

# Um modelo para evolução de HIV positivo para populações em doença plenamente manifesta com parâmetros fuzzy correlacionados.

Francielle Santo Pedro<sup>1</sup>, Laécio C. Barros<sup>2</sup>  
DMA, IMECC, UNICAMP – 13.083-970, Campinas/SP.

**Resumo.** Nesse trabalho estudamos um modelo simples para evolução de HIV positivo para populações em doença plenamente manifesta com parâmetros incertos. Devido o tipo de incerteza, utilizamos a teoria dos conjuntos fuzzy para modelar matematicamente tal incerteza. Consideramos que os parâmetros incertos são números fuzzy correlacionados. Primeiro, supomos que as condições iniciais são linearmente correlacionados e depois, que a condição inicial está correlacionada com a taxa de transferência. Finalmente, são feitas comparações do modelo fuzzy com o modelo determinístico.

**Palavras-chave:** HIV; conjuntos fuzzy; números fuzzy correlacionados.

## 1. Introdução

HIV é a sigla em inglês do vírus da imunodeficiência humana. Causador da AIDS (síndrome da imunodeficiência adquirida), ataca o sistema imunológico, responsável por defender o organismo de doenças. As células mais atingidas são os linfócitos  $TCD4^+$ . É alterando o DNA dessa célula que o HIV faz cópias de si mesmo. Depois de se multiplicar, rompe os linfócitos em busca de outros para continuar a infecção ([www.aids.gov.br](http://www.aids.gov.br)).

Ter o HIV não significa ter AIDS. Após a exposição e infecção do vírus, indivíduos podem viver anos sem apresentar sintomas e sem desenvolver qualquer doença. Este período de tempo entre a infecção e a manifestação de

---

<sup>1</sup>fran.stopedro@gmail.com

<sup>2</sup>laecioch@ime.unicamp.br

doenças, que varia de indivíduo para indivíduo, é um valor impreciso, sendo essa, uma dificuldade no estudo desta síndrome, pois o indivíduo pode transmitir o vírus sem saber que está infectado. Outra dificuldade nesse estudo é a falta de dados concretos sobre o número da população soropositiva. Como ainda não existe cura para a AIDS, a principal forma de combate são medidas preventivas (Jafelice, 2003).

Alguns estudos mostram que a contagem de células  $CD4^+$  é o principal indicativo para a resposta terapêutica, ou seja, sugere que quanto menor for a quantidade dessas células no organismo, mais progredida está a doença ([www.aids.gov.br](http://www.aids.gov.br)).

Um modelo simples de transferência do número de indivíduos assintomáticos para sintomáticos, porém de grande importância pedagógica, foi proposto por Anderson et. al (1986) (cf. Murray, 2002).

O modelo é dado pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x; & x(0) = x_0 > 0 \\ \frac{dy}{dt} = \lambda x; & y(0) = y_0 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\lambda$  é a taxa de transferência da fase assintomática para a sintomática (AIDS),  $x(t)$  e  $y(t)$  são, respectivamente, a fração dos indivíduos infectados que não desenvolveram AIDS e os que já desenvolveram os sintomas em cada instante  $t$ .

No modelo (1) se considera que

$$x(t) + y(t) = 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

Resolvendo a primeira equação do sistema (1), temos

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Logo, de (2),  $y(t)$  é dado por

$$y(t) = 1 - x_0 e^{-\lambda t}. \quad (4)$$

Note que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$ .

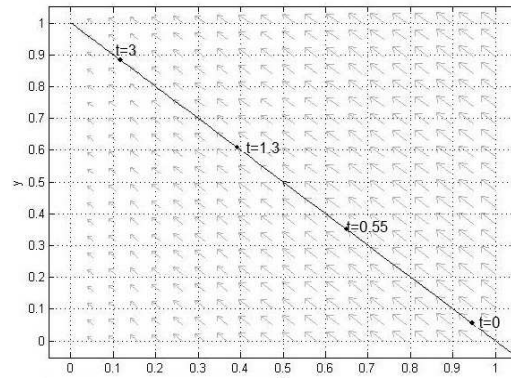


Figura 1: Retrato de fase para a solução determinística. A seta indica que a população tende ao ponto  $(0, 1)$ .

A figura 1 representa o retrato de fase de (1), supondo  $x + y = 1$  com condição inicial  $x_0 = 0.95$  e  $\lambda = 0.7$ . Os pontos em destaque representam os valores do fluxo de (1), dado pelo operador

$$L_t(x_0, y_0) = \left( x_0 e^{-\lambda t}, 1 - x_0 e^{-\lambda t} \right), \quad (5)$$

para diversos valores de  $t$ .

Em epidemiologia, uma mesma doença pode se manifestar de diversas formas em distintos indivíduos, e com diferentes graus de gravidade. Doenças são geralmente descritas por termos linguísticos, que são diversas vezes vagos.

No caso do HIV, apesar da alta sensibilidade dos testes usados na detecção do vírus, indivíduos recém-infectados podem permanecer soronegativos nas primeiras seis semanas (Jafelice, 2003). Dificultando a precisão do número de indivíduos soropositivos e, conseqüentemente, o número de indivíduos assintomáticos e sintomáticos nesta população.

Assim, estudamos esse modelo, supondo incertezas nas condições iniciais através da teoria de conjuntos fuzzy, uma vez que os modelos determinísticos (tradicionais) não atendem a subjetividade presente em alguns fenômenos epidemiológicos.

Vamos considerar o operador dado em (5), que é solução de (1) em  $t$ , como função da condição inicial.

Consideraremos então que as condições iniciais de (1) sejam incertas, modeladas por números fuzzy. O fato de  $x + y = 1$ , sugere que  $x_0$  e  $y_0$  sejam linearmente correlacionados – ou completamente correlacionados – (Cabral e Barros, 2010; Cabral, 2011). Faremos a abordagem da solução de (1), com incertezas, por duas técnicas: via inclusão diferencial e via extensão (fuzzificação) da solução determinística (Cabral e Barros, 2010; Mizukoshi et al., 2007). Para essas abordagens, se fazem necessários alguns conceitos e resultados, próprios da teoria dos conjuntos fuzzy.

## 2. Conceitos Básicos

**Definição 2.1** Um subconjunto fuzzy  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  é caracterizado por uma função de pertinência  $\mu_A : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ .

**Definição 2.2** Seja  $A$  um subconjunto fuzzy de  $\mathbb{R}$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . O  $\alpha$ -nível de  $A$  é o subconjunto clássico de  $\mathbb{R}$  definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1 \text{ e } [A]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) > 0\}} \\ \text{para } \alpha = 0.$$

**Definição 2.3** O suporte de  $A$  é o subconjunto clássico de  $\mathbb{R}$  definido por  $\text{supp}(A) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$ .

**Definição 2.4** Um subconjunto fuzzy  $A$  é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual  $\mu_A$  esta definida, é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e satisfaz:

1. todos os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são intervalos fechados e não vazios de  $\mathbb{R}$ ;
2.  $\text{supp}(A)$  é um conjunto limitado

**Definição 2.5** Uma  $t$ -norma é uma operação binária  $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz:

1. elemento neutro:  $1tx = x$ ;
2. comutativa:  $xy = yx$ ;
3. associativa:  $xt(ytz) = (xty)tz$ ;
4. monotonicidade: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $xy \leq uv$ .

A família dos subconjuntos fuzzy do  $\mathbb{R}^n$  é denotada por  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , enquanto a dos números fuzzy é denotada por  $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ .

**Definição 2.6** *Uma distribuição de possibilidade sobre  $\mathbb{R}^2$  é um subconjunto fuzzy  $C$  de  $\mathbb{R}^2$  com função de pertinência  $\mu_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz  $\mu_C(x_0) = 1$  para algum  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ .*

A família de distribuição de possibilidade de  $\mathbb{R}^2$  será denotada por  $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^2)$ .

**Definição 2.7** *Sejam  $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$  números fuzzy e  $C \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^2)$ , então  $\mu_C$  é uma distribuição de possibilidade conjunta de  $A$  e  $B$  se  $\max_y \mu_C(x, y) = \mu_A(x)$  e  $\max_x \mu_C(x, y) = \mu_B(y)$ , para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $\mu_A$  e  $\mu_B$  são chamadas distribuições marginais de  $C$ .*

**Definição 2.8** *Os números fuzzy  $A$  e  $B$  são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta  $C$  for dada por  $\mu_C(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$ . Caso contrário, são ditos interativos.*

**Definição 2.9** *Dois números fuzzy  $A$  e  $B$  são ditos interativos de acordo com a  $t$ -norma  $T$ , se a distribuição de possibilidade conjunta  $C$  de  $A$  e  $B$  é definida pela  $t$ -norma  $T$ , isto é,  $\mu_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  é tal que  $\mu_C(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y))$ .*

**Definição 2.10** *Sejam  $f$  uma função tal que  $f : X \rightarrow Z$  e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ . O princípio de extensão de Zadeh de  $f$  é a função  $\hat{f}$  que, aplicada a  $A$ , fornece o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \mu_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}.$$

**Definição 2.11** *Dois números fuzzy  $A$  e  $B$  são ditos linearmente correlacionados se existem  $q, r \in \mathbb{R}$ , com  $q \neq 0$ , tais que sua distribuição de possibilidade conjunta é dada por*

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) = \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) \quad (6)$$

onde

$$\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } qx + r = y \\ 0 & \text{se } qx + r \neq y \end{cases}$$

é a função característica da reta  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : qx + r = y\}$ .

Neste caso, se  $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$  então  $[B]^\alpha = q[A]^\alpha + r$ ,  $\mu_B(x) = \mu_A\left(\frac{x-r}{q}\right)$ ,  $q \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $[C]^\alpha = \{(x, qx + r) \in \mathbb{R}^2 : x = (1-s)a_1^\alpha + sa_2^\alpha, s \in [0, 1]\}$ , para  $\alpha \in [0, 1]$ .

Vamos apresentar agora o princípio de extensão para dois números fuzzy linearmente correlacionados.

**Definição 2.12** *Seja  $C$  uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições de possibilidades marginais  $\mu_A$  e  $\mu_B$ , e seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função contínua. Se  $A$  e  $B$  são números fuzzy linearmente correlacionados, então a extensão de  $f$  aplicada a  $(A, B)$  é o conjunto fuzzy  $f_C(A, B)$  cuja função de pertinência é definida por*

$$\mu_{f_C(A, B)}(u, v) = \begin{cases} \sup_{(x, y) \in f^{-1}(u, v)} \mu_c(x, y) & \text{se } f^{-1}(u, v) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(u, v) = \emptyset, \end{cases}$$

onde  $f^{-1}(u, v) = \{(x, y) : f(x, y) = (u, v)\}$ .

A seguir apresentaremos um teorema cuja prova se encontra em (Cabral e Barros, 2010; Cabral, 2011), o qual será útil na solução de (1), via fuzzificação da solução determinística, supondo incertezas nas condições iniciais.

**Teorema 2.1** (Cabral, 2011) *Sejam  $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$  números fuzzy linearmente correlacionados, seja  $C$  sua distribuição de possibilidade conjunta e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função contínua. Então,*

$$[f_C(A, B)]^\alpha = f([C]^\alpha).$$

### 3. Modelo de transferência de assintomático para sintomático com condições iniciais fuzzy linearmente correlacionadas

Voltando ao modelo (1), as condições iniciais são tais que  $x_0 + y_0 = 1$ . Como dito anteriormente, vamos supor que as condições iniciais sejam números fuzzy  $x_0$  e  $y_0$  linearmente correlacionados, com distribuição conjunta  $C$ . Assim, sua função de distribuição de possibilidade conjunta é dada por

$$\mu_C(x_0, y_0) = \mu_{X_0}(x_0) \mathcal{X}_{\{x_0+y_0=1\}}(x_0, y_0), \quad (7)$$

onde  $\mathcal{X}_{\{x_0+y_0=1\}}(x_0, y_0)$  é a função característica da reta  $\{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : x_0 + y_0 = 1\}$ .

Se  $[X_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ , vem que

$$[C]^\alpha = (x_0, 1 - x_0) \in \mathbb{R}^2 : x_0 = (1 - \gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1]. \quad (8)$$

Na abordagem aqui proposta, (1) deve ser substituído pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-\lambda x, \lambda(1 - x)) \\ (x_0, y_0) \in C \end{cases}. \quad (9)$$

O significado de (9) será dado na secção seguinte uma vez que  $C$  é fuzzy e o sentido de  $(x_0, y_0) \in C$  deve ser dado.

Outra forma de resolver o problema (9) é a fuzzificação do operador (5)  $L_t(x_0, y_0) = (x_0 e^{-\lambda t}, 1 - x_0 e^{-\lambda t})$ , baseada no princípio de extensão de Zadeh (Definição 2.12). Do ponto de vista teórico, esse método é bem mais simples e a solução produzida por ele será comparada com aquela dada por (11). Mizukoshi et al. (2007) mostra que a Definição 2.12, sob certas hipóteses, essas duas metodologias produzem a mesma solução.

### 3.1. Solução do modelo fuzzy de transferência de assintomáticos para sintomáticos via inclusão diferencial

Resolver o problema (9) via inclusão diferencial significa resolver a família de problemas

$$\begin{cases} \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-\lambda x, \lambda(1 - x)) \\ (x_0, y_0) \in [C]^\alpha, \end{cases} \quad (10)$$

para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , onde  $[C]^\alpha$  é dado por (8) (Cabral, 2011).

A solução de (9) é um conjunto fuzzy de funções cujos  $\alpha$ -níveis são formados pela família de soluções de (10). Os conjuntos atingíveis de (9) são conjuntos fuzzy de  $\mathbb{R}$  cujos  $\alpha$ -níveis são soluções de (10) e são dados por

$$\mathcal{A}_t([C]^\alpha) = \{z_\alpha(t, x_0, y_0) : z_\alpha(\cdot, x_0, y_0) \text{ é solução de (10)}\},$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t([C]^\alpha) &= \{z_\alpha(t, x_0, y_0) : z'_\alpha(t, x_0, y_0) = (-\lambda x, \lambda(1-x)), \\
&\quad (x_0, y_0) \in [C]^\alpha\} \\
&= \left\{ \left( x_0 e^{-\lambda t}, 1 - x_0 e^{-\lambda t} \right) : (x_0, y_0) \in [C]^\alpha \right\} \\
&= \left\{ \left( x_0 e^{-\lambda t}, 1 - x_0 e^{-\lambda t} \right) : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1] \right\}
\end{aligned} \tag{11}$$

### 3.2. Solução do modelo fuzzy de transferência de assintomáticos para sintomáticos via extensão da solução determinística

Nossa principal ferramenta será a fuzzificação do operador linear  $L_t(\cdot, \cdot)$  dado em (5), onde  $(L_t)_C$  é obtido pela aplicação do princípio de extensão via  $C$  na solução determinística do problema (1). De acordo com o Teorema 2.1 temos que  $[(L_t)_C(x_0, y_0)]^\alpha = L_t([C]^\alpha)$ .

Assim, os  $\alpha$ -níveis da solução do sistema (9), para cada  $\alpha \in [0, 1]$ , são

$$\begin{aligned}
[(L_t)_C(x_0, y_0)]^\alpha &= L_t([C]^\alpha) = \{L_t(x_0, y_0) : (x_0, y_0) \in [C]^\alpha\} \\
&= \left\{ L_t(x_0, 1-x_0) : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1] \right\} \\
&= \left\{ \left( x_0 e^{-\lambda t}, 1 - x_0 e^{-\lambda t} \right) : x_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1] \right\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Podemos observar que, neste caso, os conjuntos (11) e (12) são iguais. Portanto, tanto a solução do problema (9) por inclusões diferenciais, quanto a solução por extensão da solução determinística são iguais. Em Cabral (2011), esse resultado é demonstrado de maneira geral, sob algumas hipóteses para um sistema mais geral que (1).

### 3.3. Solução determinística $\times$ solução fuzzy

Até aqui encontramos, para cada  $t$ , soluções fuzzy para (9). A função de pertinência da solução fuzzy  $X(t)$  é obtida por (Puri e Ralescu (1983))

$$\mu_{X_t}(x) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \{\alpha \in [0, 1] : x \in \mathcal{A}_t([C]^\alpha)\}.$$

Assim,  $\mu_{X_t}(x) = \frac{x e^{\lambda t} - b}{x_0 - b}$ . Para realizar uma correspondência entre a solução fuzzy e a solução determinística, é razoável defuzzificar a solução fuzzy já que



assim, para cada  $t$ , tem-se um número real. Uma maneira é fazer isso pelo método do centro de gravidade.

Para cada  $t \geq 0$ , seja  $\mu_{X_t}$  a função de pertinência da solução fuzzy de (10), que é dada por (12). Para simplificar a notação, chamemos de  $x_t$  os possíveis valores assumidos por  $X_t$ . A curva  $\bar{x}(t)$ , que é a defuzzificação de  $X_t$ , é dada por

$$\bar{x}(t) = \frac{\int_{\text{supp}(X_t)} x_t \mu_{X_t}(x_t) dx_t}{\int_{\text{supp}(X_t)} \mu_{X_t}(x_t) dx_t}. \quad (13)$$

$$\text{Observemos que } x(t) = \int_{\text{supp}(X_t)} \frac{\mu_{X_t}(x_t)}{\int_{\text{supp}(X_t)} \mu_{X_t}(x_t) dx_t} dx_t = 1.$$

Portanto, (13) é exatamente a esperança matemática da variável aleatória  $X_t$ . Essa observação é importante, pois no decorrer do texto, usaremos a desigualdade de Jensen, que é própria para variável aleatória.

**Exemplo 1:**

Para o nosso problema, vamos denotar a solução fuzzy de (1) por:  $X_t(X_0) = X_0 e^{-\lambda t}$ , e para o número de assintomáticos no instante  $t$ ,  $X_0$  um número fuzzy triangular cuja a função de pertinência de  $X_0$  é dada por

$$\mu_{X_0}(x_0) = \begin{cases} \frac{x_0 - b}{a - b} & \text{se } b \leq x_0 \leq a \\ \frac{c - x_0}{c - a} & \text{se } a < x_0 \leq c, \\ 0 & \text{se } x_0 \notin [b, c] \end{cases}$$

onde  $a, b, c \in [0, 1]$ ,  $a \neq b \neq c$  e  $[X_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(a - b)\alpha + b, (a - c)\alpha + c]$ .

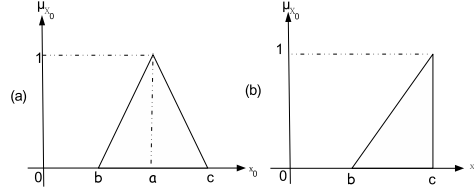


Figura 2: Em (a)  $X_0$  como número fuzzy triangular com pertinência máxima em  $a$  e em (b)  $X_0$  como número fuzzy triangular com pertinência máxima em  $c$ .

Daí,

$$\bar{x}(t) = \int_b^c x_0 e^{-\lambda t} \frac{\mu_{X_0}(x_0)}{\int_b^c \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0. \quad (14)$$

Como

$$\int_b^c \mu_{X_0}(x_0) dx_0 = \frac{c-b}{2}, \quad (15)$$

temos,

$$\bar{x}(t) = \frac{2}{c-b} \int_b^c x_0 e^{-\lambda t} \mu_{X_0}(x_0) dx_0 = \frac{1}{3}(a+b+c)e^{-\lambda t}. \quad (16)$$

A função de pertinência de  $X_t$  é

$$\mu_{X_t}(x) = \frac{xe^{\lambda t} - b}{x_0 - b}. \quad (17)$$

Calculando a pertinência da solução determinística na fuzzy em (17) obtemos  $\mu_{X_t}(x) = \frac{x_0 e^{-\lambda t} e^{\lambda t} - b}{x_0 - b} = 1$ .

### 3.4. Defuzzificação da solução fuzzy $X_t$

A Figura 3(a) representa a solução fuzzy de (9), em que  $x$  e  $y$  são linearmente correlacionadas, e estão sobre a reta  $x + y = 1$ .

A seguir, iremos comparar  $\bar{x}(t)$  com a solução fuzzy  $X_t = X_0 e^{-\lambda t}$ , cujos  $\alpha$ -níveis são dados por (12). Para isso, usaremos a desigualdade de Jensen:

**Teorema 3.1** *Seja  $f$  uma função convexa e  $Y$  uma variável aleatória, então  $E(f(Y)) \geq f(E(Y))$ .*

Para cada  $t > 0$ , definimos

$$g_t(x) = x e^{-\lambda t}. \quad (18)$$

A função  $g_t(x)$  é convexa e concâva para todo  $x$ . Portanto, a desigualdade de Jensen nos dá

$$\bar{x}(t) = E(g_t(X_0)) = g_t(E(X_0)) = g_t(\bar{X}_0) \quad (19)$$

onde  $\bar{X}_0 = \int \frac{\mu_{X_0}(x_0)}{\int \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0$ .

Quando defuzzificamos a solução fuzzy, tratada na Figura 3(a), encontramos a curva real  $\bar{x}(t) = 0.95e^{-0.7t}$  (com parâmetros  $a = 0.95$ ,  $b = 0.9$ ,  $c = 1$  e  $\lambda = 0.7$ ), que é solução determinística do sistema (1). Essa mesma solução tem grau de pertinência 1 na fuzzy e esta encontra-se no centro de cada “segmento fuzzy” para cada  $t > 0$ .

**Exemplo 2:**

Agora façamos o mesmo estudo para um caso particular de quando  $a = c$ . Seja  $X_0$  o número fuzzy triangular dado como na figura 3.3(b).

Assim,

$$\mu_{X_0}(x_0) = \begin{cases} \frac{x_0-b}{c-b} & \text{se } b \leq x_0 \leq c \\ 0 & \text{se } x_0 \notin [b, c] \end{cases}$$

onde  $b, c \in [0, 1]$ ,  $b \neq c$  e  $[X_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(c-b)\alpha + b, c]$ .

Daí,

$$\bar{x}(t) = \int_b^c x_0 e^{-\lambda t} \frac{\mu_{X_0}(x_0)}{\int_b^c \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0. \quad (20)$$

Como

$$\int_b^c \mu_{X_0}(x_0) dx_0 = \frac{c-b}{2}, \quad (21)$$

temos,

$$\bar{x}(t) = \frac{2}{c-b} \int_b^c x_0 e^{-\lambda t} \mu_{X_0}(x_0) dx_0 = \frac{1}{3}(b+2c)e^{-\lambda t}. \quad (22)$$

Percebemos que para  $c = 1$  temos  $\frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}(b+2c) < 1$ , uma vez que o menor valor que  $b$  pode assumir é zero.

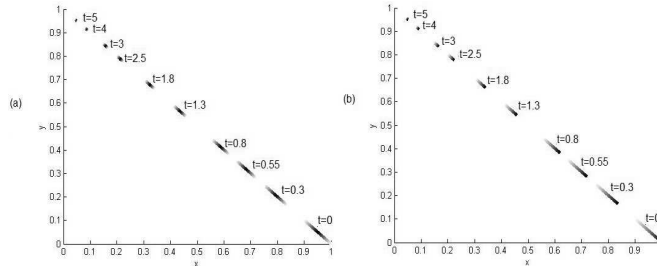


Figura 3: (a) Retrato de fase para a solução fuzzy de (9) quando tomamos  $a = 0.95$ ,  $b = 0.9$ ,  $c = 1$  e taxa de transmissão  $\lambda = 0.7$ . (b) Retrato de fase para a solução fuzzy de (9) quando tomamos  $b = 0.9$ ,  $c = 1$  e taxa de transmissão  $\lambda = 0.7$ . Para cada  $t \geq 0$ , em ambas as figuras, regiões mais escuras significam que maior é sua possibilidade (pertinência) à solução do problema, isto é, maior a confiabilidade dos números de assintomático e de sintomático.

Quando defuzzificamos a solução fuzzy tratada na figura 3(b) encontramos a curva real  $\bar{x}(t) = 0.96e^{-0.7t}$  (com parâmetros  $b = 0.9$ ,  $c = 1$  e  $\lambda = 0.7$ )

que possui grau de pertinência 1 na solução fuzzy. E, se notarmos a figura 3(b) vemos que, de fato, as regiões mais escuras, que indicam maior pertinência, se encontram à direita do “segmento fuzzy”.

É interessante notar que a adoção de  $X_0$  simétrico produz as “distribuições centradas” para cada  $t$  como representada na figura 3(a). Por outro lado, supondo  $X_0$  uma distribuição não simétrica (figura 3.3(b)) produz “distribuições não simétricas” das soluções, como pode ser visto na 3(b).

#### 4. Modelo de transferência de assintomático para sintomático com condição inicial e taxa de conversão linearmente correlacionadas

Do ponto de vista biológico é razoável supor que  $\lambda$  e  $x_0$  estão correlacionados, pois esses dois parâmetros estão intimamente dependentes da carga viral ( $v$ ) e do nível de  $CD4^+$  de cada indivíduo (ver: Jafelice, 2003). O parâmetro  $CD4^+$  é o mais importante do ponto de vista médico, pois estudos mostram que a contagem da célula de  $CD4^+$  é o melhor indicador para a resposta terapêutica, uma vez que, quanto maior a quantidade de célula melhor o estado de saúde do paciente (Jafelice, 2003). Assim, faremos  $\lambda = \lambda(CD4)$  e  $x_0 = x_0(CD4)$ .

Em nosso modelo, consideraremos  $x_0$  e  $\lambda$  números fuzzy ( $\Lambda, X_0$ ) correlacionados. Mais especificamente, que são linearmente correlacionados com correlação linear negativa:  $\Lambda = qX_0 + r$  em que  $q$  é negativo.

Desta forma, ao problema (1) associaremos o sistema aumentado

$$\begin{cases} \left( \frac{dx}{dt}, \frac{d\lambda}{dt} \right) &= \left( -\lambda x, 0 \right) \\ (x(0), \lambda(0)) &= (x_0, \lambda) \end{cases}, \quad (23)$$

cujas soluções são dadas por  $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$  e  $\lambda(t) = \lambda$ ,  $\forall t \geq 0$ .

De maneira análoga ao que foi feito na seção 3, considere o operador para cada  $t$  fixo

$$L_t(x_0, \lambda) = \left( x_0 e^{-\lambda t}, \lambda \right), \quad (24)$$

Supondo que  $x_0$  e  $\lambda$  são incertos e modelados por números fuzzy linearmente correlacionados,  $X_0$  e  $\Lambda$ , então existem  $q, r \in \mathbb{R}$  tais que a distribuição

de possibilidade conjunta  $C$  de  $X_0$  e  $\Lambda$  é dada por

$$\mu_C(x_0, \lambda) = \mu_{X_0}(x_0)\mathcal{X}_{\{qx_0+r=\lambda\}}(x_0, \lambda) = \mu_\Lambda(\lambda)\mathcal{X}_{\{qx_0+r=\lambda\}}(x_0, \lambda), \quad (25)$$

onde  $\mathcal{X}_{\{qx_0+r=\lambda\}}(x_0, \lambda)$  é a função característica da reta

$$\{(x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : qx_0 + r = \lambda\}.$$

Se  $[X_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ , vem que

$$[C]^\alpha = (x_0, qx_0 + r) \in \mathbb{R}^2 : x_0 = (1 - \gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1]. \quad (26)$$

Dessa forma, o sistema (1) lida com parâmetros incertos. Nesta abordagem devemos ter (23) substituído por

$$\begin{cases} \left( \frac{dx}{dt}, \frac{d\lambda}{dt} \right) &= \begin{pmatrix} -\lambda x \\ 0 \end{pmatrix} \\ (x_0, \lambda) &\in C \end{cases}. \quad (27)$$

#### 4.1. Solução do modelo fuzzy de transferência de assintomáticos para sintomáticos via inclusão diferencial

Resolver o problema (27) via inclusão diferencial significa resolver o problema

$$\begin{cases} \left( \frac{dx}{dt}, \frac{d\lambda}{dt} \right) &= \begin{pmatrix} -\lambda x \\ 0 \end{pmatrix} \\ (x_0, \lambda) &\in [C]^\alpha, \end{cases} \quad (28)$$

onde  $[C]^\alpha$  é dado por (26).

Os conjuntos atingíveis de (28) são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([C]^\alpha) &= \{z_\alpha(t, x_0, \lambda) : z'_\alpha(t, x_0, \lambda) = (-\lambda x, 0), (x_0, \lambda) \in [C]^\alpha\} \\ &= \left\{ \left( x_0 e^{-\lambda t}, \lambda \right) : (x_0, \lambda) \in [C]^\alpha \right\} \\ &= \left\{ \left( x_0 e^{-(qx_0+r)t}, qx_0 + r \right) : x_0 = (1 - \gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

#### 4.2. Solução do modelo fuzzy de transferência de assintomáticos para sintomáticos via extensão da solução determinística

Estudaremos o modelo fuzzy (27) de transferência de assintomáticos para sintomáticos, onde nós fuzzificaremos o operador linear  $L_t(\cdot, \cdot)$  dado em (24). Como sabemos, para os  $\alpha$ -níveis da solução, é válido

$$[(L_t)_C(X_0, \Lambda)]^\alpha = L_t([C]^\alpha).$$

Assim, os  $\alpha$ -níveis da solução (28) são

$$\begin{aligned} [(L_t)_C(X_0, \Lambda)]^\alpha &= L_t([C]^\alpha) = \{L_t(x_0, \lambda) : (x_0, \lambda) \in [C]^\alpha\} \\ &= \left\{ L_t(x_0, qx_0 + r) : x_0 = (1 - \gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1] \right\} \\ &= \left\{ \left( x_0 e^{-(qx_0+r)t}, qx_0 + r \right) : x_0 = (1 - \gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0, 1] \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Portanto, temos que, tanto a solução do problema (27) por inclusão diferencial, quanto por extensão da solução determinística são as mesmas. Como já dito antes, em Cabral (2011), esse resultado é demonstrado de maneira geral, sob algumas hipóteses para o sistema (1).

Representando  $A = X_0 e^{-\Lambda t}$  como número fuzzy em que

$$[A]^\alpha = \{x_0 e^{-\lambda t} \text{ tal que } x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } \lambda = qx_0 + r\},$$

é interessante lembrar que, para cada  $t \geq 0$ , as quantidades  $\mathcal{A}_t([C]^\alpha)$  são  $\alpha$ -níveis dos conjuntos fuzzy  $\mathcal{A}_t(C)$  com distribuições de possibilidades conjunta dos números fuzzy  $X_0 e^{-\Lambda t}$  e  $\Lambda$ , que são claramente correlacionados, uma vez que,  $X_0$  e  $\Lambda$  o são.

No entanto, tal correlação não é do tipo linear, uma vez que, suas distribuições estão sobre a curva parametrizada  $\gamma(s) = (se^{-(qs+r)t}, qs + r)$ , onde  $0 \leq s \leq 1$  para cada  $t$ . Na figura 4 estão representadas  $\mathcal{A}_t(C)$  que, como vimos, coincide com  $(L_t)_C$ , para alguns valores de  $t$ .

### 4.3. Solução determinística $\times$ solução fuzzy

Para encontrar uma curva real é necessário fazer a defuzzificação das soluções fuzzy para (27). Uma maneira é fazer isso pelo método do centro de gravidade.

Para cada  $t \geq 0$ , seja  $\mu_{X_t}$  a função de pertinência da solução fuzzy de (27), que é dada por (30). Para simplificar a notação, chamemos de  $x_t$  os possíveis valores assumidos por  $X_t$ . A curva  $\bar{x}(t)$ , que é a defuzzificação de  $X_t$ , é dada por

$$\bar{x}(t) = \frac{\int_{\text{supp}(X_t)} x_t \mu_{X_t}(x_t) dx_t}{\int_{\text{supp}(X_t)} \mu_{X_t}(x_t) dx_t}. \quad (31)$$

$$\text{Observemos que } x(t) = \int_{\text{supp}(X_t)} \frac{\mu_{X_t}(x_t)}{\int_{\text{supp}(X_t)} \mu_{X_t}(x_t) dx_t} dx_t = 1.$$

Portanto, (31) é exatamente a esperança matemática da variável aleatória  $X_t$ . Essa observação é importante, pois no decorrer do texto, usaremos a desigualdade de Jensen, que é própria para variável aleatória.

Neste problema, temos  $X_0 e^{-(qX_0+r)t}$  e seja  $X_0$  um número fuzzy.

Assim,

$$\bar{x}(t) = \int_b^c x_0 e^{-(qx_0+r)t} \frac{\mu_{X_0}(x_0)}{\int_b^c \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0. \quad (32)$$

A seguir, iremos comparar  $\bar{x}(t)$  com a solução fuzzy  $X_t = X_0 e^{-(qX_0+r)t}$ . Para isso, usaremos o teorema 3.1.

Deste modo, para cada  $t > 0$ , definamos a função

$$g_t(x) = x e^{-(qx+r)t}. \quad (33)$$

Pela desigualdade de Jensen (teorema 3.1), como  $g_t(x)$  é convexa para todo  $x$ , temos

$$\bar{x}(t) = E(X_t) = E(g_t(X_0)) \geq g_t(E(X_0)) = g_t(\bar{X}_0). \quad (34)$$

$$\text{onde } \bar{X}_0 = \int \frac{x_0 \mu_{X_0}(x_0)}{\int \mu_{X_0}(x_0) dx_0} dx_0.$$

Concluimos, dessa forma, que a solução determinística sub-avalia o número médio de indivíduos assintomáticos.

### Exemplo 3:

Para o nosso problema, temos  $X_t(X_0) = X_0 e^{-(qX_0+r)t}$ , e  $X_0$  um número fuzzy triangular cuja a função de pertinência de  $X_0$  é dada como na Figura 3.3(a). Assim,

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \frac{2}{c-b} \int_b^c x_0 e^{-(qx_0+r)t} \mu_{X_0}(x_0) dx_0 \\ &= \frac{2e^{-((a+b)q+r)t} (e^{aqt}(2+bqt) + e^{bqt}(-2+qt(-2a+b+a(b-a)qt)))}{(c-b)(a-b)(qt)^3} \\ &\quad + \frac{2e^{-((a+c)q+r)t} (-e^{aqt}(2+cqt) + e^{cqt}(2+qt(2a-c+a(a-c)qt)))}{(c-b)(a-c)(qt)^3}. \end{aligned} \quad (35)$$

Fazendo  $\lim_{(a,b) \rightarrow c} \bar{x}(t)$  obtemos  $ce^{-(cq+r)t}$  que é a solução determinística de (1) para o caso em que  $\lambda$  e  $x_0$  estão sobre a reta  $\lambda = qx_0 + r$ .

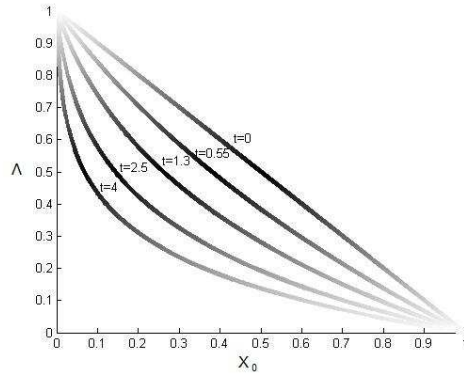


Figura 4: O gráfico de  $[(L_t)_C(X_0, \Lambda)]^\alpha(30)$  para diferentes valores do tempo. E o fato dos conjuntos  $X_0$  e  $\Lambda$  serem completamente correlacionados faz com que seja unidimensional para cada  $\alpha \in [0, 1]$ . Em  $X_t = X_0 e^{-(qX_0+r)t}$  admitimos  $X_0$  como na Figura 3.3(a) onde  $a = 0.5$ ,  $b = 0$  e  $c = 1$  e tomamos  $q = -1$  e  $r = 1$ .

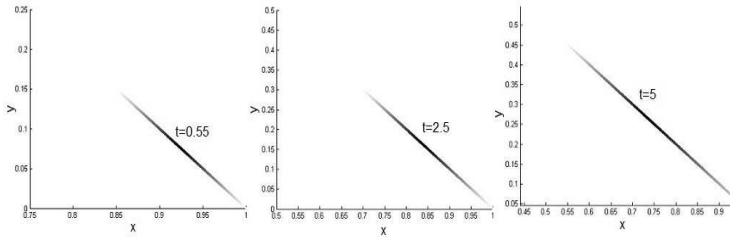


Figura 5: Retrato de fase para a solução fuzzy (1) quando tomamos  $a = 0.95$ ,  $b = 0.9$ ,  $c = 1$ ,  $q = -1$  e  $r = 1$ . Para cada  $t \geq 0$ , regiões mais escuras significa que maior é sua possibilidade (pertinência) à solução do problema, isto é, maior a confiabilidade dos números de assintótico e de sintomático.

Quando defuzzificamos a solução fuzzy tratada na figura 5 encontramos a curva real  $\bar{x}(t) = \frac{1}{t^3} e^{-0.2t} (7.1 \times 10^{-14} e^{0.15t} (-1.07 \times 10^{16} + t) (-2.1 + t) + e^{0.1t} (-800 + 360t) + e^{0.2t} (400t - 800))$  e para os valores de  $t$  dados na figura 5 temos,  $\bar{x}(0.55) = 0.92$ ,  $\bar{x}(2.5) = 0.84$  e  $\bar{x}(5) = 0.74$ . É importante notar que as regiões mais escuras encontram-se na parte central de cada “segmento fuzzy”, onde também encontram os valores de  $\bar{x}(t)$ , devido à escolha da distribuição de



$X_0$ .

Na figura 5, é importante observar que à medida que  $t$  aumenta, as distribuições do número de assintomático ( $x$ ) diminui enquanto o de sintomático ( $y$ ) aumenta, e ambos estão sobre a reta  $x + y = 1$ . Isto está em concordância com o fato observado inicialmente (ver figura 1).

## 5. Conclusões

Neste trabalho tratamos da solução do modelo de transferência de indivíduos assintomáticos para sintomáticos com interatividade nas condições iniciais fuzzy e também com interatividade na taxa  $\lambda$  e na condição inicial fuzzy. Consideramos que as condições iniciais das populações envolvidas são linearmente correlacionadas. Assim, resolvemos o sistema de equações diferenciais fuzzy através de dois métodos distintos: via teoria de inclusão diferencial e via “fuzzificação” ou extensão da solução determinística.

Concluimos, assim, que ambos os métodos nos dão o mesmo conjunto solução e, dessa forma, a solução determinística é um caso particular da solução fuzzy, uma vez que, no caso clássico para todo  $t \geq 0$ , o par de solução  $(x(t), y(t))$  se encontra na reta  $x + y = 1$  e, no caso fuzzy, para todo  $t \geq 0$  as distribuições de possibilidades para  $x$  e  $y$  também se encontram sobre a reta  $x + y = 1$ .

Analisamos a esperança matemática da variável aleatória  $X_t$  e comparamos com a solução determinística, no primeiro caso, onde as condições iniciais são fuzzy linearmente correlacionadas percebemos que são iguais. Já no segundo caso, onde a taxa  $\lambda$  e a condição inicial são fuzzy e correlacionadas, notamos que a solução determinística sub-avalia o número médio de indivíduos assintomáticos.

## Agradecimentos

À CAPES, agência financiadora deste projeto.

## Referências

- Cabral, V. M. (2011). *Equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP, Brazil.

- Cabral, V. M. e Barros, L. C. (2010). Equação diferencial fuzzy com parâmetros completamente correlacionados. *Biomatemática*, 20:25–36.
- Jafelice, R. S. M. (2003). *Modelagem fuzzy para dinâmica de transferência de soropositivos para HIV em doença plenamente manifesta*. Tese de Doutorado, FECC–Unicamp, Campinas/SP, Brazil.
- Mizukoshi, M. T., Barros, L. C., Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H., e Bassanezi, R. C. (2007). Fuzzy differential equation and the extension principle. *Information Sciences*, 177:3627–3635.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction*. Springer, New York.
- Puri, M. L. e Ralescu, D. A. (1983). Differentials of fuzzy functions. *J. Math. Analysis and Applications*, 91:552–558.