

Problema de controle ótimo com equações de estado p-fuzzy: programação dinâmica

Michael M. Diniz¹, Rodney C. Bassanezi²
DMA, IMECC – UNICAMP, 13083-859, Campinas, SP.

Resumo. Neste trabalho tratamos de problemas de controle com equação de estado definida a partir de um sistema p-fuzzy. Os modelos p-fuzzy, formulados via base de regras, são utilizados para modelar fenômenos parcialmente conhecidos. Mostramos que, mesmo quando o problema de controle ótimo envolve esse tipo de modelo, é possível aplicar técnicas numéricas (programação dinâmica) para obtenção do controle ótimo em malha fechada. Além disso, verificamos, através de exemplos, que os resultados obtidos com este processo são similares àqueles clássicos.

Palavras-chave: Programação dinâmica, controle ótimo, sistemas p-fuzzy.

1. Introdução

Nosso objetivo é resolver problemas de controle ótimo de pragas. Em termos de modelagem clássica o crescimento das pragas é formulado com modelos malthusianos ou logísticos (com inibição). No caso em que temos informações insuficientes podemos utilizar modelos p-fuzzy ao processo de crescimento da praga.

1.1. Modelo de Malthus p-fuzzy

Segundo o modelo malthusiano, uma população cresce em progressão geométrica, em outras palavras, Malthus afirmou que a taxa de crescimento de uma população é proporcional ao tamanho da mesma. Isto é, se a população é

¹diniz@ime.unicamp.br

²rodney@ime.unicamp.br

pequena então a sua variação é *pequena*, se a população é *média* então a variação da sua população é *média* e se a população é *grande* então a sua variação é *grande*.

O modelo malthusiano é representado pela seguinte equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (1.1)$$

onde a é a taxa de reprodução per capita da espécie x cuja unidade é $\frac{1}{[t]}$ ($[t]$ representa a unidade de tempo utilizada).

Este modelo matemático é necessário, pois nenhuma outra equação diferencial seria capaz de reproduzir as afirmações de Malthus, porém, podemos utilizar os sistemas p-fuzzy para criar modelos que reproduzam o comportamento proposto por Malthus. Veja a figura 1.

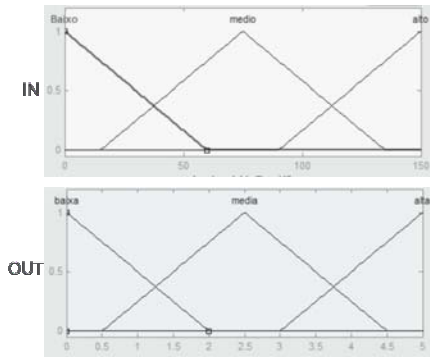


Figura 1: Modelo p-fuzzy de Malthus



Figura 2: Solução do modelo p-fuzzy de Malthus

Nos modelos p-fuzzy, as entradas e saídas estão relacionadas da mesma forma como a teoria de Malthus foi explicada no início do texto. Utilizando métodos computacionais verificamos que a população $x(t)$ varia no tempo da mesma forma como o modelo malthusiano clássico.

1.2. Modelo de Verhust

Um dos grandes problemas do modelo malthusiano é o fato dele não possuir saturação, fazendo com que este não seja adequado para modelagens que envolvam períodos de tempo médio ou longo. Com o objetivo de corrigir esse problema, Pierre-François Verhulst, em 1838, sugeriu que o modelo de dinâmica populacional deveria ser similar ao de Malthus para populações

pequenas, porém deveria conter uma saturação populacional, denominada nos dias de hoje por “capacidade suporte do meio”.

Dentre as possíveis equações que satisfazem o comportamento descrito pelas hipóteses de Verhulst, a equação 1.2 é a mais simples e portanto a mais utilizada.

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{k}\right) \tag{1.2}$$

O parâmetro a representa a taxa de reprodutibilidade da população x e k é a capacidade suporte dessa população.

Notamos que as hipóteses deste modelo também podem se satisfeitas por simples relações entre variáveis linguísticas, podendo ser relacionadas da seguinte forma.

- Se a população é baixa então sua taxa de variação é baixa
- Se a população é média baixa então sua taxa de variação é média
- Se a população é média então sua taxa de variação é alta
- Se a população é média alta então sua taxa de variação é média
- Se a população é alta sua taxa de variação é baixa
- Se a população é altíssima então sua variação é baixa negativa

As variáveis linguísticas utilizadas acima podem ser descritas através de conjuntos fuzzy conforme a figura 3

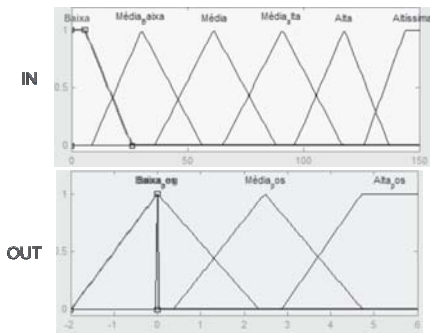


Figura 3: Modelo p-fuzzy de Verhulst

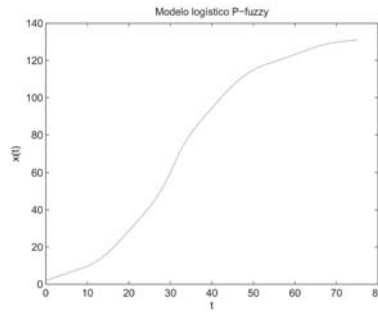


Figura 4: Solução do modelo p-fuzzy de Verhulst

Utilizando um processo computacional iterativo, notamos que o comportamento da população segundo este modelo p-fuzzy, satisfaz as hipóteses de Verhulst, logo podemos afirmar que o modelo p-fuzzy acima também é um modelo de Verhulst.

É importante notar que os modelos p-fuzzy são adequados para modelar fenômenos pouco conhecidos, onde existam apenas informações imprecisas sobre a dinâmica do fenômeno no tempo. Para padronizar a notação denotaremos os sistemas p-fuzzy por $P(x)$. Informações detalhadas sobre esses modelos podem ser encontradas em Bassanezi (2006); Silva (2005); M. M (2012).

2. Controle ótimo com programação dinâmica

Em diversas situações práticas é necessário controlar o crescimento de uma determinada população, isso ocorre por exemplo com a população de pragas em uma lavoura ou até menos de determinadas espécies em um ecossistema.

Este controle, pode ser feito de forma ótima, isto é, são atingidos níveis satisfatórios com o menor custo possível e respeitando restrições impostas. Para calcular este controle é necessário conhecer a dinâmica de crescimento da população, que pode ser dada por uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Formalmente, resolver um problema de controle ótimo significa encontrar a solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min_{u(t), x(t)} \quad & h(x(T)) + \int_0^T g(x(t), u(t)) dt \\ \text{S.A.} \quad & \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde o funcional a ser minimizado é denominado custo e este depende de x e u . O termo $h(x(T))$ é uma função dependente do estado final e o somatório está relacionado ao custo de $x(t)$ e $u(t)$ ao longo do intervalo $[0, T]$.

Por fim, notamos que a variação do estado $\frac{dx}{dt}$ depende não só do próprio valor do estado mas também da função de controle $u(t)$. Resolver este problema significa encontrar $x(t)$ e $u(t)$ que minimizam o funcional e satisfazem a equação diferencial.

Neste trabalho utilizaremos o conceito de programação dinâmica para resolver este problema. O método aplicado é baseado no princípio de otimalidade (Kirk, 1970). Este método não exige nenhuma propriedade específica

para a função $g(x(t), u(t))$, o que o torna bastante adequado para ser utilizado com sistemas p-fuzzy.

Para implementarmos o método numérico de resolução, necessitamos discretizar as equações 2 e 2.3, isto é, ao invés de considerarmos que o tempo está variando continuamente, iremos dividir o intervalo de $[0, T]$ em N intervalos de tamanho h . Claramente $T = h.N$ e T é o instante final avaliado.

A discretização da equação 2.3 pode ser escrita da seguinte forma:

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t f(x(k), u(k)) \quad (2.4)$$

Da mesma forma, podemos discretizar a integral do funcional da seguinte forma

$$J(x, u) = h(x(N)) + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(x(k), u(k)) \quad (2.5)$$

Por fim, utilizando as equações acima e aplicando o princípio da otimalidade, chegamos a seguinte relação.

$$J_{N-K, N}^*(X(N-k)) = \min_{u(N-K)} (\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(x(N-k), u(N-k))) + J_{N-(K-1), N}^*(x(k) + \Delta t f(x(k), u(k)), u(N-k))$$

O termo $J_{N-K, N}^*(X(N-k))$ representa o custo ótimo de sairmos do ponto $x(N-k)$ no instante $N-k$ e chegarmos no ponto $x(N)$. Para iniciarmos o algoritmo definimos que $J_{N, N}^*(X(N)) = h(x(N))$. O algoritmo utilizado é conhecido também como *algoritmo de Dijkstra* e é utilizado em fluxos em redes para resolver o problema do caminho mais curto.

Maiores detalhes sobre esse processo podem ser observados em (Kirk, 1970). Notamos que a aplicação do processo anterior não impõe nenhuma condição sobre as funções envolvidas, nem mesmo necessitamos calcular a derivada de nenhuma delas.

3. Proposta

Um fenômeno pode ser modelado utilizando-se diversas ferramentas, por exemplo, através de equações diferenciais, sistemas p-fuzzy e outros. Para os casos onde as informações sobre o fenômeno são vagas, os modelos p-fuzzy são bastante adequados. Algumas propostas de controle para esse tipo de sistema podem ser vistas em R. R (2008); C. M (2013).

Nossa proposta é fazer a seguinte substituição:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)) = P(x) - u(t) \quad (3.6)$$

onde a função $P(x)$ representa o sistema p-fuzzy e $u(t)$ a função de controle.

Um exemplo de problema de controle bastante encontrado na literatura é o seguinte.

$$\min_{x(t), u(t)} x^2(T) + \int_0^T (ax^2(t) + bu^2(t))dt \quad (3.7)$$

$$S.A. \quad \frac{dx}{dt} = P(x) - u(t) \quad (3.8)$$

Conforme a seção anterior, notamos que a aplicação da programação dinâmica através do princípio de otimalidade não exige nenhuma condição sobre a função $P(x)$. Portanto, nossa proposta é substituir essa função, que modela a variação do estado $x(t)$ no tempo, por um sistema p-fuzzy, com isso, poderemos encontrar o controle ótimo para fenômenos parcialmente conhecidos. Ilustraremos nossa proposta através de exemplos na seção seguinte.

4. Resultados

Para ilustrar os resultados obtidos através da técnica sugerida na seção anterior, vamos utilizar dois tipos de modelos clássicos da biomatemática, o modelo de Malthus e o Modelo de Verhulst.

4.1. Controle aplicado ao modelo p-fuzzy de Malthus

Resolveremos o problema descrito pelas equações 2 e 2.3 utilizando o modelo de malthus clássico, dado pela equação 1.1 e o modelo fuzzy utilizando o sistema p-fuzzy. Para conseguirmos comparar ambos os resultados, vamos definir qual é o valor do parâmetro a que melhor se ajusta ao modelo p-fuzzy proposto na primeira seção.

Aplicando técnicas de ajuste de curva verificamos que a equação que melhor se ajusta ao modelo p-fuzzy é

$$\frac{dx}{dt} = 0.006991x \quad (4.9)$$

Portanto, o problema que precisamos resolver é

$$\min_{x(t), u(t)} x^2(T) + \int_0^T (0.01x^2(t) + u^2(t))dt \quad (4.10)$$

$$S.A. \quad \frac{dx}{dt} = 0.006991x + u(t) \quad (4.11)$$

Aplicando técnicas de programação dinâmica descritas acima, obtemos o gráfico da figura 5

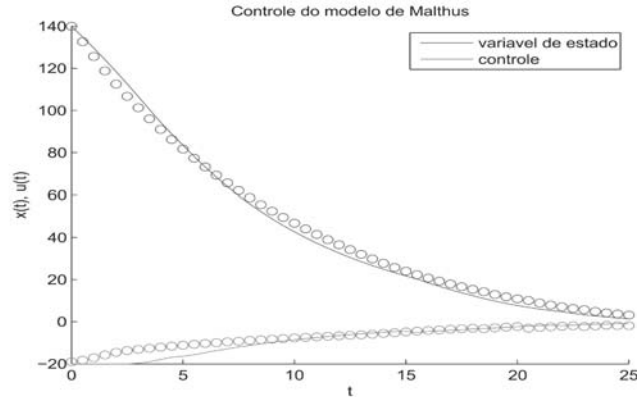


Figura 5: Controle do modelo de Malthus

O gráfico contínuo é referente ao problema clássico, enquanto que o gráfico das circunferências se referem ao problema com sistema p-fuzzy, isso é, substituindo $0.006991x$ por $P(x)$. As curvas abaixo de zero representam o controle $u(t)$ enquanto que as curvas positivas representam a variação do estado.

Notamos no gráfico que tanto o controle quanto o estado do caso p-fuzzy são muito similares aos obtidos pelo modelo clássico.

A função objetivo utilizada foi $x^2(T) + \int_0^T (0.01x^2(t) + u^2(t))dt$ os valores dos coeficientes de x e u foram escolhidos apenas por uma questão de coerência. Obviamente se trocarmos 0.01 por um número maior, a influência da variável de estado no custo será proporcionalmente maior.

4.2. Controle aplicado ao modelo p-fuzzy de Verhulst

Da mesma forma como fizemos anteriormente, vamos aplicar a técnica proposta ao modelo de Verhulst clássico e compara-lo a um modelo de Verhulst p-fuzzy equivalente. Aplicando métodos de ajuste de curva, encontramos o

seguinte modelo.

$$\frac{dx}{dt} = 0.2105x \left(1 - \frac{x}{135}\right) \quad (4.12)$$

Este é o modelo clássico que melhor se aproxima do modelo p-fuzzy proposto na primeira seção. Para este caso, o problema clássico fica descrito da seguinte forma:

$$\min_{u(t), x(t)} x^2(T) + \int_0^T (0.01x^2(t) + u^2(t))dt \quad (4.13)$$

$$S.A. \quad \frac{dx}{dt} = 0.2105x \left(1 - \frac{x}{135}\right) + u(t) \quad (4.14)$$

Entretanto, se a dinâmica da variável de estado é modelada por um sistema p-fuzzy, basta substituir a equação $0.2105x \left(1 - \frac{x}{135}\right)$ por $P(x)$, onde $P(x)$ é o sistema p-fuzzy de Verhulst proposto na primeira seção. O resultado da aplicação do método pode ser visto na figura 6

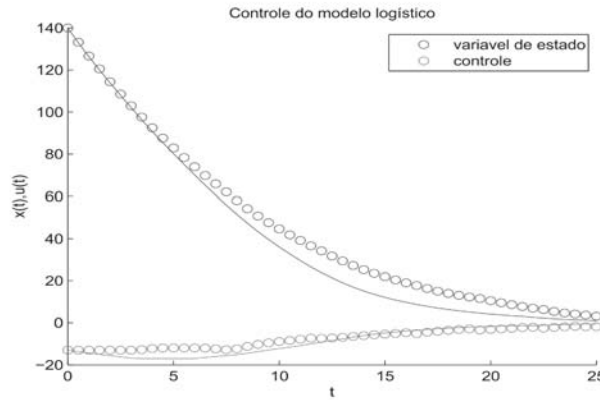


Figura 6: Controle do modelo logístico

As legendas são similares ao gráfico anterior. Notamos também neste caso que a aproximação do resultado aplicado ao modelo de Verhulst é bastante satisfatória e mais uma vez verifica a funcionalidade do método.

5. Conclusões

Os modelos p-fuzzy são adequados para modelar fenômenos pouco conhecidos, onde existam apenas informações imprecisas sobre a dinâmica do mesmo

no tempo. Sugerimos neste texto uma estratégia para podermos controlar de forma ótima fenômenos modelados por sistemas p-fuzzy.

Um exemplo típico de aplicabilidade dessa estratégia está no controle de pragas em lavouras, já que na maioria vezes não se conhece(ou é inviável conhecer) rigorosamente a dinâmica de reprodução da praga. Vimos que os resultados obtidos utilizando os sistemas p-fuzzy são satisfatoriamente próximos dos resultados obtidos utilizando sistemas clássicos equivalentes.

Por fim, sabemos que este trabalho ainda pode ser estendido para modelo mais gerais e de dimensões maiores que 1.

Referências

- Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Coleção IMECC: textos didáticos, Campinas.
- C. M, P. (2013). Uso da subjetividade em controle Ótimo - aplicações em biomatemática. Master's thesis, UFABC, Santo Andre/SP, Brazil (*in Portuguese*).
- Kirk, D. E. (1970). *Optimal Control Theory - An Introduction*. Prentice-Hall Networks Series.
- M. M, D. (2012). Abordagem fuzzy do teorema de poincaré-bendixson. Master's thesis, UNICAMP-IMECC, Campinas/SP, Brazil (*in Portuguese*).
- R. R, S. (2008). Estratégia para controle de pragas - sistemas p-fuzzy com controle híbrido. Master's thesis, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP, Brazil (*in Portuguese*).
- Silva, J. D. M. (2005). *Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos P-fuzzy com aplicações em biomatemática*. PhD thesis, IMECC-Unicamp, Campinas/SP, Brazil (*in Portuguese*).

