Biomatemática **22** *(2012), 45–60* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos segundo t-normas

Valtemir M. Cabral[1],
DM, ICE, UFAM – 69.000-000, Manaus/AM.
Laecio C. Barros[2],
DMA, IMECC, UNICAMP – 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo. Neste artigo estudamos equações diferenciais fuzzy com coeficientes e condições iniciais incertas e modeladas por conjuntos fuzzy interativos. A interatividade é formalizada com o auxílio de t-normas semicontínuas superiormente. Apresentamos soluções para o problema por dois caminhos diferentes: o primeiro usa uma família de inclusões diferenciais enquanto o segundo é dado pela fuzzificação da solução determinística a partir do princípio de extensão de Zadeh. Concluímos que as soluções obtidas pelos dois métodos são iguais. Além disso, uma espécie de hierarquia nas incertezas das soluções é estabelecida quando optamos por uma das t-norma básicas (do mínimo, a t-norma do produto, a t-norma de Lukasiewicz e a t-norma produto drástico) para modelar a interatividade nos parâmetros. Finalmente, para ilustrar os conceitos introduzidos no artigo, estudamos o modelo malthusiano com parâmetros interativos.

Palavras-chave: *Numeros fuzzy interativos, t-normas; Equações diferenciais fuzzy; Princípio de extensão; Inclusão diferencial.*

1. Introdução

Nosso objetivo é estudar o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), w) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{1}$$

[1]valtemircabral@yahoo.com.br
[2]laeciocb@ime.unicamp.br

em que w é um parâmetro da equação e x_0 a condição inicial.

Se x_0 e w forem números reais, esse é um problema já bem estudado. No entanto, se esses parâmetros forem incertos, existem pelo menos duas modelagens matemáticas para eles: via teoria estocástica (May, 1973; Oksendal, 1992; Turelli, 1986) e via teoria dos conjuntos fuzzy (Cabral, 2011; Mizukoshi et al., 2007). Aqui trataremos do segundo caso.

Podemos associar ao problema (1) o problema de valor inicial (2) no qual o parâmetro passa a fazer parte da condição inicial

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & = & (x_0, w). \end{cases} \tag{2}$$

Os parâmetros da equação (2) são modelados por conjuntos fuzzy interativos (Dubois e Prade, 1981; Carlsson et al., 2004; Carlsson e Fullér, 2001) e estudado sob o ponto de vista das inclusões diferenciais fuzzy (Aubin, 1990; Baisodov, 1990; Diamond, 1999; Hullermeier, 1997) e também pela fuzzyficação da solução determinística (Barros e Bassanezi, 2010; Buckley, 1992; Buckley e Feuring, 2000; Mizukoshi et al., 2007; Oberguggenberger e Pittschmann, 1999).

2. Conceitos e resultados básicos

Denotamos por $\mathcal{K}^n$ a família de todos os subconjuntos compactos e não vazios de $\mathbb{R}^n$. Para $A, B \in \mathcal{K}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ as operações adição e multiplicação por escalar são definidas por

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \text{ e } \lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Um subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}^n$ é dado por uma função de pertinência

$$\mu_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1].$$

que generaliza a função característica de um conjunto clássico.
Os α-níveis de A são definidos da seguinte maneira

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1 \text{ e } [A]^0 = \overline{supp(A)},$$

onde, $supp(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) > 0\}$ é o suporte de A.
Denotamos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todos os subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$ em que $[A]^\alpha \in \mathcal{K}^n$ $\forall \alpha \in [0, 1]$.

O subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}$ é chamado um número fuzzy se todos os α-levels de A são intervalos fechados de $\mathbb{R}$ e o suporte de A é limitado.

A família de todos os números fuzzy é denotado por $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Definição 2.1 *O operador $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ é chamado uma norma triangular ou simplesmente t-norma, se para todos $x, y, z, w \in [0,1]$, as propriedades abaixo forem satisfeitas:*

t_1) $T(x,y) = T(y,x)$ *(Comutativa)*

t_2) $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$ *(Associativa)*

t_3) *Se* $y \leq z$ *então* $T(x,y) \leq T(x,z)$ *(Monotonicidade)*

t_4) $T(x,1) = x$ *(Elemento Neutro).*

A seguir apresentamos as quatro t-normas básicas deste trabalho, a t-norma do mínimo T_M, do product T_P, de Lukasiewicz T_L, e do produto drástico T_D, as quais são dadas, respectivamente, por:

$T_M(x,y) = min\{x,y\}$

$T_P(x,y) = x.y$

$T_L(x,y) = max\{x+y-1, 0\}$

$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \neq 1 \quad e \quad y \neq 1 \\ x, & \text{se} \quad y = 1 \\ y, & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Proposição 2.2 *(Cabral, 2011; Klement et al., 2000) Para todo $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ valem:*

a) $T_D(x,y) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y)$, $\quad T$ *uma t-norma arbitrária.*

b) $T_D(x,y) \leq T_L(x,y) \leq T_P(x,y) \leq T_M(x,y)$.

Definição 2.3 *Uma distribuição de possibilidade sobre $\mathbb{R}^n$ é um conjunto fuzzy C de $\mathbb{R}^n$ com função de pertinência $\mu_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ satisfazendo $\mu_C(x_0) = 1$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

A família das distribuições de possibilidade de $\mathbb{R}^n$ será denotada por $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.4 *Considere $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ então $C \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^{n+m})$ é chamada uma distribuição de possibilidade conjunta de A e B se*

$$\max_y \mu_c(x,y) = \mu_A(x), \qquad \max_x \mu_c(x,y) = \mu_B(y),$$

para todos $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Além disso, A e B são chamados as distribuições marginais de C.

Neste caso, temos $\mu_C(x,y) \leq min(\mu_A(x), \mu_B(y))$ e $[C]^\alpha \subseteq [A]^\alpha \times [B]^\alpha$.

Definição 2.5 *Dois números fuzzy $A \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^m$ são ditos interativos segundo a t-norma T se a distribuição de possibilidade conjunta C_T de A e B é definida pela t-norma T, isto é, $\mu_{C_T} : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow [0,1]$ é tal que $\mu_{C_T}(x,y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y))$.*

Neste contexto (Cabral, 2011; Dubois e Prade, 1981),

$$[C_T]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma. \tag{3}$$

Definição 2.6 *Os subconjuntos fuzzy A e B são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta C_{T_M} for dada por $\mu_{C_{T_M}}(x,y) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$. Caso contrário, são ditos interativos (Dubois e Prade, 1981, 1988; Carlsson e Fullér, 2001).*

Para números fuzzy não interativos temos (Cabral, 2011; Dubois e Prade, 1981):

$$[C_{T_M}]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e todo $\alpha \in [0,1]$.

A seguir apresentamos o princípio de extensão para dois subconjuntos fuzzy interativos segundo t-normas.

Definição 2.7 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ uma função, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ subconjuntos fuzzy interativos segundo a t-norma T. A extensão de f aplicada a (A,B) segundo T é o subconjunto fuzzy $f_T(A,B)$ de $\mathbb{R}^k$ cuja função de pertinência é definida por*

$$\mu_{f_T(A,B)}(w) = \begin{cases} \sup\limits_{(u,v)\in f^{-1}(w)} T(\mu_A(u), \mu_B(v)), & se \quad f^{-1}(w) \neq \emptyset \\ \\ 0 & , \quad se \quad f^{-1}(w) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $f^{-1}(w) = \{(u,v) : f(u,v) = w\}$.

Teorema 2.8 *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ seja uma função contínua, T uma t-norma semicontínua superiormente, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Nestas condições vale a igualdade*

$$[f_T(A,B)]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^\beta \times [B]^\gamma),\ \forall\alpha \in (0,1].$$

A prova do Teorema (2.8) pode ser encontrada em Fullér e Keresztfalvi (1990).

Teorema 2.9 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ seja uma função contínua, T_1 e T_2 t-normas semicontínuas superiormente com $T_2(x,y) \geq T_1(x,y)$ para todos $x, y \in (0,1]$, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Então*

$$f_{T_1}(A,B) \subseteq f_{T_2}(A,B), \text{ ou seja, } [f_{T_1}(A,B)]^\alpha \subseteq [f_{T_2}(A,B)]^\alpha, \forall\alpha \in (0,1].$$

Prova: Seja $z \in [f_{T_1}(A,B)]^\alpha = \bigcup_{T_1(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^\beta \times [B]^\gamma)$, então existem $\beta_1, \gamma_1 \in (0,1]$ tais que

$$z \in f([A]^{\beta_1} \times [B]^{\gamma_1}) \text{ e } T_1(\beta_1,\gamma_1) \geq \alpha.$$

Como $T_2(\beta_1,\gamma_1) \geq T_1(\beta_1,\gamma_1) \geq \alpha$, temos

$$z \in f([A]^{\beta_1} \times [B]^{\gamma_1}) \text{ e } T_2(\beta_1,\gamma_1) \geq \alpha.$$

Logo $z \in \bigcup_{T_2(\theta,\tau)\geq\alpha} f([A]^\theta \times [B]^\tau) = [f_{T_2}(A,B)]^\alpha$.

Portanto,

$$[f_{T_1}(A,B)]^\alpha \subseteq [f_{T_2}(A,B)]^\alpha.$$

□

No resultado seguinte apresentamos a versão do Teorema 2.9 para as 4 t-normas básicas.

Corolário 2.10 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ uma função contínua. Então com relação as t-normas semicontínuas superiormente T_M, T_P, T_L e T_D, valem as inclusões*

$$f_{T_D}(A,B) \subseteq f_{T_L}(A,B) \subseteq f_{T_P}(A,B) \subseteq f_{T_M}(A,B).$$

Prova: De acordo com o item (b) da Proposição (2.2), temos $T_D(x,y) \leq T_L(x,y) \leq T_P(x,y) \leq T_M(x,y)$.

Usando o Teorema (2.9) concluímos que

$$f_{T_D}(A,B) \subseteq f_{T_L}(A,B) \subseteq f_{T_P}(A,B) \subseteq f_{T_M}(A,B).$$

□

3. Inclusão diferencial

Considere a seguinte inclusão diferencial,

$$\begin{cases} x'(t) & \in & F(t,x(t)) \\ x(t_0)=x_0 & \in & X_0, \end{cases} \tag{4}$$

onde $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{K}^n$ é uma multifunção e $X_0 \in \mathcal{K}^n$.

Uma função $x(.,x_0)$, com $x_0 \in X_0$, é uma solução de (4) no intervalo $[t_0,T]$ se é absolutamente contínua e satisfaz (4) para quase todo $t \in [t_0,T]$. O conjunto atingível no tempo $t \in [t_0,T]$, associado ao problema (4), é o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathcal{A}_t(X_0) = \{x(t,x_0) : x(.,x_0) \text{ é solução de (4) }\}.$$

Uma generalização do problema (4), para modelar sistemas dinâmicos fuzzy, é obtida substituindo o conjunto $F(t,x)$ em (4) por um subconjunto fuzzy, ou seja, podemos considerar o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} x'(t) & \in & \widetilde{F}(t,x(t)) \\ x(t_0)=x_0 & \in & \widetilde{X}_0, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\widetilde{F} : [t_0,T]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é uma multifunção fuzzy e $\widetilde{X}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ (Mizukoshi et al., 2007).

De acordo com Hullermeier (1997), o problema (5) é interpretado como a família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) & \in & [\widetilde{F}(t,x(t))]^\alpha \\ x(t_0)=x_0 & \in & [\widetilde{X}_0]^\alpha, \end{cases} \tag{6}$$

Para cada $\alpha \in [0,1]$, $x_\alpha : [t_0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, é uma α-solução de (5) se é uma solução de (6).

O conjunto atingível das α-soluções de 6 é denotada por $\mathcal{A}_t([\widetilde{X}_0]^\alpha) := \mathcal{A}_t^\alpha$, $t_0 \leq t \leq T$, isto é,

$$\mathcal{A}_t^\alpha = \mathcal{A}_t([\widetilde{X}_0]^\alpha) = \{x_\alpha(t, x_0) : x_\alpha(., x_0) \text{ é solução de (6)}\}.$$

$\mathcal{A}_t^\alpha$ são os α-níveis de um subconjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(\widetilde{X}_0) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t_0 \leq t \leq T$ (para mais detalhes ver Aubin e Cellina (1984); Barros e Bassanezi (2010); Diamond (1999)). O subconjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(\widetilde{X}_0)$ é dito o conjunto fuzzy atingível do problema (5).

4. Equações diferenciais com parâmetros fuzzy interativos

Considere o problema de valor inicial (2), isto é,

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(0), w(0)) &= (x_0, w). \end{cases}$$

Admitindo que x_0 e w são incertos e modelados por conjuntos fuzzy X_0 e W, os quais são interativos segundo uma t-norma T semicontínua superiormente, a distribuição de possibilidade conjunta C_T de X_0 e W possui a função de pertinência $\mu_{C_T}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y))$.

Com isto, o problema (2) origina o seguinte problema

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0). \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in C_T \end{cases} \tag{7}$$

Como comentado na introdução, estudaremos o problema (7) de duas formas:

4.1. Via inclusão diferencial fuzzy

Neste caso, a solução de 7) é obtida a partir da familia de soluções do problema auxiliar

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in [C_T]^\alpha. \end{cases} \tag{8}$$

A função $x : [0, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é uma solução de (8) se x é absolutamente contínua e satisfaz o problema (8) para quase todo $t \in [0, t_0]$.

Os conjuntos atingíveis do problema (8) são da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([C_T]^\alpha) &= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (8) com } (x_0, w) \in [C_T]^\alpha\} \\ &= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (8) com } (x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma\}. \end{aligned}$$

4.2. Via fuzzificação da solução determinística de (2)

A solução do problema (7) é construída utilizando o princípio de extensão segundo t-normas, isto é, a partir do Teorema 2.8, olhando a solução de (2) como função da condição inicial.

A solução determinística do problema (2) é dada pelo operador

$$\begin{aligned} L_t: \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \\ & (x_0, w) \longmapsto L_t(x_0, w) = y(t, x_0, w). \end{aligned} \tag{9}$$

Com isto, a solução $(L_t)_T(X_0, W)$ do problema (7) é obtido pela aplicação do princípio de extensão segundo t-normas no operador $L_t(x_0, w) = y(t, x_0, w)$ da equação (9).

Utilizando o Teorema (2.8) temos, para todo $\alpha \in (0, 1]$, que

$$\begin{aligned} [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} L_t([X_0]^\beta \times [W]^\gamma) \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{ L_t(x_0, w) \quad : \quad (x_0, w) \in [X_0]^\beta \times [W]^\gamma \right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Assim, com a metodologia da extensão temos o seguinte

Corolário 4.1 *Para as soluções do problema (7), valem as seguintes identidades:*

(a) *Se a t-norma for a do mínimo, ou seja, quando* $\mu_{C_{T_M}}(x, y) = T_M(\mu_A(x), \mu_B(y))$,

$$[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha).$$

(b) *Se a t-norma for a do produto, isto é, quando* $\mu_{C_{T_P}}(x, y) = T_P(\mu_A(x), \mu_B(y))$,

$$[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}}).$$

(c) *Se a t-norma for a de Lukasiewicz. Neste caso,* $\mu_{C_{T_L}}(x, y) = T_L(\mu_A(x), \mu_B(y))$,

$$[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma}).$$

(d) *Se a t-norma for a do Produto Drástico, isto é,*

$$\mu_{C_{T_D}}(x,y) = T_D(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

$$[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha \times [W]^1) \cup L_t([X_0]^1 \times [W]^\alpha)$$

A seguir, apresentaremos o resultado que relaciona a solução do problema (7) obtida por meio da teoria de inclusão diferencial fuzzy com a solução obtida através do princípio de extensão.

Teorema 4.2 *Suponha que para cada $(x_0, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ exista uma única solução para o problema (2) no intervalo $[0, t_0]$. Então para o problema (7) existem os conjuntos $\mathcal{A}_t(C_T)$ e $(L_t)_T(X_0, W)$ e vale a igualdade.*

$$\mathcal{A}_t(C_T) = (L_t)_T(X_0, W),$$

para todo $0 \leq t \leq t_0$, onde T é uma t-norma semicontínua superiormente.

Prova: Vamos mostrar que vale a igualdade $\mathcal{A}_t([C_T]^\alpha) = [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha$, $\forall \alpha \in (0,1]$.

Por hipótese a função f é contínua e existe, para cada $(x_0, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, uma única solução para o problema (2). Então , para cada t fixo, a função $L_t(x_0, w) = y(t, x_0, w)$, a qual é solução de (2), é contínua em (x_0, w) (Hartman, 1964). Aplicando o princípio de extensão segundo T em $L_t(x_0, w) = y(t, x_0, w)$ obtemos a solução $(L_t)_T(X_0, W)$ do Problema (7). Neste caso,

$$[(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha \quad = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{ L_t(x_0, w) \quad : \quad (x_0, w) \in [X_0]^\beta \times [W]^\gamma \right\}.$$

Por outro lado, o conjunto atingível do problema (8), para cada $\alpha \in (0,1]$, é dado por

$$\mathcal{A}_t([C_T]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (8)}, (x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma\}.$$

Vamos agora mostrar que os conjuntos $\mathcal{A}_t([C_T]^\alpha)$ e $[(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha$ são idênticos.

Seja $u \in [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha$. Existem $\beta_0, \gamma_0 \in [0,1]$ tais que $T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha$ e $(x_0, w) \in [X_0]^{\beta_0} \times [W]^{\gamma_0}$.

Como $(x_0, w) \in [X_0]^{\beta_0} \times [W]^{\gamma_0}$ e $T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha$, então em particular $(x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma)$. Isto significa que u é um elemento do conjunto

$$\{y(t,x_0,w) : y'(t,x_0,w) = (f(x(t),w),0), (x_0,w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma)\}.$$

Logo, $u \in \mathcal{A}_t([C_T]^\alpha)$

Reciprocamente, seja $v \in \mathcal{A}_t([C_T]^\alpha)$, isto é, $v'(t,x_0,w) = (f(x(t),w),0)$ e $(x_0,w) \in [C_T]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma)$.

Porém, $(x_0,w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma)$, significa que para algum $\beta_1 \in [0,1]$ e para algum $\gamma_1 \in [0,1]$ teremos $T(\beta_1,\gamma_1) \geq \alpha$ e $(x_0,w) \in [X_0]^{\beta_1} \times [W]^{\gamma_1}$.

Com isto,

$$T(\beta_1,\gamma_1) \geq \alpha,\ v'(t,x_0,w) = (f(x(t),w),0) \text{ e } (x_0,w) \in [X_0]^{\beta_1} \times [W]^{\gamma_1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v &\in \{y(t,x_0,w) : y(.,x_0,w) \text{ é solução de (7)}, (x_0,w) \in [X_0]^{\beta_1} \times [W]^{\gamma_1}\} \\ &\subseteq \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \{y(t,x_0,w) : y(.,x_0,w) \text{ é solução de (7)}, (x_0,w) \in [X_0]^{\beta} \times [W]^{\gamma}\} \\ &= [(L_t)_T(X_0,W)]^\alpha. \end{aligned}$$

Assim, os conjuntos $\mathcal{A}_t([C_T]^\alpha)$ e $[(L_t)_T(X_0,W)]^\alpha$ são idênticos. □

Usando o Teorema 2.9 podemos comparar as soluções do problema (7) quando utilizamos as t-normas básicas para modelar as interatividades entre os parâmetros. Concluímos que a solução obtida segundo a t-norma do mínimo T_M possui diâmetro maior que a solução segundo a t-norma T_P, que por sua vez possui diâmetro maior que a solução segundo T_L e o diâmetro da solução segundo T_L é maior que a solução segundo T_D.

Corolário 4.3 *Suponha que para cada $(x_0,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ existe uma única solução para o problema (2) no intervalo $[0,t_0]$. Então com relação às soluções do problema (7) via princípio de extensão, quando T é respectivamente T_M, T_P, T_L e T_D, valem as inclusões*

$$(L_t)_{T_D}(X_0,W) \subseteq (L_t)_{T_L}(X_0,W) \subseteq (L_t)_{T_P}(X_0,W) \subseteq (L_t)_{T_M}(X_0,W).$$

Observação 4.4 *Vale observar que esse resultado permite ordenar a incertezas do problema (7) quando são usadas cada uma das t-normas básicas. Além disso, em função do Teorema 4.2 vemos que com relação a solução via inclusão diferencial , os conjuntos atingíveis também preservam a ordenação das incertezas do problema (7).*

Exemplo 4.5 *Considere o modelo Malthusiano*

$$\begin{cases} x'(t) &= wx(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{11}$$

com $x_0 \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{R}$.

Ao problema (11) associamos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &= (x_0, w), \end{cases} \tag{12}$$

cuja solução é dada por $L_t(x_0, w) = (x_0 e^{wt}, w)$.

Quando x_0 e w são incertos e modelados respectivamente pelos números fuzzy $X_0 = (2; 3; 4)$ e $W = (-5; -3; -1)$ interativos segundo uma t-norma semicontínua T, obtemos o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &\in C_T \end{cases} \tag{13}$$

onde, $\mu_{C_T}(x, w) = T(\mu_{X_0}(x), \mu_W(w))$, $[X_0]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$ e $[W]^\alpha = [2\alpha - 5, -2\alpha - 1]$.

O α-nível da solução do problema (13) via princípio de extensão segundo T é dado por

$$\begin{aligned} [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} L_t([X_0]^\beta \times [W]^\gamma) \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{ L_t(x_0, w) : (x_0, w) \in [X_0]^\beta \times [W]^\gamma \right\} \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{ (x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [\beta + 2, 4 - \beta] \times [2\gamma - 5, -2\gamma - 1] \right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, a solução do problema (13) via inclusão diferencial é obtida através da solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &\in [C_T]^\alpha. \end{cases} \tag{14}$$

O conjunto atingível do problema (14) é

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([C_T]^\alpha) &= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (14)}, (x_0, w) \in [C_T]^\alpha\} \\ &= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (14)}, (x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma\} \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \{L_t(x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (14)}, (x_0, w) \in [X_0]^\beta \times [W]^\gamma\} \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{ (x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [\beta + 2, 4 - \beta] \times [2\gamma - 5, -2\gamma - 1] \right\} \\ &= [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha. \end{aligned}$$

Agora vamos considerar os casos em que a t-norma T é respectivamente T_M, T_P, T_L e T_D.

Quando os conjuntos fuzzy X_0 e W são não interativos, isto é, $T = T_M$, temos

$$[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha = \left\{(x_0 e^{wt}, w) : x_0 \in [X_0]^\alpha \ e \ w \in [W]^\alpha\right\}.$$

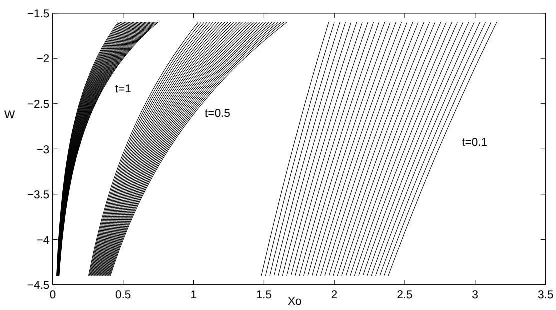

Figura 1: Nível 0.3 da solução do problema (13) com X_0 e W não interativos para alguns valores de t.

Na figura (1) apresentamos o nível $\alpha = 0.3$ do conjunto $[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha$, para diferentes valores do tempo. Para $t = 0.1$, $t = 0.5$ e $t = 1$ aparecem os conjuntos $\{(x_0 e^{wt}, w) : x_0 \in [X_0]^{0.3} \ e \ w \in [W]^{0.3}\}$.

Quando os conjuntos fuzzy X_0 e W são interativos segundo a t-norma T_P temos

$$[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma \in [\alpha, 1]} \left\{(x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}}\right\}.$$

Na figura (2) temos os conjuntos $[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^{0.3}$ e $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0.3}$. A parte mais escura corresponde ao conjunto $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0.3}$. Podemos ver na figura que $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0.3} \subseteq [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^{0.3}$, como prevê o Corolário 4.3. Com isto, dizemos que o conjunto $[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha$ é mais fuzzy que o conjunto $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha$, isto é, o diâmetro da solução do problema (13) segundo a t-norma T_M é maior que a solução segundo a t-norma T_P.

Quando os conjuntos fuzzy X_0 e W são interativos segundo a t-norma T_L temos

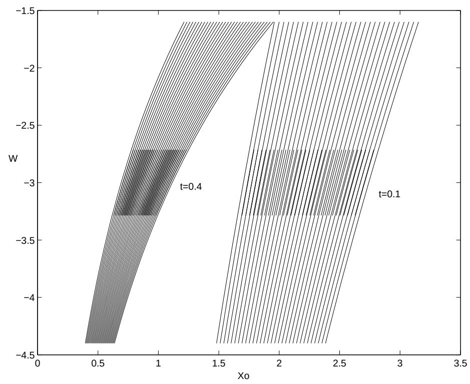

Figura 2: Nível $\alpha = 0.3$ das soluções do problema (13) para $T = T_M$ e $T = T_P$ para alguns valores de t.

$$[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma \in [\alpha,1]} \Big\{(x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma}\Big\}.$$

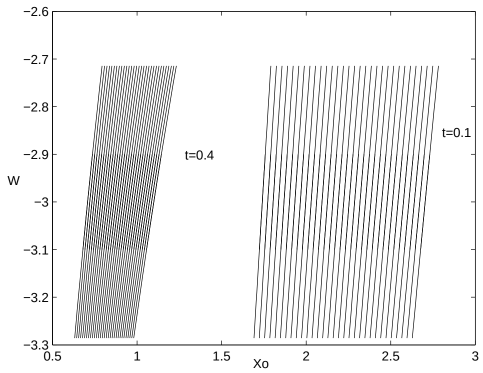

Figura 3: Nível $\alpha = 0.3$ das soluções do problema (13) para $T = T_P$ e $T = T_L$.

Na figura (3) temos os conjuntos $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0.3}$ *e* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^{0.3}$. *A parte mais escura do gráfico corresponde ao conjunto* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^{0.3}$. *Como vemos na figura* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^{0.3} \subseteq [(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0.3}$, *com isto, como no caso anterior, o conjunto* $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha$ *é mais fuzzy que o conjunto* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^\alpha$, *isto é, o diâmetro da solução do problema (13) segundo* *a t-norma T_P é maior que a solução segundo a t-norma T_L.*

Quando os conjuntos fuzzy X_0 e W são interativos segundo a t-norma T_D temos

$[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha = \{(x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^1\} \bigcup \{(x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [X_0]^1 \times [W]^\alpha\}$.

Neste exemplo vemos que as soluções do problema (13) segundo as t-normas T_M, T_P, T_L e T_D satisfazem o Corolário (2.10), isto é, valem as inclusões

$$[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha.$$

Cabe observar que devido ao Teorema 4.2 também são válidas as inclusões

$$\mathcal{A}_t([C_{T_D}]^\alpha) \subseteq \mathcal{A}_t([C_{T_L}]^\alpha) \subseteq (\mathcal{A}_t([C_{T_P}]^\alpha) \subseteq \mathcal{A}_t([C_{T_M}]^\alpha).$$

5. Conclusão

Neste trabalho tratamos das equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos segundo t-normas semicontínuas superiormente. Isto significa que a distribuição de possibilidade conjunta dos conjuntos fuzzy, dos parâmetros da equação, têm função de pertinência definida com o auxílio desta t-norma . As equações diferenciais fuzzy foram estudadas sob o ponto de vista da teoria das inclusões diferenciais e também pela fuzzificação da solução determinística associada à equação diferencial fuzzy. Ambas metodologias produzem a mesma solução.

Quando abordamos as equações diferenciais fuzzy utilizando o princípio de extensão como ferramenta para a obter a solução, verificamos que para as t-normas básicas os diâmetros das soluções verificam uma importante relação de inclusão. A solução que possui maior diâmetro ocorre quando os parâmetros são não interativos, isto é, quando são modelados via t-norma do mínimo (T_M), seguida do diâmetro da solução via t-norma do produto (T_P), depois vem o diâmetro da solução via t-norma de Lukasiewicz (T_L) e finalmente o diâmetro da solução via t-norma do produto drástico (T_D). A partir do Teorema 4.2, essa mesma relação nos diâmetros se mantêm caso a abordagem adotada fosse via inclusões diferenciais fuzzy.

Os resultados obtidos neste trabalho foram exemplificados e ilustrados através do modelo de crescimento populacional malthusiano com parâmetros fuzzy interativos.

Por fim, queremos dizer que estudo semelhante a esse foi feito em que a interatividade nos parâmetros não é dada por t-normas, e sim a partir do conceito de números fuzzy completamente correlacionados (Cabral e Barros, 2010; Carlsson et al., 2004). Neste caso, as soluções são obtidas apenas pelo princípio de extensão e concluímos também que as soluções das equações diferenciais fuzzy obtidas dessa forma possuem diâmetros menores que os das soluções via T_M. Mais ainda, é mostrado que a solução via T_M contém as soluções dos sistemas quando os parâmetros são considerados completamente correlacionados (Cabral e Barros, 2010).

Referências

Aubin, J. P. (1990). Fuzzy differential equation. *Problems of Control and Information theory*, 19:55–67.

Aubin, J. P. e Cellina, A. (1984). *Differential inclusion.* Springer–Verlag, Berlin.

Baisodov, V. A. (1990). Fuzzy differential inclusions. *PMM U.S.S.R*, 54:8–13.

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2010). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 of *Coleção Textos Didáticos.* IMECC–Unicamp, Campinas/SP, 2rd edition.

Buckley, J. J. (1992). Solving fuzzy equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 50:1–14.

Buckley, J. J. e Feuring, T. (2000). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 110(1):43–54.

Cabral, V. M. (2011). Equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos. Dissertação de Mestrado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP, Brazil (*in Portuguese*).

Cabral, V. M. e Barros, L. C. (2010). Equação diferencial fuzzy com parm̂etros completamente correlacionados. *BiomatemÃ¡tica*, 20:25–36.

Carlsson, C. e Fullér, R. (2001). On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 152:315–369.

Carlsson, C., Fullér, R., e Majlender, P. (2004). Additions of completely correlated fuzzy numbers. Proceeding of IEEE international conference on fuzzy Systems, 25-29 July.

Diamond, P. (1999). Time-dependent differential inclusions,cocycle attractors and fuzzy differential equations. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 7:734–740.

Dubois, D. e Prade, H. (1981). Additions of interactive fuzzy numbers. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC–26:926–936.

Dubois, D. e Prade, H. (1988). *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty.* Plenum Press, New York.

Fullér, R. e Keresztfalvi, T. (1990). On generalization of nguyen's theorem. *Fuzzy sets and systems*, 41:371–374.

Hartman, P. (1964). *Ordinary Differential Equations.* John Wiley & Sons, New York.

Hullermeier, E. (1997). An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems. *International Journal of Uncertainty, fuzziness knowledge-bases system*, 5:117–137.

Klement, E. P., Meziar, R., e Pap, E. (2000). *Triangular Norms*, volume 8. Kluwer Academic Publishers Dordrecht, Boston-London.

May, R. M. (1973). *Stability and complexity in model ecosystems.* Princeton University, New York.

Mizukoshi, M. T., Barros, L. C., Chalco-Cano, Y., Romàn-Flores, H., e Bassanezi, R. C. (2007). Fuzzy differential equation and the extension principle. *Information Sciences*, 177:3627–3635.

Oberguggenberger, M. e Pittschmann, S. (1999). Differential equations with fuzzy parameters. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 5:181–202.

Oksendal, B. (1992). *Stochastic differential equations:an introduction with applications.* Springer-Verlag.

Turelli, M. (1986). Stochastic community theory: A partially guided tour. *Biomathematics*, 17:321–339.