

Controle ótimo em sistemas baseados em regras fuzzy

Chryslaine M. Pereira¹,

CMCC – UFABC, 09.210-170, Santo André/SP

Moiseis S. Ceconello

DMAT, ICET – UFMT, 78.060-900, Cuiabá/MT.

Rodney C. Bassanezi,

CMCC – UFABC, 09.210-170, Santo André/SP.

Resumo. Neste trabalho buscamos aplicar a teoria de controle ótimo para resolver problemas em que a dinâmica que determina o crescimento é definida por um sistemas baseadas em regras fuzzy. Vamos mostrar como podemos fazer uso das ferramentas clássicas de controle ótimo, como o Princípio de Pontryagin e Programação Dinâmica, para obter o melhor controle em problemas cuja equação restrição é modelada por sistemas baseados em regras fuzzy. Algumas simulações computacionais são feitas para ilustrar os resultados apresentados.

Palavras-chave: Controle ótimo; sistemas baseados em regras fuzzy; sistemas *p*-fuzzy.

1. Introdução

Em muitas situações desejamos exercer um *controle* sobre fenômenos modelados por equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\frac{dx}{dt} = G(x). \quad (1.1)$$

De modo geral, este controle pode ser feito considerando uma equação diferencial complementar

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u) \quad (1.2)$$

¹chrysnana@gmail.com

no qual a função g satisfaz $g(x, 0) = G(x)$ e a função $u(t)$, contínua por partes, é chamada de *função controle* (Kamien e Schwartz, 1981; Baumeister e Leitão, 2008; Craven, 1995).

Em muitos casos, desejamos ainda levar em consideração o *custo* ou *benefício* de se exercer um controle sobre o fenômeno modelado. De maneira geral, a medida da *performance* para um controle u pode ser determinada por um funcional da forma

$$J(u) = \phi(x(T)) + \int_0^T f(t, x, u) dt, \quad (1.3)$$

que para cada função controle $u(t)$ associa o valor $J(u(t))$ com $x(t)$ determinada pela *equação de estado* (1.2). Na literatura, $J(u)$ é chamado de *funcional objetivo*.

Está estabelecido um problema de *controle ótimo* quando desejamos obter uma função controle $u(t)$ que otimiza (maximiza ou minimiza) o funcional objetivo e este problema pode ser resolvido de duas maneiras: pelo *Princípio da otimalidade de Pontryagin* ou *Programação Dinâmica* (Baumeister e Leitão, 2008).

Em um problema de controle ótimo as variáveis são divididas em duas classes:

- **Variável de estado**, $x(t)$, no qual sua variação é regida por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.
- **Variável controle**, $u(t)$, uma função contínua por partes no tempo. Em geral a função controle $u(t)$, com $t \in [0, T]$, deve satisfazer alguma restrição, isto é, $u(t) \in U$ em que U é o conjunto das funções controle contínuas. Assim as funções $u(t)$ pertencentes ao conjunto U são chamadas de *controles admissíveis* (Valentino, 2009; Baumeister e Leitão, 2008).

É importante ressaltar que a variável de controle $u(t)$ é, inicialmente, uma variável independente da variável de estado $x(t)$. A dependência entre $u(t)$ e $x(t)$ passa a existir quando desejamos otimizar o funcional que mede a performance do controle. A simples escolha de uma função $u(t)$ determina apenas qual é política de controle que estamos adotando para o fenômeno modelado.

Os resultados desenvolvidos na teoria de controle ótimo tem sido utilizados para resolver inúmeros problemas de aplicações em fenômenos determinados por equações diferenciais. No entanto, em muitas outras situações podemos

nos deparar com fenômenos cujas as informações não são precisas e podem ser modelados usando a teoria dos conjuntos fuzzy.

Diversos exemplos de modelos usando sistemas de inferência fuzzy do tipo Mamdani podem ser encontrados em Barros e Bassanezi (2006); Silva (2005). Em Santos (2008), o autor apresenta uma estratégia de controle envolvendo sistemas p-fuzzy. No entanto, vale ressaltar que a estratégia apresentada por Santos (2008) não consiste em resolver um problema de controle ótimo mas sim apresentar um modelo que descreve o comportamento adotado na prática por agricultores. Não adotaremos essa estratégia neste trabalho.

Assim como no caso determinístico, pode ser necessário exercer controle sobre a dinâmica de fenômenos modelados por sistemas baseados em regras fuzzy. O objetivo neste trabalho é estabelecer e resolver problemas de controle ótimo, utilizando ferramentas da teoria fuzzy, em situações cuja subjetividade está presente na equação que governa a variável de estado. Isto é, vamos apresentar como podemos aplicar a teoria de controle ótimo nos casos em que a função G da eq. 1.1 é determinada por um sistema de regras fuzzy com inferência fuzzy do tipo Mamdani.

2. Controle ótimo determinístico

O mais simples problema de controle ótimo (Kamien e Schwartz, 1981) é dado por:

$$\max_u \int_{t_o}^{t_1} f(t, x, u) dt \quad (2.4)$$

$$\text{sujeito à } \frac{dx}{dt} = g(t, x, u) \quad (2.5)$$

$$x(t_o) = x_o \text{ fixo, } x(t_1) \text{ livre} \quad (2.6)$$

para t_o e t_1 especificados e sendo f e g funções continuamente diferenciáveis em seus três argumentos.

Vale observar que $u(t)$ influencia o funcional objetivo diretamente, com o seu próprio valor no funcional e, indiretamente, pela variável de estado $x(t)$ que está no funcional objetivo e é governada pela equação (2.5).

Admitindo que as funções que definem a dinâmica e o funcional sejam suficientemente suaves então o teorema fornece condições necessárias para se obter a solução de um problema de controle ótimo como estabelecido anteriormente.

Teorema 1 (Princípio da otimalidade de Pontryagin – Kamien e Schwartz (1981)). Se $\bar{u}(t) \in U$ é um controle ótimo para o problema (2.4) - (2.6), então existe uma função $\lambda(t)$ tal que:

$$f_u + \lambda g_u = 0, \quad x' = g(t, x, u), \quad \lambda' = -(f_x + \lambda g_x)$$

para todo $t \in [t_o, t_1]$ com $\lambda(t_1) = 0$.

A função λ é chamada de *função multiplicadora*.

A solução do problema de controle ótimo também pode ser obtida por meio do método conhecido como *programação dinâmica* (Baumeister e Leitão, 2008). Tal método consiste em transformar o problema original de controle em subproblemas de controle ótimo. A seguir descrevermos como a programação dinâmica pode ser utilizada para obtermos a solução de problemas de controle ótimo.

Pelo princípio de Bellman, para o problema (2.4) - (2.6) associamos a *função valor* $V : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$V(t_o, x_o) = \sup\{J(t_o, x_o, u, x_u) : u \text{ é um controle admissível}\}$$

no qual x_u é a solução da equação de restrição para a função de estado $u(t)$ e condição inicial x_o .

Nessas condições, \bar{u} é *controle ótimo* para o problema (2.4) - (2.6) quando temos

$$V(t_o, x_o) = J(t_o, x_o, \bar{u}, x_{\bar{u}}).$$

Sob certas hipótese impostas às função f e g , e também à classe de funções de controle $u(t)$, é possível garantir que existe uma função $\bar{u}(t)$ que torna a igualdade anterior verdadeira. Mais do que isso, a função de controle ótimo $\bar{u}(t)$ possui a seguinte propriedade.

Teorema 2 (Princípio de Bellman – Baumeister e Leitão (2008)). Se $\bar{u} : [t_o, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é um controle ótimo para o problema (2.4) - (2.6), então a restrição $\bar{u}|_{[t_1, T]}$ é um controle ótimo para o problema de $J(t_1, x_1, u, x)$ sujeito a restrição $x' = g(t, x, u)$ e $x_1 = x(t_1)$.

Nas seções seguintes, usaremos estes dois princípios em métodos numéricos para obtenção de soluções para alguns problemas de controle ótimo.

3. Controle ótimo fuzzy

Consideremos um sistema p -fuzzy constituído por uma equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = G_r(x) \quad (3.7)$$

no qual a função $G_r(x)$ é definida a partir de um sistema baseado em regras fuzzy. Por todo este trabalho, estamos considerando o método de inferência de Mamdani e o centro de massa como método de defuzzificação.

Nosso objetivo nesta seção é descrever como o processo de controle ótimo pode ser aplicado quando se tem o campo de direções da equação de estado dado por um sistemas baseados em regras fuzzy.

É importante observar que no modelo determinístico a função de controle $u(t)$ é uma variável independente da equação de estado

$$\frac{dx}{dt} = g(x, u),$$

ou seja, a função $u(t)$ determina, por meio de $g(x, u)$, a variação da função $x(t)$. Isso implica que a escolha de $u(t)$ determina a solução $x(t)$.

Para manter a semelhança com o caso determinístico podemos definir um *controle* sobre o sistema contínuo considerando a equação

$$\frac{dx}{dt} = g_r(x, u)$$

no qual $g_r(x, 0) = G_r(x)$. Isto é, na ausência de controle a dinâmica do sistema não se altera e $G_r(x)$ é determinada por uma base de regras.

A função $g_r(x, u)$, que determina a influência do controle $u(t)$ sobre o fenômeno modelado pelo sistema (3.7), pode ser definida de duas maneiras distintas:

- a) Acrescentando o controle $u(t)$ por meio de uma expressão determinística como, por exemplo, $g_r(x, u) = [G_r(x) - u]x$ ou $g_r(x, u) = G_r(x) - ux$, dentre outras formas possíveis;
- b) Acrescentando o controle $u(t)$ diretamente como uma variável de entrada da base de regras que define a função $G_r(x)$. Neste caso, a regras assumiriam a forma:

$$\text{Se } x \in A \text{ e } u \in B \text{ então } g_r(x, u) \in C.$$

Se associarmos um funcional da forma

$$J(u) = \phi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt$$

como medida da performance de exercer o controle $u(t)$ sobre a dinâmica $x(t)$, então podemos formular o problema de *controle ótimo* de um sistema análogo ao caso determinístico. Neste caso, o problema mais simples de controle ótimo para sistemas p-fuzzy seria da forma:

$$\max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt \quad (3.8)$$

$$\text{sujeito à } \frac{dx}{dt} = g_r(t, x, u) \quad (3.9)$$

$$x(t_0) = x_o \text{ fixo, } x(t_1) \text{ livre} \quad (3.10)$$

com t_0 e t_1 especificados e $g_r(x, u)$ determinada por uma das formas descritas anteriormente.

Se compararmos com o problema determinístico definido pelas equações (2.4) - (2.6), a única diferença na formulação do problema de controle (3.8) - (3.10) reside no fato de que a equação de estado (3.9) é definida a partir de um sistema baseado em regras fuzzy. Assim, as condições necessárias para existência de um *controle ótimo* $u^*(t)$ para este problema acima são semelhante ao caso determinístico, dados pelo princípio de Pontryagin.

4. Algumas aplicações

4.1. Controle do tipo I

Consideremos aqui uma população cuja dinâmica populacional é descrita por uma equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = G_r(x) \quad (4.11)$$

no qual a função G_r que descreve o crescimento é dada pela base de regras.

Conforme seção anterior, suponha que desejamos exercer um controle $u(t)$ nessa população cuja influência na sua dinâmica populacional é dada pela equação

$$\frac{dx}{dt} = G_r(x) - ux \quad (4.12)$$

com $x(0) = x_o > 0$ dado. Além disso, vamos assumir que o funcional que mede a performance do controle $u(t)$ é dado por

$$J(u) = \int_0^T (x^2 + \alpha u^2) dt,$$

com $T > 0$ fixo, e desejamos obter um controle $\bar{u}(t)$ que minimize o funcional J .

Biologicamente, este problema poderia representar uma situação em que desejamos controlar alguma espécie de modo a deixar sua população no menor nível possível levando em conta o menor gasto possível com o controle para atingir tal nível. A variável de controle $u(t)$ neste caso representaria o percentual de indivíduos que são retirados da espécie em cada unidade de tempo.

De acordo com o princípio da otimalidade de Pontryagin para obter a solução ótima $\bar{u}(t)$ devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G_r(x) - \frac{\lambda x^2}{2\alpha}, & x(0) = x_o \\ \frac{d\lambda}{dt} = -2x - \lambda G'_r(x) + \frac{\lambda^2 x}{2\alpha}, & \lambda(T) = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

no qual estamos assumindo que a função $G_r(x)$ possui derivada com relação a x .

Exemplo 1. Vamos considerar inicialmente que a a função $G_r(x)$ está determinada pela seguinte base de regras:

- R_1 . Se x é baixo (B) então $G_r(x)$ é alto (A);
- R_2 . Se x é médio baixo (MB) então $G_r(x)$ é médio alto (MA);
- R_3 . Se x é médio (M) então $G_r(x)$ é médio (M);
- R_4 . Se x é médio alto (MA) então $G_r(x)$ é médio baixo (MB);
- R_5 . Se x é alto (A) então $G_r(x)$ é baixo positivo (BP);
- R_6 . Se x é altíssimo (At) então $G_r(x)$ é baixo negativo (BN).

cujos os termos linguísticos de entrada e de saída apresentados nas figuras 1 e 2, respectivamente.

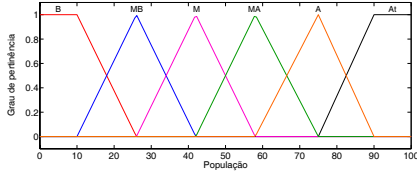


Figura 1: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos de entrada.

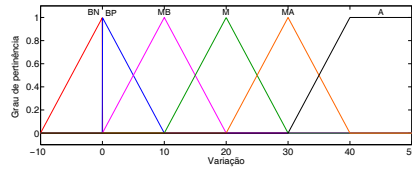


Figura 2: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos de saída.

Tomando $x_0 = 10$, $T = 10$ e $\alpha = 6400$, temos o controle exercido sobre a dinâmica populacional da espécie apresentada na figura 3, em que $x(t)$ é o fluxo da dinâmica sem controle e $\bar{x}(t)$ é o caminho ótimo uma vez exercido o controle ótimo sobre a população. Na figura 4 podemos observar comportamento do controle ótimo obtido.

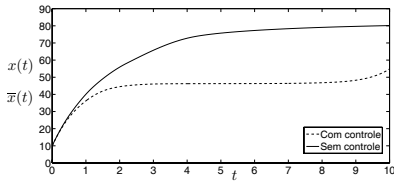


Figura 3: Dinâmica populacional com e sem controle para a base de regras do Exemplo 1.

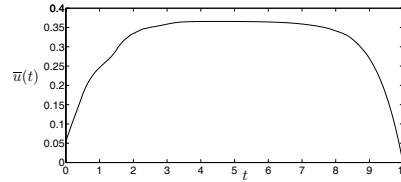


Figura 4: Controle ótimo para a base de regras do Exemplo 1.

□

Exemplo 2. Consideremos agora o caso em que a função $G_r(x)$ é determinada pela seguinte base de regras:

- R_1 . Se x é baixo (B) então $G_r(x)$ é baixo positivo (B_p);
- R_2 . Se x é médio baixo (MB) então $G_r(x)$ é médio positivo (M_p);
- R_3 . Se x é médio então (M) $G_r(x)$ é alto positivo (A_p);
- R_4 . Se x é médio alto (MA) então $G_r(x)$ é médio positivo (M_p);
- R_5 . Se x é alto (A) então $G_r(x)$ é baixo positivo (B_p);
- R_6 . Se x é altíssimo (At) então $G_r(x)$ é baixo negativo (B_n);

De acordo com Cecconello (2006), esta base de regras descreve uma dinâmica populacional com crescimento inibido.

Para uma simulação numérica, consideremos os termos linguísticos de entrada e de saída apresentados nas figuras 1 e 5, respectivamente.

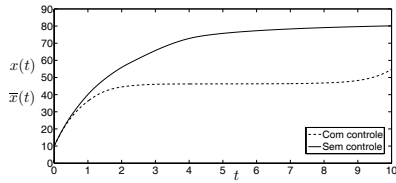


Figura 5: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos de saída.

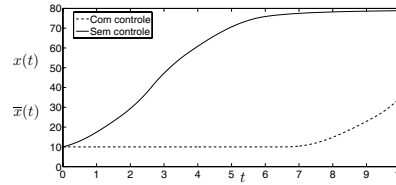


Figura 6: Dinâmica populacional com e sem controle gerado pela base de regras do Exemplo 2.

Na figura 6 temos a dinâmica populacional com e sem controle do problema dado, com $x_o = 10$, $T = 10$, $\alpha = 6400$.

O controle ótimo $\bar{u}(t)$ está representado na figura 7.

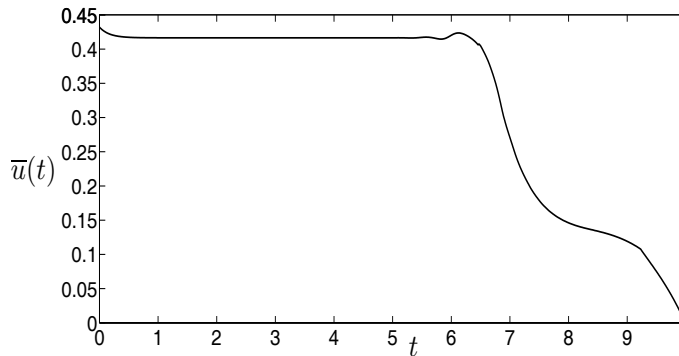


Figura 7: Controle ótimo para a base de regras do Exemplo 2.

Como podemos observar no gráfico, o controle exercido mantém a população aproximadamente constante até dois terço do período total do tempo considerado enquanto que no um terço restante não é mais vantajoso, em termos de custo, manter o controle com a mesma intensidade, uma vez que o crescimento populacional já não acarretará prejuízos sobre o funcional. □

4.2. Controle do tipo II

Consideremos agora o caso em que influência do controle sobre a dinâmica determinada pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = G_r(x) \quad (4.14)$$

é inserida por meio da definição de uma nova base de regras. Isto é, a função $g_r(x, u)$ da equação

$$\frac{dx}{dt} = g_r(x, u)$$

é definida por regras do tipo:

$$\text{Se } x \in A \text{ e } u \in B \text{ então } g_r(x, u) \in C.$$

Suponha que desejamos controlar a dinâmica populacional de uma espécie com crescimento inibido. Então, nessa situação a dinâmica populacional possui propriedades tais como:

- a) Existe uma capacidade suporte K , que limita a quantidade de indivíduos da espécie no ambiente;
- b) A função $G_r(x)$ é decrescente em relação a x e $G_r(x) \rightarrow 0$ quando x tende a K ;
- c) A função $G_r(x)$ é negativa se $x > K$.

Para exercermos um controle sobre a dinâmica populacional da espécie, primeiramente precisamos levar em consideração como a função $u(t)$ influencia a dinâmica populacional. Para simplificar, vamos considerar que o controle influencia negativamente a dinâmica populacional da espécie. Isto significa que quanto maior for o controle menor é a variação na quantidade de indivíduos da espécie.

Neste caso, a função $g_r(x, u)$ deve ser decrescente nas duas variáveis: na primeira por influência do crescimento inibido; na segunda por influência do controle sobre a dinâmica populacional. Assim, uma base de regras satisfazendo essas duas condições poderia ser a seguinte:

R_1 . Se x é baixa (B) e u é baixo (B) então $g_r(x, u)$ é alta (A);

R_2 . Se x é baixa (B) e u é médio (M) então $g_r(x, u)$ é média (M);

- R_3 . Se x é baixa (B) e u é alto (A) então $g_r(x, u)$ é baixa positiva (B_p);
- R_4 . Se x é média (M) e u é baixo (B) então $g_r(x, u)$ médio alto (MA);
- R_5 . Se x é média (M) e u é médio (M) então $g_r(x, u)$ é baixa positiva (B_p);
- R_6 . Se x é média (M) e u é alto (A) então $g_r(x, u)$ é baixa negativa (B_n);
- R_7 . Se x é alta (A) e u é baixo (B) então $g_r(x, u)$ é baixa positiva (B_p);
- R_8 . Se x é alta (A) e u é médio (M) então $g_r(x, u)$ é baixa negativa (B_n);
- R_9 . Se x é alta (A) e u é alto (A) então $g_r(x, u)$ é média negativa (M_n);
- R_{10} . Se x é altíssima (At) e u é baixo (B) então $g_r(x, u)$ é baixa negativa (B_n);
- R_{11} . Se x é altíssima (At) e u é médio (M) então $g_r(x, u)$ é média negativa (M_n);
- R_{12} . Se x é altíssima (At) e u é alto (A) então $g_r(x, u)$ é alta negativa (A_n).

Assim como no caso determinístico, a variável de controle $u(t)$ é, inicialmente, uma variável independente da variável de estado $x(t)$. A dependência entre $u(t)$ e $x(t)$ passa a existir quando desejamos otimizar o funcional que mede a performance do controle. A simples escolha de uma função $u(t)$ determina apenas qual é plano, ou política, de controle que estamos adotando para população.

Exemplo 3. Para ilustrar, consideremos que as funções que definem os termos linguísticos da base de regras anterior sejam as apresentadas nas figuras 8, 9 e 10.

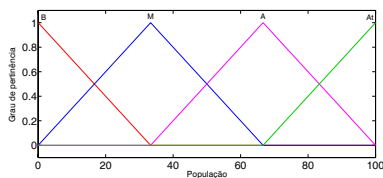


Figura 8: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos de entrada x .

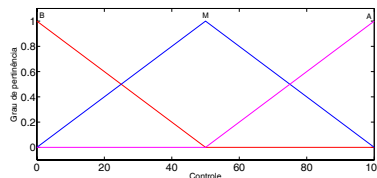


Figura 9: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos de entrada u .

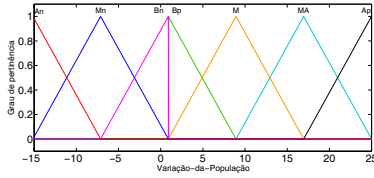


Figura 10: Conjuntos fuzzy dos termos linguísticos de saída g_r .

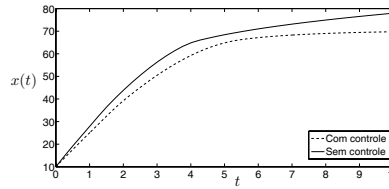


Figura 11: Dinâmica populacional gerada pela base de regras do Exemplo 3 com controle $u(t) = 12$, $t \in [0, 10]$.

Suponha ainda que adotemos $u(t) = 12$ para todo $t \in [0, 10]$, isto é, a política de controle adotada é constante igual a 12. A dinâmica populacional determinada pela base de regras para este escolha de controle está representada na figura 11.

Podemos ainda assumir a função $u(t) = 0.5x(t)$ como plano de controle da população, isto é, em cada instante o controle é proporcional ao número de indivíduos da população. Neste caso temos como resultado o comportamento apresentado na figura 12.

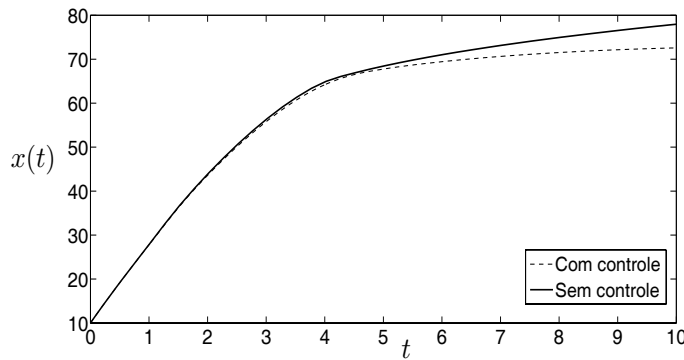


Figura 12: Dinâmica populacional gerada pela base de regras do Exemplo 3 com controle $u(t) = 0,5x(t)$.

□

O questionamento que surge então é qual a melhor política de controle para a população devemos adotar dentre todas as escolhas possíveis de controle. Para isto devemos levar em consideração um funcional para medir a performance de cada controle $u(t)$.

Suponha que consideremos o problema de minimizar o funcional

$$J(u) = \int_0^T (x^2 + \alpha u^2) dt. \tag{4.15}$$

Assim, estamos interessados em determinar qual política de controle $\bar{u}(t)$ devemos escolher de modo que o funcional tenha um valor mínimo.

A solução numérica obtida pelo princípio de otimalidade de Bellman considerando a dinâmica populacional dada pela base de regras do Exemplo 3 está representado na figura 13.

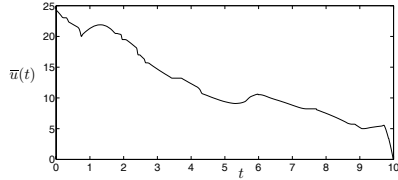


Figura 13: Controle ótimo com dinâmica dada pela base de regras do Exemplo 3 e funcional 4.15.

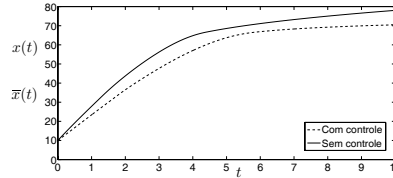


Figura 14: Dinâmica populacional sem controle $x(t)$ e com controle $\bar{x}(t)$.

Na figura 14 está representada a dinâmica populacional para ambos os casos: espécie controlada e não controlada.

Para efeitos de comparação a Tabela 1 apresenta os valores do funcional 4.15 para os controles $u(t) = 12$, $u = 0,5x$ e o controle ótimo $\bar{u}(t)$ em que $g_r(x, u)$ é dada pela base de regras da página (157).

Tabela 1: Valor do funcional $J(u)$ para diferentes políticas de controle.

$u(t)$	J
12	$3.3852 \cdot 10^4$
$0,5x$	$3.5728 \cdot 10^4$
$\bar{u}(t)$	$3.3399 \cdot 10^4$

Em problemas de controle ótimo determinístico o comportamento do controle ótimo obtido depende tanto da função de restrição g quanto do funcional J . De maneira análoga, em problemas de controle ótimo fuzzy, o comportamento do controle ótimo obtido depende tanto da base de regras que definem a dinâmica g_r quanto do funcional J . Em Pereira (2013) podemos encontrar

mais detalhes sobre problemas de controle ótimo em sistemas baseados em regras fuzzy.

5. Métodos numéricos

Os princípios de otimalidade de Bellman e Pontryagin fornecem as condições necessárias para se obter uma função controle $\bar{u}(t)$ que otimiza um dado funcional. Na prática, as soluções fornecidas pelos dois métodos são obtidas por meio de recursos computacionais uma vez que as equações podem não apresentar fórmulas explícitas para as soluções. A seguir, descreveremos os métodos usados para obter as soluções apresentadas anteriormente.

5.1. Otimalidade de Pontryagin

De acordo com a teoria de Pontryagin as equações

$$\begin{cases} H_u = 0 \\ \lambda' = -[f_x(t, x, u) + \lambda g_x(t, x, u)], & \lambda(t_1) = 0 \\ x' = g(t, x(t), u(t)), & x(t_o) = x_o \end{cases} \quad (5.16)$$

fornecem as condições necessárias para se obter o controle ótimo $\bar{u}(t)$ e função de estado $\bar{x}(t)$ (Kamien e Schwartz, 1981; Frasquillo, 1995).

Dois problemas surgem quando desejamos resolver o sistema acima por técnicas convencionais para solução de problemas iniciais: primeiramente, a equação $H_u = 0$ é uma equação algébrica possivelmente envolvendo $x(t)$, $u(t)$ e $\lambda(t)$ de modo que fixado t , estamos procurando por valores de x , u e λ que são as raízes de H_u . Em segundo lugar, as equações diferenciais x' e λ' envolvidas devem satisfazer condições em tempos diferentes. Por um lado temos $x(t_o) = x_o$ enquanto que a função λ deve satisfazer $\lambda(t_1) = 0$.

Vamos supor aqui que seja possível resolver a equação algébrica $H_u = 0$ para $u(t)$, isto é $u(t) = L(t, x, \lambda)$. Com isso, podemos reescrever o sistema apenas nas equações x' e λ'

$$\begin{cases} \lambda' = -[f_x(t, x, L(t, x, \lambda)) + \lambda g_x(t, x, L(t, x, \lambda))], & \lambda(t_1) = 0 \\ x' = g(t, x(t), L(t, x, \lambda)), & x(t_o) = x_o \end{cases} \quad (5.17)$$

O método mais comum para resolver o sistema (5.17) é conhecido como *método do chute* (Baumeister e Leitão, 2008). Tal método consiste nas seguintes etapas:

- a) Escolhe-se uma condição inicial λ_o para $\lambda(t)$;
- b) Resolvemos o sistema (5.17) com $\lambda(t_o) = \lambda_o$;
- c) Verificamos a condição $\lambda(t_1) = 0$ da solução obtida no passo anterior;
- d) Caso a condição $\lambda(t_1) = 0$ seja satisfeita então a solução foi obtida e não há mais o que se fazer. No entanto, se a condição $\lambda(t_1) = 0$ não é satisfeita, então escolhemos uma nova condição inicial λ_o para $\lambda(t)$ e repetimos o procedimento até que a condição seja satisfeita.

Vale observar aqui que para obtermos a solução do sistema (5.17) no segundo passo do método do chute, em geral, escolhemos algum método numérico para a solução de equações diferenciais como, por exemplo, o método de Euler modificado (Burden e Faires, 2000).

5.2. Otimalidade de Bellman

O princípio de otimalidade de Bellman apresentado no teorema 2 é uma poderosa ferramenta para se obter a solução numérica de um problema de controle ótimo.

Suponha que desejamos resolver o problema

$$\max_u J(t_o, x_o, u, x) \int_0^T f(t, x, u) dt \quad (5.18)$$

$$\text{sujeito à } \frac{dx}{dt} = g(t, x, u) \quad (5.19)$$

$$x(0) = x_o \text{ fixo, } x(T) \text{ livre} \quad (5.20)$$

Então, inicialmente fazemos uma partição $\{t_o = 0 < t_1 < t_2 < \dots, t_n = T\}$ do intervalo $[0, T]$ e resolvemos o subproblema

$$\max_u \int_{t_{n-1}}^T f(t, x, u) dt \quad (5.21)$$

$$\text{sujeito à } \frac{dx}{dt} = g(t, x, u) \quad (5.22)$$

$$x(t_{n-1}) = x_{n-1} \text{ fixo, } x(T) \text{ livre} \quad (5.23)$$

Em geral, assumimos que a função $u(t)$ é constante em cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ de modo que otimizar o problema acima torna-se equivalente à resolver um problema de otimização de função de uma variável real. Seja \bar{u}_{n-1} o controle ótimo para (5.21) - (5.23), $\bar{x}(t)$ a solução da equação de estado correspondente e $J(\bar{x}, \bar{u}_{n-1})$ o valor ótimo do funcional. É importante ressaltar que o valor \bar{u}_{n-1} depende da condição inicial x_{n-1} da equação de estado e vamos enfatizar isto denotando por $\bar{u}_{n-1}(x_{n-1})$.

O passo seguinte da rotina para se obter a solução é resolver o subproblema de controle ótimo

$$\max_u \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} f(t, x, u) dt + J(\bar{x}, \bar{u}_{n-1}) \quad (5.24)$$

$$\text{sujeito à } \frac{dx}{dt} = g(t, x, u) \quad (5.25)$$

$$x(t_{n-2}) = x_{n-2} \text{ fixo, } x(t_{n-1}) \text{ livre} \quad (5.26)$$

encontrando assim o controle ótimo $\bar{u}_{n-2}(x_{n-2})$. Pelo princípio da Otimalidade de Bellman a função $\tilde{u} : [t_{n-2}, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_{n-1} & \text{se } t \in [t_{n-1}, T] \\ u_{n-2} & \text{se } t \in [t_{n-2}, t_{n-1}) \end{cases} \quad (5.27)$$

é uma aproximação para o controle ótimo $\bar{u} : [t_{n-2}, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

Para obtermos uma aproximação o controle ótimo $\bar{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, procedemos de maneira análoga em todas as partições do intervalo $[0, T]$. Essa aproximação será melhor conforme consideramos mais elementos na partição.

6. Conclusão

Os sistemas baseados em regras fuzzy, frequentemente servem como uma primeira aproximação de modelagem matemática de fenômenos envolvendo processos variacionais. Assumindo que as funções que definem a dinâmica do fenômeno modelado satisfazem certas condições, mostramos como a teoria do controle ótimo pode ser aplicada para controlar sistemas baseados em regras fuzzy.

Como mostramos na seção 3, podemos considerar a influência do controle na dinâmica que descreve o fenômeno modelado de duas formas diferente: controle do tipo I e tipo II. No primeiro caso, a dinâmica é determinada por

um sistema baseado em regras fuzzy e a influência do controle sobre a dinâmica é por uma expressão determinística. No segundo caso, o controle influencia a dinâmica por meio de uma base de regras.

Exercer controle sobre dinâmicas definidas por base de regras fuzzy abrem uma perspectiva de aplicações em modelagem de fenômenos em diversas áreas. Por exemplo, os controles do tipo I podem ser aplicados em modelos que descrevem o controle de recursos naturais, como a captura de peixes por exemplo. Neste caso, a dinâmica populacional que descreve a quantidade de indivíduos pode ser modelada por uma base de regras enquanto que a captura influencia tal dinâmica de maneira determinística - a quantidade de peixes capturados por unidade de tempo.

Por outro lado, a influência de uma política de controle de pragas na agricultura está sujeita a diversos fatores que dificultam a modelagem determinística. Em outra situação, quantificar a influência de políticas de vacinação sobre uma população pode ser melhor aproximada considerando modelagem por sistemas baseados em regras fuzzy. Em ambos os casos, tal influência pode ser capturada por meio de um sistema baseado em regras fuzzy no qual temos o controle como uma variável de entrada deste sistema, como apresentamos na seção 4.2.

Referências

- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 2 de *Coleção textos didáticos*. IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Baumeister, J. e Leitão, A. (2008). *Introdução á teoria de Controle e programação dinâmica*. Projeto Euclides – SBM, Rio de Janeiro.
- Burden, R. L. e Faires, D. J. (2000). *Numerical Analysis*. Brooks Cole, 7 edição.
- Ceconello, M. S. (2006). Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas dinâmicos fuzzy. Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Craven, B. D. (1995). *Control and Optimization*, volume 4. Ed. Chapman & Hall, New York.

- Frasquilho, M. (1995). A teoria do controle ótimo. Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.
- Kamien, M. I. e Schwartz, N. L. (1981). *Dinamic optimization: the Calculus of variations and optimal control in Economics and Management*, volume 4. Elsevier Science Publishing, Amsterdam.
- Pereira, C. M. (2013). Uso da subjetividade em controle ótimo - aplicações em Biomatemática. Dissertação de Mestrado, UFABC, Santo André/SP.
- Santos, L. R. (2008). Estratégia para controle de pragas - sistema p-fuzzy com controle híbrido. Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Silva, J. D. M. (2005). *Análise de estabilidade de sistemas p-fuzzy*. Tese de Doutorado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Valentino, M. C. (2009). Controle ótimo de doenças fúngicas no feijoeiro. Dissertação de Mestrado, CMCC – UFABC, Santo André/SP.