

Operações com números fuzzy f -correlacionados

Valtemir M. Cabral¹,

DM, ICE–UFAM, 69.000-000, Manaus/AM.

Roberto A. C. Prata²,

DM, ICE–UFAM, 69.000-000, Manaus/AM.

Laécio C. Barros³,

DMA, IMECC–UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo. Neste artigo apresentamos a noção de números fuzzy f -correlacionados, a qual generaliza o conceito de números fuzzy completamente correlacionados, cuja correlação é estabelecida a partir de uma função linear afim Carlsson et al. (2004). No nosso caso, a formulação é feita com o auxílio de uma função monótona injetora. Destacamos o caso em que a função de correlação é hiperbólica para o qual obtemos operações de adição e multiplicação entre números fuzzy hiperbolicamente correlacionados. Finalmente, apresentamos algumas das propriedades operatórias dos números fuzzy f -correlacionados.

Palavras-chave: *Sistemas fuzzy, princípio de extensão, distribuição de possibilidade conjunta.*

1. Introdução

Neste artigo estudamos uma nova forma de interatividade entre dois números fuzzy (Dubois e Prade, 1981, 1988) e algumas de suas propriedades. Esta interatividade é obtida através de uma função monótona e injetora, a qual chamamos de f -correlacionada.

O trabalho está organizado da seguinte maneira, inicialmente fazemos uma breve apresentação dos conceitos básicos que serão utilizados no texto.

¹valtemircabral@gmail.com

²praroberto@gmail.com

³laeciocb@ime.unicamp.br

Na seção 3 introduzimos o conceito de números fuzzy f -correlacionados, conceito este que generaliza a noção de números fuzzy completamente correlacionados (Carlsson et al., 2004; Carlsson e Fullér, 2001).

Na seção 4 apresentamos as operações de adição e produto entre dois números fuzzy f -correlacionados e damos ênfase aos casos em que a função f é uma reta (caso em que os números fuzzy são chamados completamente correlacionados (Carlsson et al., 2004)) e em que f é uma função hiperbólica, para este temos números fuzzy hiperbolicamente correlacionados.

Na seção 5 estudamos algumas das propriedades dos números fuzzy f -correlacionados por exemplo, estudamos o cálculo do valor central de uma função integrável $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e também a medida de interatividade entre dois números fuzzy f -correlacionados.

2. Conceitos básicos

Definição 2.1 *Um subconjunto fuzzy A de \mathbb{R}^n é dado por uma função $\mu_A : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$. Os α -níveis de A são definidos da seguinte maneira*

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Se $\alpha = 0$, $[A]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) > 0\}}$ (o fecho do suporte de A).

Denotamos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todos os subconjuntos fuzzy de \mathbb{R}^n cujos α -níveis são compactos e não vazios.

O subconjunto fuzzy A de \mathbb{R} é chamado um número fuzzy se todos os α -níveis de A são intervalos fechados de \mathbb{R} e o suporte de A

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$$

é limitado.

A família de todos os números fuzzy é denotada por $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Definição 2.2 *Uma distribuição de possibilidade sobre \mathbb{R}^n é um conjunto fuzzy C de \mathbb{R}^n com função de pertinência $\mu_C : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo $\mu_C(x_0) = 1$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

A família das distribuições de possibilidade de \mathbb{R}^n será denotada por $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.3 Considere $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ então $C \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ é chamada uma distribuição de possibilidade conjunta se $\max_{x_j \in \mathbb{R}, j \neq i} \mu_C(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_i}(x_i)$. Além disso, A_1, \dots, A_n são chamados as distribuições marginais de C .

Neste caso,

$$\mu_C(x_1, \dots, x_n) \leq \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) \text{ e } [C]^\alpha \subseteq [A_1]^\alpha \times \dots \times [A_n]^\alpha.$$

Definição 2.4 Dois números fuzzy A e B são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta C for dada por

$$\mu_C(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Caso contrário, são ditos interativos.

Para números fuzzy não interativos temos:

$$[C]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e todo $\alpha \in [0, 1]$.

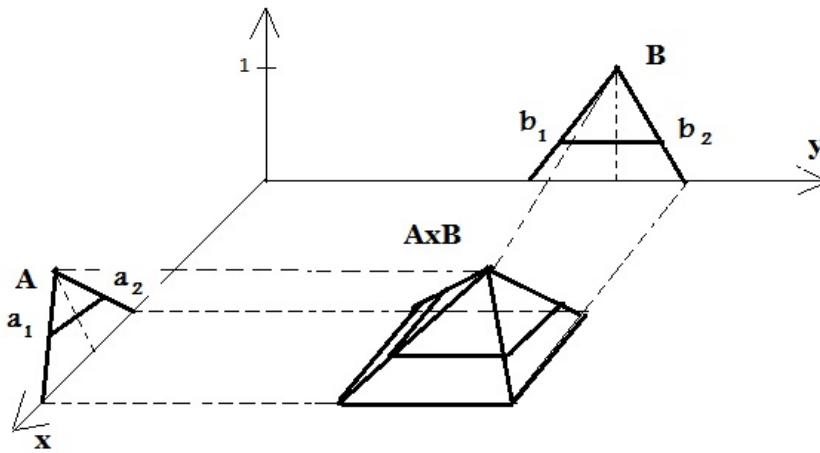


Figura 1: números fuzzy não interativos.

Definição 2.5 Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função, A_1, \dots, A_n números fuzzy interativos com distribuição de possibilidade conjunta C . A extensão de f aplicada a (A_1, \dots, A_n) segundo C é o subconjunto fuzzy $f_C(A_1, \dots, A_n)$ cuja função

de pertinência é definida por

$$\mu_{f_C(A_1, \dots, A_n)}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \mu_C(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)), & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ se } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $f^{-1}(y) = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = y\}$.

Com relação ao princípio de extensão segundo C temos:

Proposição 2.6 *Sejam A_1, \dots, A_n números fuzzy, C uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições marginais A_1, \dots, A_n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$[f_C(A_1, \dots, A_n)]^\alpha = f([C]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Além disso, $f_C(A_1, A_2, \dots, A_n)$ é sempre um número fuzzy.

A prova deste resultado pode ser vista em Cabral (2011); Carlsson et al. (2004).

3. Números fuzzy f -correcionados

Definição 3.1 *Sejam $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \subset \mathbb{R}$ uma função monótona injetora e $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ números fuzzy. Dizemos que A e B são correlacionados segundo a função f ou f -correlacionados, se sua distribuição de possibilidade conjunta C é dada por*

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y) = \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y) \quad (3.1)$$

onde,

$$\mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = f(x) \\ 0 & \text{se } y \neq f(x) \end{cases}$$

é a função característica da curva $\gamma(x) = (x, f(x))$.

Neste caso temos:

$$[B]^\alpha = f([A]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1],$$

$$\mu_B(x) = \mu_A(f^{-1}(x)), \forall x \in \mathbb{R} \text{ se } [A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha],$$

$$\begin{aligned} [C]^\alpha &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mu_C(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mu_A(x) \mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, f(x)) : \mu_A(x) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, f(x)) : x \in [a_1^\alpha, a_2^\alpha]\}. \end{aligned}$$

É interessante notar que a partir de (3.1) os únicos elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que tem pertinência não nula a C são os que estão sobre a curva $\gamma(x) = (x, f(x))$.

4. Operações com números fuzzy f -correlacionados

Seja C a distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy A e B f -correlacionados e sejam $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas por

$$g(x, y) = x + y \text{ e } h(x, y) = xy.$$

As operações de adição e produto de dois números fuzzy f -correlacionados são denotadas por

$$A +_C B = g_C(A, B) \text{ e } A \cdot_C B = h_C(A, B).$$

Neste caso,

$$(A +_C B)(z) = \sup_{z=x+y} \mu_C(x, y) \text{ e } (A \cdot_C B)(z) = \sup_{z=xy} \mu_C(x, y).$$

Com isto, temos

$$\begin{aligned} [A +_C B]^\alpha &= [g_C(A, B)]^\alpha \\ &= \overline{\{x + y \in \mathbb{R} : \sup_{z=x+y} \mu_C(x, y) \geq \alpha\}} \\ &= \overline{\{x + y \in \mathbb{R} : \sup_{z=x+y} \mu_A(x) \mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y) \geq \alpha\}} \\ &= \overline{\{x + f(x) : \mu_A(x) \geq \alpha\}}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[A \cdot_C B]^\alpha &= [h_C(A, B)]^\alpha \\
&= \overline{\{xy \in \mathbb{R} : \sup_{z=xy} \mu_C(x, y) \geq \alpha\}} \\
&= \overline{\{xy \in \mathbb{R} : \sup_{z=xy} \mu_A(x) \mathcal{X}_{\{y=f(x)\}}(x, y) \geq \alpha\}} \\
&= \overline{\{xf(x) : \mu_A(x) \geq \alpha\}}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.1 Quando $f(x) = qx + r$ com $q \neq 0$, os números fuzzy A e B são chamados completamente correlacionados Cabral (2011), Carlsson et al. (2004), neste contexto, a distribuição de possibilidade conjunta de A e B é dada por

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x) \mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) = \mu_B(y) \mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) \quad (4.2)$$

onde,

$$\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } qx + r = y \\ 0 & \text{se } qx + r \neq y \end{cases}$$

é a função característica da reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \}$.

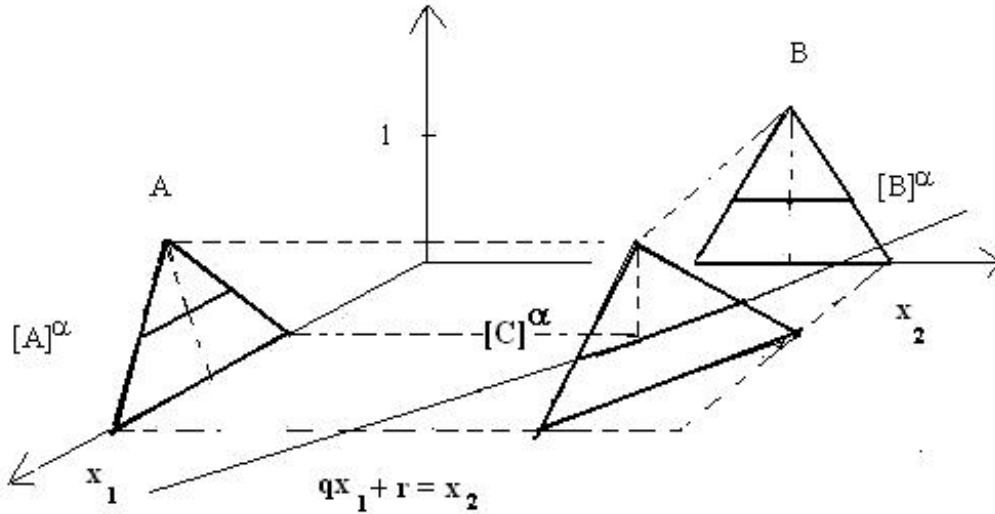


Figura 2: Números fuzzy f -correlacionados para $f(x) = qx + r$.

Neste caso temos:

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha];$$

$$[C]^\alpha = \{(x, qx + r) \in \mathbb{R}^2 : x = (1-s)a_1^\alpha + sa_2^\alpha, s \in [0, 1]\};$$

$$[B]^\alpha = q[A]^\alpha + r, \text{ para qualquer } \alpha \in [0, 1] \text{ e}$$

$$\mu_B(x) = \mu_A\left(\frac{x-r}{q}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Os α -níveis de $A +_C B$ são dados por

$$\begin{aligned} [A +_C B]^\alpha &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : \mu_{g_C(A,B)}(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : \sup_{z=x+y} \mu_C(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : \sup_{z=x+y} \mu_A(x) \cdot \mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \overline{\{x + y \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > \alpha, qx + r = y\}} \\ &= \overline{\{(q+1)x + r \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > \alpha\}} \\ &= (q+1)\overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > \alpha\}} + r \\ &= (q+1)[A]^\alpha + r. \end{aligned}$$

Note que quando $q = -1$ a soma dos números fuzzy completamente correlacionados A e B é número real r . Além disso, se $r = 0$, $A +_C B = 0$

Exemplo 4.2 Quando $f(x) = \frac{q}{x} + r$, com $x > 0$ e $q \neq 0$, os números fuzzy A e B são chamados hiperbolicamente correlacionados. Neste contexto, a distribuição de possibilidade conjunta C de A e B tem a seguinte função de pertinência

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x) \mathcal{X}_{\{\frac{q}{x}+r=y\}}(x, y) = \mu_B(y) \mathcal{X}_{\{\frac{q}{x}+r=y\}}(x, y) \quad (4.3)$$

onde,

$$\mathcal{X}_{\{\frac{q}{x}+r=y\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{q}{x} + r = y \\ 0 & \text{se } \frac{q}{x} + r \neq y \end{cases}$$

é a função característica da hipérbole $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{q}{x} + r = y\}$.

relacionados A e B é o número real q . Além disso, quando $q = 1$, $A \cdot_C B = 1$.

Exemplo 4.3 Quando $f(x) = qx^2 + rx$, com $q \neq 0$ e $x \geq \frac{-r}{2q}$, os números fuzzy A e B são parabolicamente correlacionados. Neste caso, a distribuição de possibilidade conjunta C de A e B é dada por

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{qx^2+rx=y\}}(x, y) = \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{qx^2+rx=y\}}(x, y) \quad (4.4)$$

onde,

$$\mathcal{X}_{\{qx^2+rx=y\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } qx^2 + rx = y \\ 0 & \text{se } qx^2 + rx \neq y \end{cases}$$

é a função característica da parábola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : qx^2 + rx = y\}$.

Neste caso temos:

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha],$$

$$[C]^\alpha = \{(x, qx^2 + rx) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a_1^\alpha, a_2^\alpha]\};$$

$$[B]^\alpha = q([A]^\alpha)^2 + r[A]^\alpha;$$

$$\mu_B(x) = \mu_A\left(\frac{\sqrt{4qx^2+r^2}-r}{q}\right);$$

$$([A]^\alpha)^2 = [\min P, \max P];$$

$$P = \{a_1^\alpha a_1^\alpha, a_1^\alpha a_2^\alpha, a_2^\alpha a_1^\alpha, a_2^\alpha a_2^\alpha\}.$$

Tomando, $g(x, y) = h(\frac{1}{x}, y) = (\frac{1}{x})y$, teremos

$$\begin{aligned} [A \cdot_C B]^\alpha &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : \mu_{h_C(A, B)}(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : \sup_{z=(\frac{1}{x})y} \mu_C(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : \sup_{z=(\frac{1}{x})y} \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{qx^2+rx=y\}}(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \overline{\left\{\frac{y}{x} \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > \alpha, qx^2 + rx = y\right\}} \\ &= \overline{\left\{\frac{qx^2 + rx}{x} \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > \alpha\right\}} \\ &= \overline{\{qx + r \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > \alpha\}} \\ &= q[A]^\alpha + r. \end{aligned}$$

Quando $r = 0$ e $q = 1$ temos, $[A \cdot_C B]^\alpha = [A]^\alpha$.

5. Propriedades dos números fuzzy f -correlacionados

Nesta seção apresentamos algumas propriedades dos números fuzzy f -correlacionados, tais como o cálculo do valor central de uma função integrável $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e a medida de interatividade entre dois números fuzzy f -correlacionados.

Definição 5.1 *Seja B uma distribuição de possibilidade conjunta em \mathbb{R}^2 , com $\alpha \in [0, 1]$ e seja também $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. O valor central da função g em $[C]^\alpha$ é dado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{[C]^\alpha} &= \frac{1}{\int_{[C]^\alpha} dx} \int_{[C]^\alpha} g(x) dx \\ &= \frac{1}{\int_{[C]^\alpha} dx_1 \dots dx_n} \int_{[C]^\alpha} g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

Para o caso em que $[C]^\alpha$ é degenerado para algum $\alpha \in [0, 1]$, o valor central de g toma a seguinte forma

$$\mathcal{C}_{[C]^\alpha}(g(x)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\int_{S(\epsilon)} dx} \int_{S(\epsilon)} g(x) dx$$

onde,

$$S(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists c \in [C]^\alpha, \|x - c\| \leq \epsilon\}$$

Definição 5.2 *Sejam $A, B : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ números fuzzy f -correlacionados e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ a distribuição de possibilidade conjunta de A e B . O Valor central de g é*

$$\mathcal{C}_{[C]^\alpha}(g) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\int \int_{S(\epsilon)} dx dy} \int \int_{S(\epsilon)} g(x, y) dx dy$$

onde,

$$[C]^\alpha = \{(x, f(x)); x \in [a_1^\alpha, a_2^\alpha]\} \text{ e } S(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists c \in [C]^\alpha \text{ com } \|x - c\| \leq \epsilon\}.$$

Para as projeções π_x, π_y e para $f(x) = qx + r$ e seguindo as ideias de Fullér e Majlender (2004) temos,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x) &= \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{2}, \\ \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_y) &= q \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{2} + r \text{ e} \\ \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x \pi_y) &= q \frac{(a_2 - a_1)^2}{3} + \frac{2qa_1a_2 + (a_1 + a_2)r}{2}.\end{aligned}$$

Para as projeções π_x, π_y e para $f(x) = \frac{q}{x} + r$ temos

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x) &= \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{2} \text{ e} \\ \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_y) &= \frac{b_1^\alpha + b_2^\alpha}{2} = q \left(\frac{\frac{1}{a_2^\alpha} + \frac{1}{a_1^\alpha}}{2} \right) + r.\end{aligned}$$

Fixando α temos:

$$[C]^\alpha = \left\{ \left(\frac{q}{y-r}, y \right); y \in [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \right\} = \{ (c(y), y); y \in [b_1^\alpha, b_2^\alpha] \}.$$

Finalmente temos,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x \pi_y) &= \frac{1}{b_2^\alpha - b_1^\alpha} \int_{b_1}^{b_2} yc(y) dy \\ &= \frac{1}{b_2^\alpha - b_1^\alpha} \int_{b_1}^{b_2} \frac{yq}{y-r} dy \\ &= \frac{1}{b_2^\alpha - b_1^\alpha} \int_{b_1}^{b_2} \left(q - \frac{qr}{y-r} \right) dy \\ &= \frac{1}{b_2^\alpha - b_1^\alpha} [q(b_2 - b_1) - qr \ln \left(\frac{b_2^\alpha - r}{b_1^\alpha - r} \right)] \\ &= q + \frac{qr}{b_2^\alpha - b_1^\alpha} \ln \left(\frac{b_2^\alpha - r}{b_1^\alpha - r} \right)\end{aligned}$$

Definição 5.3 *Sejam A e B números fuzzy e C a distribuição de possibilidade conjunta de A e B . A medida de interatividade entre os α -níveis dos conjuntos A e B é definida por*

$$\mathcal{R}_{[C]^\alpha}(\pi_x \pi_y) = \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x \pi_y) - \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_y) \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x).$$

Para os números fuzzy completamente correlacionados temos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{[C]^\alpha}(\pi_x \pi_y) &= \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x \pi_y) - \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_y) \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x) \\ &= \frac{q(a_2^\alpha - a_1^\alpha)^2}{12}.\end{aligned}$$

Quando a função que define a interatividade entre os números fuzzy A e B é a hipérbole $f(x) = \frac{q}{x} + r$, a medida de interatividade é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{[C]^\alpha}(\pi_x \pi_y) &= \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x \pi_y) - \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_y) \mathcal{C}_{[C]^\alpha}(\pi_x) \\ &= -\frac{q(a_2^\alpha - a_1^\alpha)^2}{4a_1^\alpha a_2^\alpha} + r \left[\frac{a_1^\alpha a_2^\alpha}{a_1^\alpha + a_2^\alpha} \ln\left(\frac{a_1^\alpha}{a_2^\alpha}\right) - \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha}{2} \right]. \end{aligned}$$

6. Modelo para HIV com retardo e na taxa de mortalidade do vírus hiperbolicamente correlacionados

Vamos iniciar considerando o seguinte modelo para dinâmica do HIV.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \lambda - cx(t) - \beta(t)x(t)v(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \beta(t)x(t)v(t) - ay(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = k(t)y(t) - uv(t), \end{cases} \quad (6.5)$$

onde,

- $x(t)$ é a população de células não infectadas;
- $y(t)$ é a população de células infectadas que produzem vírus;
- $v(t)$ é a população de vírus;
- λ é a influxo sanguíneo (corrente sanguínea);
- c é a taxa de mortalidade de células não infectadas;
- $\beta(t)x(t)v(t)$ é a taxa de produção de células infectadas;
- u é a taxa de declínio da concentração de vírus;
- a é a taxa de mortalidade de células infectadas;
- $k(t)$ é a taxa de produção de partículas de vírus;

Este modelo tem sido usado para quantificar a dinâmica do vírus em indivíduos que fazem terapias antiretrovirais Ho et al. (1995), Nowak et al.

(1995), Nowak et al. (1996), A. Perelson et al. (1995). No nosso estudo é necessário considerar o retardo intracelular entre a infecção de uma nova célula e a produção de uma nova partícula de vírus Jafelice et al. (2009).

O retardo τ é o tempo entre a infecção de uma célula por um vírus e a produção de uma nova partícula de vírus. Isto significa que o recrutamento de células produzindo vírus, no tempo t , é dada pela densidade das células que são novamente infectadas no tempo $t - \tau$ e que permanecem vivas no tempo t .

Quando uma célula é infectada, esta demora um tempo τ_{int} para que sejam produzidas partículas de vírus e após a aplicação de qualquer droga anti-viral existe um retardo τ_{farm} no efeito farmacológico devido ao tempo necessário para a absorção, distribuição e penetração nas células alvo. Vamos assumir que

$$\tau = \tau_{int} + \tau_{farm}.$$

Incorporando o retardo τ , o sistema (6.5) passa a ser dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda - cx(t) - \beta(t)x(t)v(t) \quad (6.6)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta(t - \tau)x(t - \tau)v(t - \tau)e^{-\tilde{a}\tau} - ay(t) \quad (6.7)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = k(t)y(t) - uv(t), \quad (6.8)$$

onde,

- \tilde{a} é a taxa de mortalidade de células infectadas, mas que ainda não produzem vírus;
- $e^{-\tilde{a}\tau}$ é a probabilidade de sobrevivência das células infectadas do tempo $t - \tau$ até o tempo t . De forma geral, a probabilidade de sobrevivência é dada por uma função $f(\tau)$ com $0 \leq f(\tau) \leq 1$.

A equação (6.7) possui retardo e as soluções analíticas para este tipo de equação em geral são difíceis de serem obtidas. Entretanto, para este caso específico as populações de células não infectadas; células infectadas produzindo vírus e os vírus livres estão em um nível de estado estacionário antes do tratamento Herz et al. (1996).

Estes fatos facilitam a análise matemática e permitem que sejam deduzidas soluções analíticas simples. A solução não trivial para o estado estacionário é

$$x_0 = \frac{au}{\beta k} e^{\tilde{a}\tau} \quad (6.9)$$

$$y_0 = \frac{\lambda}{a} e^{\tilde{a}\tau} - \frac{uc}{\beta k} \quad (6.10)$$

$$v_0 = \frac{ky_0}{u}, \quad (6.11)$$

onde β e k são taxas constantes de pré-tratamento.

6.1. Terapia inibidores de protease

Nesta subsecção aplicaremos o conceito de números fuzzy hiperbolicamente correlacionados num modelo de HIV com tratamento em que a taxa de mortalidade do vírus u e o período de ação do farmaco τ são correlacionados. Segundo Herz et al. (1996) estes parâmetros são estatisticamente correlacionados e além disso, estão relacionados pela equação $\tau = -\frac{1}{u} + 1$ o que justifica a modelagem destes por números fuzzy hiperbolicamente correlacionados.

Jafelice et al. (2009) propõe modelo semelhante a este, porém u e τ são modelados por números fuzzy não interativos, isto é, a distribuição de possibilidade conjunta destes parâmetros é dada pela t-norma do mínimo.

Nos trabalhos de Herz et al. (1996); Jafelice et al. (2009) e Cabral (2011) são incluídos o tratamento do HIV pelo uso de inibidores de protease. Este tipo de tratamento bloqueia a produção de novos vírus infecciosos v_I de células já infectadas, permitindo que sejam produzidos apenas vírus não infecciosos. Os vírus infecciosos decaem, porém, continuam infectando as células, ver A.Perelson et al. (1996); Winslow e Otto (1995).

Segundo Herz et al. (1996) a equação (6.8) também descreve a dinâmica total de vírus livres. Contudo, os vírus infecciosos não são produzidos no tempo $t > 0$ e declinam de acordo com a equação

$$\frac{dv_I(t)}{dt} = -uv_I(t), \quad (6.12)$$

e as equações (6.6) e (6.7) continuam sendo válidas.

De acordo com Herz et al. (1996) na escala de tempo considerada, a população de células não infectadas permanece constante $x(t) = x_0$.

Quando $x(t) = x_0$ e $v_I(t)$ declinando exponencialmente temos

$$y(t) = \frac{y_0}{a-u} [ae^{-u(t-\tau)} - ue^{-a(t-\tau)}] \text{ para } t > \tau. \quad (6.13)$$

Da equação (6.8) o tempo de evolução dos vírus livres é dado por $v(t) = v_0$ para $0 < t \leq \tau$ e

$$v(t) = v_0 e^{-u(t-\tau)} + \frac{uv_0}{a-u} \left(\frac{u}{a-u} [e^{-a(t-\tau)} - e^{-u(t-\tau)}] \right) + \frac{uv_0}{a-u} [a(t-\tau)e^{-u(t-\tau)}] \text{ para } t > \tau. \quad (6.14)$$

Solução fuzzy para a população de vírus livres com retardo e taxa de mortalidade do vírus hiperbolicamente correlacionados

Segundo Herz et al. (1996) o retardo, a taxa de mortalidade do vírus e a taxa de mortalidade das células infectadas estão relacionados pela expressão

$$T = \tau + \frac{1}{u} + \frac{1}{a},$$

onde T representa o tempo médio de geração viral.

De acordo com Herz et al. (1996) o tempo médio de geração viral varia entre $T = 2.5$ dias e $T = 3.1$ dias, vamos adotar $T = 3$ dias. Quanto ao parâmetro a , vamos supor que $a = 0.5/dia$. Com isto, vamos assumir que τ e u estão hiperbolicamente correlacionados por

$$\tau = -\frac{1}{u} + 1.$$

Conforme Jafelice et al. (2009) o retardo τ pode ser dado por um parâmetro fuzzy, o qual será modelado pelo número triangular fuzzy

$$\Gamma = (0.08; 0.53; 0.98) \text{ ou ainda } [\Gamma]^\alpha = [0.08 + 0.45\alpha, 0.98 - 0.45\alpha].$$

A taxa de mortalidade do vírus u é modelado pelo número fuzzy U tal que

$$[U]^\alpha = \frac{1}{1 - [\Gamma]^\alpha} = \left[\frac{1}{0.92 - 0.45\alpha}, \frac{1}{0.02 + 0.45\alpha} \right].$$

A distribuição de possibilidade conjunta C de Γ e U possui a seguinte função de pertinência

$$\mu_C(u, \tau) = \mu_\Gamma(\tau) \mathcal{X}_{\{\frac{-1}{u} + 1 = \tau\}}(u, \tau),$$

e temos

$$[C]^\alpha = \left\{ \left(u, \frac{-1}{u} + 1 \right) : u = (1-s) \left[\frac{1}{0.92 - 0.45\alpha} \right] + s \left[\frac{1}{0.02 + 0.45\alpha} \right], s \in [0, 1] \right\}.$$

A solução fuzzy para a carga viral será obtida pela aplicação da Proposição 2.6 na equação (6.14).

Portanto, os α -níveis da solução fuzzy para $t > \tau$ são dados por

$$\begin{aligned}
[(v_t)_C(U, \Gamma)]^\alpha &= (v_t)([C]^\alpha) \\
&= \{v_t(u, \tau) : (u, \tau) \in [C]^\alpha\} \\
&= \left\{v_0 e^{-u(t-\tau)} + \frac{uv_0}{0.5-u} \left(\frac{u}{0.5-u} [e^{-0.5(t-\tau)} - e^{-u(t-\tau)}]\right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{0.5uv_0}{0.5-u} (t-\tau) e^{-u(t-\tau)} : \tau = \frac{-1}{u} + 1 \text{ e } u \in [U]^\alpha\right\} \\
&= \left\{v_0 e^{-u(t+\frac{1}{u}-1)} + \frac{uv_0}{0.5-u} \left(\frac{u}{0.5-u} [e^{-0.5(t+\frac{1}{u}-1)} - e^{-u(t+\frac{1}{u}-1)}]\right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{0.5uv_0}{0.5-u} \left(t + \frac{1}{u} - 1\right) e^{-u(t+\frac{1}{u}-1)} : u \in [U]^\alpha\right\}.
\end{aligned}$$

Uma observação importante é que a solução determinística v_t para a população de vírus livres, obtida na equação 6.14 está sempre contida na solução fuzzy $(v_t)_C(\Gamma, U)$ para a população de vírus livres, isto é, para cada τ fixado, $\tau \in [\Gamma]^\alpha$ escolha u tal que $\tau = \frac{-1}{u} + 1$, daí

$$v_t \in [(v_t)_C(\Gamma, U)]^\alpha.$$

7. Considerações finais

Neste trabalho apresentamos uma forma de correlação entre números fuzzy, a qual chamamos de f -correlação, pois é obtida com o auxílio de uma função monótona injetora f . Estudamos, com esta nova forma de interatividade entre números fuzzy, as operações adição e produto de dois números fuzzy.

As operações são exemplificadas com o caso em que a função f é linear e também com o caso em que f é hiperbólica. Para o caso em que f é linear a adição de dois números fuzzy f -correlacionados pode gerar um número real, já para o caso em que f é uma hipérbole, verificamos que o produto de dois números fuzzy f -correlacionados pode também gerar um número real.

Finalmente, estudamos algumas das propriedades dos números fuzzy f -correlacionados.

8. *

Agradecimentos

O terceiro autor agradece ao CNPq pelo auxílio financeiro (processo no 306872/2009-9).

Referências

- A.Perelson, Neumann, A., Markowitz, M., Leonard, J., e Ho, D. (1995). Hiv-1 dynamics in vivo: virion clearance rate, infected cell life-span and viral generation time. *Nature (London)*, 273:117–122.
- A.Perelson, Neumann, A., Markowitz, M., Leonard, J., e Ho, D. (1996). Hiv-1 dynamics in vivo: virion clearance rate, infected cell life-span and viral generation time. *Science*, 271:1582–1586.
- Cabral, V. M. (2011). Equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos. Master's thesis, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP, Brazil (*in Portuguese*).
- Carlsson, C. e Fullér, R. (2001). On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 152:315–369.
- Carlsson, C., Fullér, R., e Majlender, P. (2004). Additions of completely correlated fuzzy numbers. Proceeding of IEEE international conference on fuzzy Systems, 25-29 July.
- Dubois, D. e Prade, H. (1981). Additions of interactive fuzzy numbers. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-26:926–936.
- Dubois, D. e Prade, H. (1988). *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York.
- Fullér, R. e Majlender, P. (2004). On interactive fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 143:355–369.
- Herz, A., Bonhoeffer, S., Anderson, R., May, R., e Nowak, M. (1996). Viray dynamics in vivo: Limitations on estimates of intracellular delay and virus decay. In. Proc. Natl. Acad. Sci (medical Sciences).
- Ho, D., Neumann, A., Perelson, A., Chen, S., Leonard, J., e Markowitz, M. (1995). *Nature (London)*, 373:123–126.
- Jafelice, R., Barros, L., e Bassanezi, R. (2009). A fuzzy delay differential equation model for hiv dynamics. Proceeding of IFSA-EUSFLAT Conference. Lisbon, Portugal.

Nowak, M., Bonhoeffer, S., Hill, A., Boehme, R., Homas, H., e McDade, H. (1996). Proc. Natl. Acad. Sci (USA).

Nowak, M., Bonhoeffer, S., Loveday, C., Balfe, P., Semple, M., Kaye, S., Tenant-Flowers, M., e Tedder, R. (1995). *Nature (London)*, 375:193–193.

Winslow, D. e Otto, M. (1995). Hiv protease inhibitors. *AIDS 9*, (Suppl.A):S183–S192.