

Teorema de Poincaré-Bendixson no espaço métrico fuzzy $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$

Michael M. Diniz¹
Rodney C. Bassanezzi²

DMA, IMECC, Unicamp – 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo: Neste texto faremos um estudo sobre órbitas periódicas em fluxos fuzzy bidimensionais com o intuito de estabelecermos uma versão do teorema de Poincaré-Bendixson para estes fluxos. Tais fluxos são definidos sobre o espaço $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ e são determinados pela extensão de Zadeh aplicada às soluções de equações diferenciais autônomas. Embasaremos nossos argumentos em ferramentas desenvolvidas por (Cecconello, 2010) e (Mizukoshi, 2004) para análise qualitativa de sistemas dinâmicos fuzzy. Como resultado, apresentamos dois teoremas. Primeiramente o teorema 3.1, proposto por (Cecconello, 2010), que garante a existência de uma região A , tal que qualquer órbita fuzzy iniciada em A converge para uma órbita periódica fuzzy. No teorema 3.1 é necessária a existência de um ponto de equilíbrio instável, o que não ocorre na versão clássica do teorema de Poincaré-Bendixson e, desta forma, propomos o teorema 3.2, que é mais geral e garante, sob certas condições, a existência de uma região A , tal que todas as soluções fuzzy iniciadas em A sejam uma órbita periódica fuzzy ou sejam atraídas para uma órbita periódica fuzzy. Este teorema pode ser visto como uma versão do teorema de Poincaré-Bendixson para espaços $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$. Por fim, ilustramos estes resultados utilizando os modelos presa-predador de Holling-Tanner e de Gause.

Palavras-chave: Órbitas periódicas fuzzy. Teorema de Poincaré-Bendixson. Extensão de Zadeh. Fluxos fuzzy.

¹ra100688@ime.unicamp.br

²rodney@ime.unicamp.br

1. Introdução

Na natureza é frequente a ocorrência de fenômenos periódicos. Podemos citar, por exemplo, o ciclo das águas, a quantidade de peixes em um rio, dentre outros. Quando estes fenômenos são modelados por um sistema de EDO's, as soluções deste sistema também possuem características periódicas assim como o evento modelado. No escopo da teoria clássica de EDO, já existem ferramentas direcionadas à análise qualitativa de soluções periódicas, em destaque o teorema de Poincaré-Bendixson.

Entretanto, é notória a necessidade de estudarmos e desenvolvermos ferramentas similares para sistemas de EDO's, nos quais determinados parâmetros são incertos ou parcialmente conhecidos. Neste trabalho almejamos obter uma versão do teorema de Poincaré-Bendixson para fluxos fuzzy em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, onde contemplamos as indeterminações inerentes na condição inicial utilizando conjuntos fuzzy.

2. Metodologia

2.1 Teorema de Poincaré-Bendixson em \mathbb{R}^2

Tomemos o seguinte sistema de equações diferenciais autônomas:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

onde, f é de classe C^1 , $\varphi_t(p)$ é uma solução da equação (1) com $t \in \mathbb{R}_+$ e a condição inicial $p = x_0 \in \mathbb{R}^2$. Para viabilizar a notação, denotaremos como *órbita* o conjunto $\gamma = \{\varphi_t(p) : t \geq 0\}$. Dizemos que um ponto p^* é dito θ -periódico se $\varphi_{t_0}(p) = \varphi_{t_0+k\theta}(p) = p^*$, onde p é a condição inicial, k é um inteiro positivo e t_0 é o primeiro instante que a solução passa por p^* . Por fim, dizemos que uma órbita é θ -periódica se para $\forall p \in \gamma$, $\varphi_t(p) = p$ para $t = \theta$ e $\varphi_t(p) \neq p$ para $t \in (0, \theta)$.

Definição 2.1. . Um ponto ω de uma determinada órbita γ , é um ponto z tal que, existe pelo menos uma sequência $\{t_n\} \rightarrow +\infty$ com $\varphi_{t_n}(p) \rightarrow z$. Definimos como ω -limite o conjunto de todos os pontos ω de uma órbita γ (Hanche e Olsen, 2007).

Para simplificar, adotaremos $\omega(p)$ como sendo o ω -limite de $\varphi_t(p)$. O teorema 2.1 é um importante resultado para classificação de órbitas periódicas quanto à sua estabilidade.

Teorema 2.1. *Sejam $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ uma órbita periódica para o fluxo bidimensional e $x_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto não periódico no exterior (interior). Então,*

- a) γ é estável pelo exterior (interior) se, e somente se, $\gamma = \omega(x_0)$ ou, para todo $\epsilon > 0$, existe uma órbita periódica γ_ϵ no exterior (interior) tal que $\text{dist}(\gamma, \gamma_\epsilon) < \epsilon$;
- b) γ é assintoticamente estável pelo exterior (interior) se, e somente se, $\gamma = \omega(x_0)$

O teorema 2.2 pode ser enunciado de várias formas, adotamos a versão encontrada em (Edelstein-Keshet, 1988), pois se adequa melhor ao contexto.

Teorema 2.2. *(Teorema de Poincaré-Bendixson) Seja $\varphi_t(p)$ uma solução do sistema (1). Se para $t \geq t_0$ a trajetória é limitada e não se aproxima de nenhum ponto singular, então esta trajetória é uma órbita periódica, ou se aproxima de uma órbita periódica para $t \rightarrow +\infty$.*

2.2 Soluções fuzzy em $\mathcal{E}(X)$

Os conjuntos fuzzy podem ser caracterizados através de sua função de pertinência como segue:

Definição 2.2. *Seja U um conjunto (clássico), um subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por uma função*

$$\mu_A(x) : U \rightarrow [0, 1]$$

Um conjunto fuzzy pode ser representado através de seus α -níveis (Ver teorema de Representação de Negoita e Ralescu em Negoita e Ralescu (1975)), cuja definição é a seguinte:

Definição 2.3. *Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in (0, 1]$. O α -nível de A é o subconjunto clássico de U definido por*

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1$$

O suporte de A é definido como $\text{supp}A = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}$ e $[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$. Os conjuntos anteriormente definidos são fundamentais na interrelação entre resultados da teoria clássica com a teoria fuzzy. O espaço métrico $\mathcal{E}(X)$ é induzido de um espaço métrico usual da seguinte forma:

Definição 2.4. *Seja (X, d) um espaço métrico, então $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é um espaço métrico com*

$$\mathcal{E}(X) = \{A \in \mathcal{F}(X) : \forall \alpha \in [0, 1], [A]^\alpha \text{ é compacto e não vazio}\} \quad (2)$$

$$d_\infty(\hat{u}, \hat{v}) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H([\hat{u}]^\alpha, [\hat{v}]^\alpha) \quad (3)$$

onde $\mathcal{F}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos fuzzy com suporte em X e d_H é a distância de Hausdorff induzida de d .

Definição 2.5. *(Princípio de extensão de Zadeh). Seja a função $f : X \rightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que, aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência (Bassanezi e Barros, 2010), é dada por*

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{x=f^{-1}(z)} \mu_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

onde $f^{-1}(z) = \{x; f(x) = z\}$ denomina-se a pré-imagem de z .

A solução $x(t)$ do sistema (1) é unicamente determinada pela condição inicial, pois f é de classe C^1 . Podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\varphi_t(x_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ou seja, $\varphi_0(x_0) = x_0$ e $\varphi'_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0))$; a solução $\varphi_t(x_0)$ é denominada fluxo gerado pelo campo vetorial f .

Consideremos um modelo biológico cuja condição inicial é incerta, isto é, $x(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$. Fazendo a extensão de Zadeh sobre $\varphi_t(x_0)$ em relação a x_0 , obtemos:

$$\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \quad (4)$$

Para estudarmos o comportamento assintótico de $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$ podemos definir $\omega(\mathbf{x}_0)$ da seguinte forma:

Definição 2.6. *Seja $y \in \mathcal{E}(U)$ e $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$, dizemos que \mathbf{y} é um ω -ponto de $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ se existir uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que:*

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}) \rightarrow 0$$

o conjunto ω -limite, isto é, $\omega(\mathbf{x}_0)$ é o conjunto de todos os ω -pontos de $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$.

2.3 Resultados preliminares

Podemos definir órbitas periódicas para fluxos fuzzy da seguinte forma:

Definição 2.7. *A órbita γ da solução fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x})$, onde \mathbf{x} é um ponto periódico fuzzy é chamada de órbita periódica fuzzy no conjunto $\mathcal{E}(U)$, sendo*

$$\gamma = \{\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}) : t \geq 0\}$$

.

Em (Ceconello, 2010) e (Mizukoshi, 2004) são propostos diversos resultados para análise qualitativa de sistemas fuzzy. No escopo das órbitas periódicas são estabelecidos resultados que relacionam órbitas determinísticas com órbitas fuzzy. Tais resultados são fundamentais para nosso objetivo principal e serão enunciados como segue:

Teorema 2.3. *Sejam $A \subset U$ tal que todo $x \in A$ é θ -periódico e $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U)$. Se $[\mathbf{x}]^\alpha$ é convexo e $[\mathbf{x}]^0 \subset A$, então \mathbf{x} é θ -periódico (Ceconello, 2010).*

Portanto, se todos os elementos de $[\mathbf{x}]^0$ são θ -periódicos então \mathbf{x} é um ponto periódico fuzzy com período θ .

Teorema 2.4. *Sejam γ uma órbita periódica para φ_t com período $\theta > 0$ e*

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\} \quad (5)$$

o conjunto periódico fuzzy determinado por γ . Então:

- a) γ é estável para φ_t se, e somente se, γ é estável para $\widehat{\varphi}_t$;
- b) γ é assintoticamente estável para φ_t se, e somente se, γ assintoticamente estável para $\widehat{\varphi}_t$ (Ceconello, 2010).

Pelo teorema 2.4, se todos os ponto de $[\mathbf{x}_0]^0$ pertencerem à uma órbita periódica determinística γ , então a estabilidade γ é igual a estabilidade da órbita γ gerada por $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$. Lembrando que uma órbita é instável quando não é estável.

Teorema 2.5. *Sejam γ uma órbita periódica determinística assintoticamente estável e $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$. Se $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(\gamma)$ então $\omega(\mathbf{x}_0) \subset \gamma$ é uma órbita periódica fuzzy (Ceconello, 2010).*

No teorema 2.5, o termo $A(\gamma)$ denota a região de atração da órbita γ . Em resumo, se $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(\gamma)$ então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para uma órbita periódica fuzzy assintoticamente estável.

3. Resultados

3.1 Teorema de Poincaré-Bendixson em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$

Utilizando os resultados anteriores, apresentamos dois teoremas que podem ser vistos como versões do teorema de Poincaré-Bendixson para o caso fuzzy.

Teorema 3.1. *(Ceconello, 2010) Sejam $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e invariante, x_e o único ponto de equilíbrio em K e $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$. Se x_e é instável então existe uma região $A \subset K$ tal que para $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para uma órbita periódica fuzzy.*

Demonstração. Por hipótese, o conjunto compacto K é invariante e possui um único ponto de equilíbrio instável. Desta forma, o teorema de Poincaré-Bendixson garante a existência de ao menos um ciclo limite, digamos γ , contido em K .

Além disso, o item b do teorema 2.1 garante que γ é assintoticamente estável pelo interior ou exterior. Seja então A a região de atração de γ , isto é, $A = A(\gamma)$. O teorema 2.4 garante então que o conjunto periódico fuzzy γ é assintoticamente estável e atrai os pontos $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ cujos α -níveis estão em $A(\gamma)$.

Como consequência, pelo teorema 2.5 podemos afirmar que se $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$, então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para uma órbita periódica fuzzy contida em γ . Logo, está provada a afirmação. \square

O teorema 3.1 exige que o ponto de equilíbrio em K seja instável, o que restringe o teorema 3.1 ao caso de existir apenas um ciclo limite. A fim de contornarmos essa restrição, propomos o teorema 3.2.

Teorema 3.2. *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e invariante e $x_0 \in K$. Se $\varphi_t(x_0)$ não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio então existe uma região $A \subset K$ tal que para $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ é uma órbita periódica fuzzy ou converge para uma.*

Demonstração. Por hipótese, o conjunto compacto K é invariante e a solução $\varphi_t(x_0)$ não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio. Portanto, o teorema de Poincaré-Bendixson garante que a solução $\varphi_t(x_0)$ se aproxima de uma órbita periódica γ ou é a própria órbita periódica γ , em outras palavras, podemos dizer que o $\omega(x_0)$ é um ciclo periódico.

Se $\varphi_t(x_0)$ for igual a γ , x_0 é um ponto periódico, então $x_0 \in \omega(x_0)$. Como em uma órbita periódica todos os pontos tem o mesmo período (ver (Cecconello, 2010)), o teorema 2.3 garante que para qualquer \mathbf{x}_0 , tal que $[\mathbf{x}_0]^0 \subset \omega(x_0) = A$ \mathbf{x}_0 é periódico, portanto, pela definição 2.7, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ é uma órbita periódica fuzzy.

Se $\varphi_t(x_0)$ converge para γ , então γ possui uma região de atração que chamaremos de $A(\gamma)$, isto é, γ é assintoticamente estável pelo interior e/ou pelo exterior. O teorema 2.4 garante que o conjunto periódico fuzzy γ é assintoticamente estável e atrai os pontos $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ cujos α -níveis estão em $A(\gamma)$.

Como consequência, pelo teorema 2.5 podemos afirmar que se $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(\gamma)$, então $\omega(\mathbf{x}_0) \subset \gamma$, isto é, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para uma órbita periódica fuzzy contida em γ . \square

3.2 Exemplos

Para ilustrar os teoremas 3.1 e 3.2, tomaremos dois exemplos de modelos biológicos baseados em EDO's autônomas.

Exemplo 3.1. *O modelo presa-predador de Holling-Tanner é representado pelo sistema de EDO's (6):*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{x+d} \\ \frac{dy}{dt} = ay \left(1 - \frac{\beta y}{x}\right) \end{cases} \quad x > 0 \quad (6)$$

A interpretação biológica deste modelo pode ser encontrada em (Braza, 2003). Tomemos os seguintes valores de parâmetros: $r=0.2$, $k=100$, $\beta=0.12$,

$m=0.03$, $d=20$, $\alpha=0.02$. Segundo (Ceconello e Bassanezi, 2010), com estes valores de parâmetros, temos como ponto de equilíbrio instável

$$z_e = (27.56, 229.66),$$

além disso, $x(t)$ é limitada por k ou pela condição inicial x_0 , enquanto que $y(t) \leq \max\{k/\beta, y_0\}$.

Portanto, as condições do teorema 3.1 são satisfeitas, garantindo assim a existência de uma região A , tal que $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para uma órbita periódica fuzzy quando $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$. Na figura 1 podemos ver a convergência de uma órbita determinística para um ciclo limite assintoticamente estável, o que satisfaz as hipóteses do teorema 3.2.

Podemos tomar o conjunto A como sendo todos os pontos internos ao ciclo limite γ_1 menos o ponto de equilíbrio z_e , isto é, $A = \overset{\circ}{\gamma}_1 - \{z_e\}$.

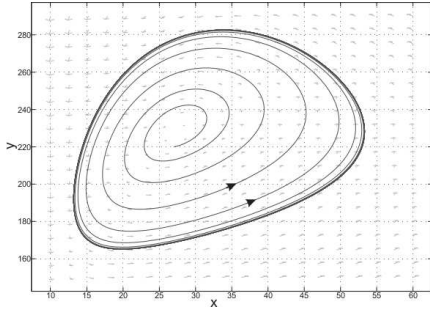


Figura 1: Modelo de Holling-Tanner clássico.

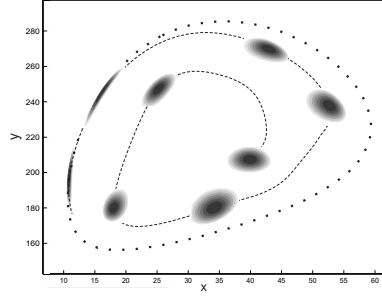


Figura 2: Modelo de Holling-Tanner com condição inicial fuzzy.

Na figura 2 consideramos uma condição inicial fuzzy \mathbf{x}_0 . Seja $m \in [\mathbf{x}_0]^0$, o grau de pertinência do ponto m ao conjunto fuzzy \mathbf{x}_0 é proporcional à sua tonalidade. Seja $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ tal que $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$, notamos que a trajetória do fluxo fuzzy converge para uma órbita periódica fuzzy conforme prevê o teorema 3.1 e o teorema 3.2.

O teorema 3.1 exige a existência de um ponto de equilíbrio instável para garantir a existência de uma região de atração para o fluxo fuzzy enquanto que o teorema 3.2 contempla casos mais gerais, conforme o exemplo 3.2.

Exemplo 3.2. O modelo presa-predador de Gause é representado de maneira simplificada(ver (Olivares e Palma, 2011)) pelo sistema de EDO's (7).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ((1-x)(x-M)(A-x^2))x \\ \frac{dy}{dt} = B(x^2 - C^2)y \end{cases} \quad (7)$$

O sistema acima possui os seguintes pontos de equilíbrio.

$$O = (0, 0) \quad Q_1 = (1, 0) \quad Q_2(M, 0) \quad Q_e = (C, L)$$

Tomando como valores dos parâmetros $A = 0.42$, $B = 0.1$, $C = 0.15$ e $M = 0.01$, o ponto de equilíbrio $Q_e = (C, L) = (0.15, 0.35)$ é assintoticamente estável e é interior à 2 ciclos limites, isto é, $Q_e \in \overset{\circ}{\gamma}_1 \subset \overset{\circ}{\gamma}_2$, sendo γ_1 instável e γ_2 assintoticamente estável, ver (Olivares e Palma, 2011). Como γ_2 é um ciclo limite atrator, toda órbita iniciada em um ponto interno à γ_2 é limitada.

Na figura 3, apresentamos uma trajetória que não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio e é limitada, logo, pelo teorema 3.2, existe uma região A onde qualquer órbita fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ com $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$ é atraída por γ_2 tal fato é ilustrado na figura 4. Esta região A é o conjunto de pontos entre γ_1 e γ_2 , isto é, $A = \overset{\circ}{\gamma}_2 - \overset{\circ}{\gamma}_1$. Para este exemplo não podemos aplicar o teorema 3.1, pois não existe um ponto de equilíbrio instável na região limitada por γ_2 .

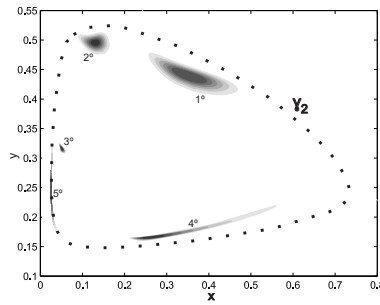
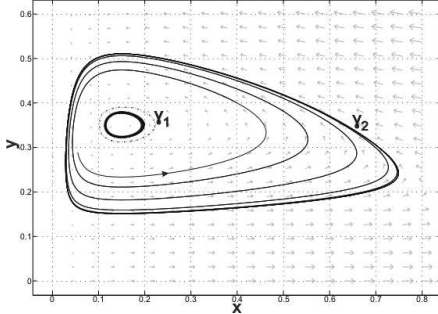


Figura 3: Modelo de Gause clássico.

Figura 4: Órbita fuzzy sendo atraída.

Como este modelo possui um ciclo limite instável, ele torna-se propício para ilustramos a necessidade de $[\mathbf{y}_0]^0 \subset A(\gamma)$ para que ocorra a convergência da solução fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{y}_0)$ para uma órbita periódica. Tomemos uma condição inicial \mathbf{y}_0 tal que $[\mathbf{y}_0]^0 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ e $[\mathbf{y}_0]^0 \not\subset \gamma_1$.

Neste caso, a órbita é limitada e não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio, porém $[\mathbf{y}_0]^0 \not\subset A(\gamma_2)$, tal fato faz com que o conjunto fuzzy se expanda de tal forma que não possua nenhuma característica periódica, este evento está ilustrado nas figuras 5 e 6. Nestas figuras mostramos o comportamento da condição inicial em seu primeiro ciclo e no seu quarto ciclo, respectivamente, percebemos que ocorre uma “deformação” da condição inicial, fazendo com que esta não se aproxime de nenhum ciclo periódico.

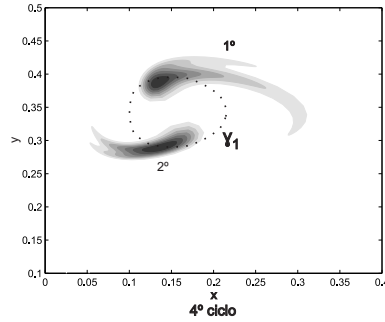
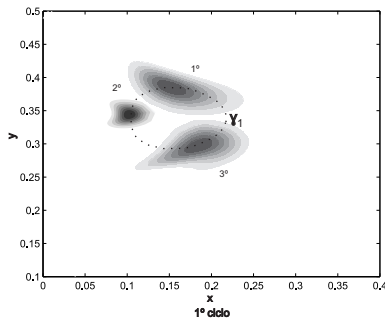


Figura 5: Órbita fuzzy expandindo - primeiro ciclo

Figura 6: Órbita fuzzy expandindo - quarto ciclo

4. Conclusões

Com o intuito de estabelecermos um resultado análogo ao teorema de Poincaré-Bendixson em espaços métricos $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ apresentamos dois teoremas. O teorema 3.1, proposto em (Ceconello, 2010), garante a existência de uma região de atração para uma órbita periódica fuzzy, se esta estiver em um conjunto compacto e invariante e se nesse conjunto existir um único ponto de equilíbrio instável. Um exemplo de aplicação deste teorema pode ser visto no exemplo 3.1.

O teorema 3.2 é mais geral e afirma que se existir uma órbita determinística que satisfaça as condições do teorema de Poincaré-Bendixson então existe uma região A , na qual qualquer órbita fuzzy iniciada em A é periódica ou é atraída para uma órbita periódica fuzzy. Nota-se que não existe a necessidade de haver um ponto de equilíbrio instável.

Os exemplos 3.1 e 3.2 ilustram a aplicação deste teorema. Em ambos os teoremas é necessário que o fecho do suporte da condição inicial esteja contido

em uma determinada região A , sendo A a região de atração de uma órbita periódica assintoticamente estável ou um subconjunto de uma órbita periódica estável. Um exemplo deste fato foi mostrado no exemplo 3.2.

É notável, portanto, que os exemplos apresentados justificam a aplicabilidade dos teoremas propostos em modelos de Biomatemática e ilustram estes resultados.

Referências

- Bassanezi, R. C. e Barros, L. C. (2010). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Editora Unicamp, S. Paulo.
- Braza, P. A. (2003). The bifurcation structure of the holling-tanner model for predator-prey interactions using two-timing. *SIAM J. APPL. MATH*, 63:889–904.
- Cecconello, M. e Bassanezi, R. (2010). *Sistemas dinâmicos Fuzzy: Modelagens alternativas para sistemas biológicos*, volume 50 of *Notas em matemática aplicada*. SBMAC, S.Carlos/SP.
- Cecconello, M. S. (2010). *Sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy - Aplicações em Biomatemática*. Tese de Doutorado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical models of Biology*. Macgraw-Hill, Mexico.
- Hanche, H. e Olsen (2007). The poincaré-bendixson theorem. Notas de Aula - <http://www.math.ntnu.no/hanche/kurs/dynsys/2007v/pb-a4.pdf>.
- Mizukoshi, M. (2004). *Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy*. Tese de Doutorado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Negoita, C. e Ralescu, D. A. (1975). *Applications of fuzzy sets to systems analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Olivares, E. G. e Palma, A. R. (2011). Multiple limit cycles in a gause type predator-prey model with holling type iii functional response and allee effect on prey. *Bull. Math. Biol.*, 73:1378–1397.

