmica contínua e a dinâmica discreta se tornem cada vez mais próximas.

Uma outra forma de relacionar os parâmetros λ do modelo de Malthus contínuo e o parâmetro s é, pensando em termos de *taxas equivalentes*, o que nos parece muito mais razoável.

Nessa forma, tomamos as soluções dos modelos discreto e contínuo: $P(k) = P_0(1+s)^k$ e do modelo contínuo $p(t) = P_0 e^{\lambda t}$ e impomos que as soluções sejam idênticas em $t = k\Delta t$:

$$P_0(1+s)^k = P_0 e^{\lambda k \Delta t}$$

daí, obtemos a relação

$$\lambda = \frac{\ln\left(1 + s(\Delta t)\right)}{\Delta t}.$$

Neste caso, pensamos em Δt como o intervalo de tempo no qual é realizado o experimento em que é medido s. Naturalmente, podemos definir a unidade de tempo em termos desse intervalo (de forma que $\Delta t = 1$), ficando com a relação:

$$\lambda = \ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \dots \tag{2.5}$$

A equação 2.5 mostra que se $s \ll 1$, então $\lambda \approx s$ de forma que o modelo discreto e o contínuo são próximos, mesmo tomando parâmetros idênticos para ambos. Assim, quando o número de descendentes gerados por unidade de tempo é pequeno, podemos substituir a dinâmica discreta pela contínua, ou seja, os modelos dados por: $P' = sP$ ou $\Delta P = sP$ são praticamente equivalentes.

Claramente, quando existem termos de mortalidade que são proporcionais à população, ou s é negativo, o mesmo tipo de argumento pode ser aplicado.

3 Taxas instantâneas e modelos lineares

Sistema lineares de equações de recursão são na forma:

$$P(k+1) = P(k) + AP(k) \tag{3.6}$$

onde $P(k)$ agora é um vetor em $\mathbb{R}^n$ e A uma matriz em $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. O sistema de equações diferenciais análogo é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = B\,P \tag{3.7}$$

onde $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Neste caso, queremos relacionar as matrizes de parâmetros A e B. A solução para o caso discreto é dada por:

$$P(k) = (A+I)^k P_0 \tag{3.8}$$

e a solução para o modelo contínuo:

$$p(t) = e^{Bt} P_0 \tag{3.9}$$

onde e^B é a exponencial da matriz B. Para estabeler as relações entre as matrizes A e B vamos supor que ambas são diagonalizáveis, uma suposição razoável, já que o interior do conjunto das matrizes não diagonalizáveis é vazio em $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e ambas as matrizes estão relacionadas com parâmetros que, em princípio, admitem uma margem de erro.

Novamente, igualando as soluções das equações 3.8, temos:

$$(A+I)^k P_0 = e^{Bk\Delta t} P_0$$

logo, se escolhemos a unidade de tempo de forma que $\Delta t = 1$, então obtemos

$$A + I = e^B \tag{3.10}$$

ou ainda, no caso em que $\|A\| \leq 1$ podemos escrever:

$$B = \ln(A+I) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \dots \tag{3.11}$$

Portanto, no caso de sistemas lineares a relação entre as matrizes de coeficientes pode também ser estabelecida simplesmente impondo que as soluções sejam idênticas para tempos iguais. Naturalmente, também temos a relação natural entre os dois sistemas, resultante da aplicação do método de Euler para aproximação da solução do sistema de equações diferencias 3.7:

$$P(t+\Delta t) = P(t) + \Delta t B P(t) \tag{3.12}$$

de forma que a relação de recorrência do método é a mesma que a do sistema discreto, com $A = \Delta t B$. Se $\|A\| \ll 1$, a solução do sistema contínuo pode ser aproximada pela solução do sistema discreto.

4 Taxas instantâneas e o modelo de Verhulst

Ao abordar a questão da correspondência entre taxas médias e instantâneas e parâmetros de modelos discretos e modelos contínuos para o caso do modelo de Verhulst (ou logístico), devemos, desde o início, saber que não será possível obter uma equivalência entre os modelos para todas as escolhas de parâmetros.

É um resultado bem conhecido que a dinâmica simples da recursão de Verhulst pode dar origem a dinâmicas caóticas (Edelstein-Keshet, 1988; Strogatz, 1994), como o modelo de Verhulst contínuo dá origem somente à soluções monotônicas e convergentes está claro, desde o início, que para certos valores dos parâmetros não será possível obter uma correspondência coerente entre os modelos contínuo e discreto.

A dinâmica logística discreta é dada por:

$$P(k+1) = P(k) + sP(k)\left(1 - P(k)/K\right) \tag{4.13}$$

onde K é a capacidade suporte do meio. A equação diferencial do modelo de Verhulst é:

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - P/K). \tag{4.14}$$

A equação diferencial admite solução explícita dada por:

$$Y(t) = \frac{KY_0e^{rt}}{K + Y_0\left(e^{rt} - 1\right)}. \tag{4.15}$$

Como o modelo discreto não admite solução analítica (Wolfram, 2002, pág. 1098), não podemos utilizar o mesmo procedimento que utilizamos no caso do modelo de Malthus para obter taxas equivalentes.

Desta forma, recorremos à relação obtida através da aplicação do método de Euler para aproximação da solução da equação diferencial 4.14, obtendo:

$$\bar{P}(t + \Delta t) = P(t) + P'(t)\Delta t$$

onde

$$\bar{P}(t + \Delta t) = P(t) + \Delta t rP(t)\left(1 - P(t)/K\right). \tag{4.16}$$

Se a unidade de tempo é escolhida de tal forma que $\Delta t = 1$, temos, novamente, que as dinâmicas serão similares a $s(\Delta t) \ll 1$, ou seja, somente para taxa de reproduções pequenas existirá uma correspondência clara entre as dinâmicas do modelo.

Resumindo os resultados das relações entre taxas instantâneas e taxas médias, podemos dizer que, se a "magnitude" dos parâmetros (coeficiente s, norma da matriz A) for pequena, então podemos aproximar a dinâmica contínua pela discreta e vice-versa.

Referências

Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology.* McGraw-Hill Inc., New York.

Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos.* Perseus Books Publishing, Cambridge.

Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science.* Wolfram Media Inc., Canada.