

Modelagem da dinâmica da anemia infecciosa equina

Evandro E. Marquesone¹,

COMAT, UTFPR, 78.060-900, Cornélio Procópio/PR.

Norberto A. Maidana², Rodney C. Bassanezi³

CMCC, UFABC, 09210-170, Santo André/PR.

Resumo. Neste trabalho propusemos um modelo para a dinâmica da Anemia Infecciosa Equina (AIE), haja vista a relevância que esta doença tem na pecuária pantaneira. Encontramos os pontos críticos do sistema e fizemos uma análise de estabilidade local. Isto é determinado pelo número de reprodução basal R_0 . Quando $R_0 < 1$ o ponto livre de doença é estável e quando $R_0 > 1$ o ponto endêmico é estável. Realizamos uma discussão da relevância de alguns parâmetros importantes na dinâmica.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Anemia Infecciosa Equina; Controle, *Tabanus*.

1. Introdução

A AIE é uma infecção persistente, resultando em episódios periódicos de febre, anemia, hemorragias, entre outros sintomas. Até o momento, é uma doença incurável e a legislação pertinente preconiza o sacrifício dos animais soropositivos. Em regiões como o Pantanal, onde a AIE apresenta alta prevalência, o sacrifício dos animais positivos comprometeria significativamente ou mesmo inviabilizaria a pecuária extensiva, característica da região. Uma estratégia alternativa de controle da doença, baseada na segregação dos animais positivos, tem sido preconizada em países como os EUA (Silva et al., 2001).

¹evandro.marquesone@gmail.com

²noberto.maidana@ufabc.edu.br

³rodney@ime.unicamp.br

O vírus é transmitido mecanicamente por insetos hematófagos, sobretudo espécies de *Tabanus tanamus* (mosca do cavalo e mosca do veado) e de *Stomoxys* (mosca do estábulo). Ele sobrevive somente por curtos períodos no aparelho bucal das moscas. Esses insetos hematófagos geralmente obtêm uma refeição completa de sangue de um único hospedeiro. Se interrompidos durante a alimentação, podem transferir o vírus para outro hospedeiro quando tornam a se alimentar (Vargas, 2008).

O vírus da AIE (VAIE) possui uma estabilidade de menos de 4 horas no aparato bucal do inseto, perdendo assim sua infectividade (Parreira., 2009) .

O cavalo que é infectado, pode desenvolver sinais clínicos da doença em torno de 15 a 60 dias após a exposição, antes mesmo do animal vir a ser diagnosticado como positivo (Silva et al., 2001).

Após o período da infecção, os animais ficam assintomáticos. São portadores inaparentes, sem nenhum sinal que lembre a AIE, são reservatórios por toda a vida e não morrem pela AIE. Todos os equídeos são sensíveis, sem que haja preferência por raça, sexo e idade.

No Brasil, o problema ainda continua atingindo proporções preocupantes no Pantanal do Mato Grosso e na Ilha de Marajó, devido, evidentemente, às características geoclimáticas dessas regiões (Thomassiam, 2005; Silva et al., 2001; Vargas, 2008).

2. Modelo Matemático para a Anemia Infeciosa Equina

Considere a população de cavalos e a população de insetos, cuja densidade populacional no instante t é denotada por $C(t)$ e $N(t)$ respectivamente. Na população de cavalos se considera uma taxa de recrutamento constante ϕ , devido a nascimentos ou migração (movimento de cavalos entre fazendas), e a mortalidade natural μ .

A população de hospedeiros é dividida em três subpopulações: hospedeiros suscetíveis ($S(t)$), hospedeiros infectados ($I(t)$) e hospedeiros assintomáticos ($A(t)$). Os hospedeiros suscetíveis são todos aqueles indivíduos saudáveis, mas suscetíveis a doença, podendo ser infectados quando picados por um vetor portador da doença (Bassanezi e Ferreira Jr, 1978). Os hospedeiros infectados, são aqueles que foram picados por um vetor portador e adquiriram o vírus. É comum hospedeiros que estejam infectados levarem um certo tempo

para expressar os sintomas, enquanto outros os expressam rapidamente. E finalmente os hospedeiros assintomáticos, como visto anteriormente, são aqueles que passaram pelo estágio da infecção, não apresentam sintomas da doença e, continuam sendo reservatórios da doença para sempre.

A mortalidade dos cavalos infectados pela doença é denotada por δ , e a mortalidade por controle é denotada por θ nos cavalos infectados e, τ nos cavalos assintomáticos.

O período da doença nos cavalos é γ^{-1} , e o período que os insetos ficam portadores é ε^{-1} .

A transmissão é modelada pela lei de ação das massas, sendo α a taxa de contato entre cavalos suscetíveis e insetos portadores, β_1 entre insetos não portadores e cavalos infectados e β_2 entre insetos não portadores e cavalos assintomáticos.

Temos então as seguintes considerações:

- (i) Na ausência da doença, a população de hospedeiros segue uma dinâmica

$$\frac{dS}{dt} = \phi - \mu S,$$

onde t é o tempo, ϕ é a taxa de entrada de suscetíveis e μ é a taxa de mortalidade natural.

- (ii) Considera-se que a população de vetores já está estabelecida na região. A população é constante.
- (iii) A doença é passada do vetor portador a um hospedeiro suscetível a uma taxa média proporcional à densidade de vetores portadores αY . O hospedeiro picado por um vetor portador permanece infectado por um período γ^{-1} .
- (iv) Depois do período que o hospedeiro permanece infectado (γ^{-1}) passa para o estado assintomático, onde permanece até o fim de sua vida transmitindo a doença.
- (v) Um vetor não-portador fica portador ao picar um hospedeiro infectado ou picar um hospedeiro assintomático. A taxa de contágio é proporcional à soma das densidades de hospedeiros infectados e hospedeiros assintomáticos, $\beta_1 I + \beta_2 A$. A constante de proporção β_2 é considerada menor que β_1 .

- (vi) A doença é somente fatal para os hospedeiros infectados, com uma taxa de mortalidade δ . O hospedeiro assintomático permanece infectado por toda sua vida.

A partir das considerações acima, o modelo que descreve a dinâmica é dado por (2.1).

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \phi - \alpha SY - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SY - I(\mu + \delta + \theta + \gamma), \\ \frac{dA}{dt} = \gamma I - A(\mu + \tau), \\ \frac{dX}{dt} = \varepsilon Y - (\beta_1 I + \beta_2 A)X, \\ \frac{dY}{dt} = (\beta_1 I + \beta_2 A)X - \varepsilon Y. \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde as três primeiras equações descrevem a dinâmica da população de cavalos e as outras duas equações descrevem a dinâmica da população de insetos (mutuca ou mosca do cavalo).

Somando as três primeiras equações obtemos a dinâmica para a população de hospedeiros,

$$\frac{dC}{dt} = \phi - (\delta + \theta)I - \tau A - \mu C. \quad (2.2)$$

Na ausência da doença a dinâmica é dada por,

$$\frac{dC}{dt} = \phi - \mu C, \quad (2.3)$$

que tem como ponto de equilíbrio estável $C = \frac{\phi}{\mu}$.

Somando as duas últimas equações obtemos a dinâmica para a população de vetores,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt} = 0, \quad (2.4)$$

ou seja, N é constante. Podemos considerar $X = N - Y$, e assim

$$\frac{dY}{dt} = (\beta_1 I + \beta_2 A)(N - Y) - \varepsilon Y. \quad (2.5)$$

Desta maneira, nosso modelo contará com quatro equações: as três primeiras equações do sistema (2.1) e esta, (2.5), que acabamos de encontrar, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \phi - \alpha SY - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SY - I(\mu + \delta + \theta + \gamma), \\ \frac{dA}{dt} = \gamma I - A(\mu + \tau), \\ \frac{dY}{dt} = (\beta_1 I + \beta_2 A)(N - Y) - \varepsilon Y. \end{cases} \quad (2.6)$$

Considere a região $\Omega = \{(S, I, A, Y) / S \geq 0, I \geq 0, A \geq 0, N \geq Y \geq 0\}$, pois é de interesse soluções positivas tratando-se de populações.

Vamos agora determinar os pontos críticos deste modelo na região Ω . Para isto, vamos igualar a zero as quatro equações do sistema, ou seja,

$$c\phi - \alpha SY - \mu S = 0, \quad (2.7)$$

$$\alpha SY - I(\mu + \delta + \theta + \gamma) = 0, \quad (2.8)$$

$$\gamma I - A(\mu + \tau) = 0, \quad (2.9)$$

$$(\beta_1 I + \beta_2 A)(N - Y) - \varepsilon Y = 0. \quad (2.10)$$

Este procedimento fornece dois pontos críticos: $P_0 = (\frac{\phi}{\mu}, 0, 0, 0)$, que ocorre na ausência da doença (Ponto de Equilíbrio Trivial), e o equilíbrio endêmico $P^* = (S^*, I^*, A^*, Y^*)$ onde,

$$S^* = \frac{\phi}{\mu} - \frac{\mu + \delta + \theta + \gamma}{\mu} \left[\frac{\phi(R_0 - 1)}{R_0(\mu + \delta + \theta + \gamma)(R_0 - 1) + \frac{\mu}{N\alpha} + \frac{1}{R_0}} \right],$$

$$I^* = \frac{\phi(R_0 - 1)}{R_0(\mu + \delta + \theta + \gamma)(R_0 - 1) + \frac{\mu}{N\alpha} + \frac{1}{R_0}},$$

$$A^* = \frac{\gamma}{(\mu + \tau)} \frac{\phi(R_0 - 1)}{R_0(\mu + \delta + \theta + \gamma)(R_0 - 1) + \frac{\mu}{N\alpha} + \frac{1}{R_0}},$$

$$Y^* = \frac{N(R_0 - 1)}{R_0 + \frac{\alpha N}{\mu}},$$

donde R_0 é o número de reprodutividade basal dada por:

$$R_0 = \frac{\frac{\phi}{\mu} N (\alpha \beta_1 + \alpha \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + \tau})}{\varepsilon (\mu + \delta + \theta + \gamma)}.$$

Para avaliar melhor R_0 sob o ponto de vista epidemiológico, é preciso reescrevê-lo:

$$R_0 = \frac{\phi \alpha}{\varepsilon} \times \left(\frac{N\beta_1}{(\mu + \delta + \theta + \gamma)} + \frac{N\beta_2}{(\mu + \tau)} \frac{\gamma}{(\mu + \delta + \theta + \gamma)} \right)$$

onde o primeiro termo do produto é:

- $\frac{\phi \alpha}{\varepsilon}$ representa o número de hospedeiros infectados produzidos a uma taxa α por um inseto portador em uma população de totalmente suscetível ($\frac{\phi}{\mu}$) na duração do período em que é portador ($\frac{1}{\varepsilon}$);

E o segundo termo é a soma de:

- $\frac{N\beta_1}{(\mu + \delta + \theta + \gamma)}$ representa o número de vetores portadores produzidos por um hospedeiro infectado a uma taxa β_1 em uma população de vetores totalmente suscetível (N) no período da infecção ($\frac{1}{(\mu + \delta + \theta + \gamma)}$);
- $\frac{N\beta_2}{(\mu + \tau)} \frac{\gamma}{(\mu + \delta + \theta + \gamma)}$ representa o número de vetores portadores produzidos a uma taxa β_2 por um hospedeiro assintomático em uma população de vetores totalmente suscetível (N) no período que fica assintomático $\frac{1}{(\mu + \tau)}$, sendo este termo proporcional à probabilidade de um cavalo passar para assintomático no período da doença.

3. Análise de Estabilidade

O estudo da estabilidade é feito de forma clássica, analisando os sinais da parte real dos autovalores da matriz jacobiana, (Murray, 2002; Keeling e Rohani, 2008).

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= f_1(S, I, A, Y) = \phi - \alpha SY - \mu S, \\ \frac{dI}{dt} &= f_2(S, I, A, Y) = \alpha SY - I(\mu + \delta + \theta + \gamma), \\ \frac{dA}{dt} &= f_3(S, I, A, Y) = \gamma I - A(\mu + \tau), \\ \frac{dY}{dt} &= f_4(S, I, A, Y) = (\beta_1 I + \beta_2 A)X - \varepsilon Y. \end{aligned}$$

Desta maneira, a Matriz Jacobiana será dada por:

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha Y - \mu & 0 & 0 & -\alpha S \\ \alpha Y & -(\mu + \delta + \theta + \gamma) & 0 & \alpha S \\ 0 & \gamma & -(\mu + \tau) & 0 \\ 0 & \beta_1(N - Y) & \beta_2(N - Y) & -(\beta_1 I + \beta_2 A) - \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Primeiramente provaremos a estabilidade local no ponto trivial. Tem-se então, o teorema a seguir:

Teorema 1: Se $R_0 < 1$ existe um único ponto de equilíbrio em Ω , o ponto trivial $(\frac{\phi}{\mu}, 0, 0, 0)$, e é localmente assintoticamente estável. Se $R_0 > 1$ o ponto é instável.

Dem.:

Se $R_0 > 1$ o ponto trivial é localmente instável. O jacobiano em $(S, I, A, Y) = (\frac{\phi}{\mu}, 0, 0, 0)$, é dado por,

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & -\alpha \frac{\phi}{\mu} \\ 0 & -(\mu + \delta + \theta + \gamma) & 0 & \alpha \frac{\phi}{\mu} \\ 0 & \gamma & -(\mu + \tau) & 0 \\ 0 & \beta_1 N & \beta_2 N & -\varepsilon \end{bmatrix}$$

Para se determinar os autovalores, é preciso calcular $\det(J - \lambda I) = 0$, onde J é a matriz jacobiana, λ é o autovalor a ser encontrado, e I a matriz identidade.

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 0 & 0 & -\alpha \frac{\phi}{\mu} \\ 0 & -(\mu + \delta + \theta + \gamma) - \lambda & 0 & \alpha \frac{\phi}{\mu} \\ 0 & \gamma & -(\mu + \tau) - \lambda & 0 \\ 0 & \beta_1 N & \beta_2 N & -\varepsilon - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\mu - \lambda) \begin{vmatrix} -(\mu + \delta + \theta + \gamma) - \lambda & 0 & \alpha \frac{\phi}{\mu} \\ \gamma & -(\mu + \tau) - \lambda & 0 \\ \beta_1 N & \beta_2 N & -\varepsilon - \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Assim, fazendo $\det(J - \lambda I) = 0$, obtém-se o primeiro autovalor $\lambda_1 = -\mu$ e a matriz remanescente oferece o seguinte polinômio,

$$\lambda^3 + \lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
a_1 &= \varepsilon + (\mu + \tau) + (\mu + \delta + \theta + \gamma), \\
a_2 &= (\mu + \delta + \theta + \gamma)(\mu + \tau) + \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma) + \varepsilon(\mu + \tau) - \alpha \frac{\phi}{\mu} \beta_1 N \\
&= (\mu + \delta + \theta + \gamma + \varepsilon)(\mu + \tau) + \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma)(1 - R_0) \\
a_3 &= \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma)(\mu + \tau) - \alpha \frac{\phi}{\mu} (\beta_2 \gamma N + \beta_1 N(\mu + \tau)) \\
&= \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma)(\mu + \tau)(1 - R_0)
\end{aligned}$$

Pelas condições de Routh-Hurwitz, para que a parte real dos autovalores seja negativa deve-se ter $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ e $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

Nota-se que $a_1 > 0$, e como $R_0 < 1$, segue que $a_3 > 0$.

Deve-se agora analisar $a_1 a_2 - a_3$.

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_3 &= [\varepsilon + (\mu + \tau) + (\mu + \delta + \theta + \gamma)][(\mu + \delta + \theta + \gamma + \varepsilon)(\mu + \tau) \\
&\quad + \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma)(1 - R_0)] - \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma)(\mu + \tau)(1 - R_0) \\
&= [\varepsilon + (\mu + \delta + \theta + \gamma)][(\mu + \delta + \theta + \gamma + \varepsilon)(\mu + \tau) + \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma)(1 - R_0)] \\
&\quad + (\mu + \delta + \theta + \gamma + \varepsilon)(\mu + \tau)^2 + \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma)(\mu + \tau)(1 - R_0) \\
&\quad - \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma)(\mu + \tau)(1 - R_0) \\
&= [\varepsilon + (\mu + \delta + \theta + \gamma)][(\mu + \delta + \theta + \gamma + \varepsilon)(\mu + \tau) + \varepsilon(\mu + \delta + \theta + \gamma)(1 - R_0)] \\
&\quad + (\mu + \delta + \theta + \gamma + \varepsilon)(\mu + \tau)^2 > 0 \text{ quando } R_0 < 1.
\end{aligned}$$

Assim, segue que $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Provamos que $(\frac{\phi}{\mu}, 0, 0, 0)$ é uma solução estável quando $R_0 < 1$, e instável quando $R_0 > 1$.

A análise da estabilidade no ponto não-trivial (S^*, I^*, A^*, Y^*) , é estabelecida no seguinte teorema:

Teorema 2: Se $R_0 > 1$ existe o ponto de equilíbrio endêmico (S^*, I^*, A^*, Y^*) em Ω , e é localmente assintoticamente estável.

Dem.: A matriz jacobiana no ponto não trivial, de acordo com (3) é dada por:

$$\begin{bmatrix}
-\alpha Y^* - \mu - \lambda & 0 & 0 & -\alpha S^* \\
\alpha Y^* & -(\mu + \delta + \theta + \gamma) - \lambda & 0 & \alpha S^* \\
0 & \gamma & -(\mu + \tau) - \lambda & 0 \\
0 & \beta_1(N - Y^*) & \beta_2(N - Y^*) & -(\beta_1 I^* + \beta_2 A^*) - \varepsilon - \lambda
\end{bmatrix}$$

que tem o seguinte polinômio característico:

$$\lambda^4 + \lambda^3 a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda a_3 + a_4 = 0, \text{ onde}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon) + (\mu + \tau) + (\mu + \delta + \theta + \gamma) + (\alpha Y^* + \mu) \\
 a_2 &= [(\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon) + (\mu + \tau)][(\mu + \delta + \theta + \gamma) + (\alpha Y^* + \mu)] \\
 &\quad - \alpha S^* \beta_1 (N - Y^*) + (\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon)(\mu + \tau) \\
 &\quad + (\mu + \delta + \theta + \gamma)(\alpha Y^* + \mu) \\
 a_3 &= (\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon)(\mu + \tau)[(\mu + \delta + \theta + \gamma) + (\alpha Y^* + \mu)] \\
 &\quad + (\mu + \delta + \theta + \gamma)(\alpha Y^* + \mu)[(\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon) + (\mu + \tau)] \\
 &\quad - \alpha S^* (N - Y^*)[\mu \beta_1 + \gamma \beta_2 + \beta_1(\mu + \tau)] \\
 a_4 &= (\mu + \delta + \theta + \gamma)(\alpha Y^* + \mu)(\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon)(\mu + \tau) \\
 &\quad - \alpha S^* (N - Y^*)[\gamma \beta_2 + \beta_1(\mu + \tau)]
 \end{aligned}$$

Novamente, pelas condições de Routh-Hurwitz, para que a parte real dos autovalores seja negativa é necessário que $a_1 > 0$, $a_4 > 0$, $a_1 a_2 > a_3$ e $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_4^2$. Mostramos aqui as três primeiras desigualdades. A quarta foi verificada numericamente devido à dificuldade de sua prova.

Nota-se que a_1 é a soma de parcelas maiores que zero, logo $a_1 > 0$.

Usando (2.6) reescrevemos S^* , A^* e Y^* em função de I^* . Temos que:

$$\begin{aligned}
 S^* &= \frac{(\mu + \delta + \theta + \gamma)}{\alpha Y^*} I^*, \quad A^* = \frac{\gamma}{(\mu + \tau)} I^* \quad e \\
 Y^* &= \frac{(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2 \gamma) N}{I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2 \gamma) + \varepsilon(\mu + \tau)} I^*,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

e desta forma:

$$\begin{aligned}
a_4 &= (\mu + \delta + \theta + \gamma)(\alpha Y^* + \mu)(\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon)(\mu + \tau) \\
&\quad - \alpha S^*(N - Y^*)[\gamma\beta_2 + \beta_1(\mu + \tau)] \\
&= \left(\mu + \frac{\alpha N I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma)}{I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \varepsilon(\mu + \tau)}\right)(\mu + \delta + \theta + \gamma)(\mu + \tau)(\beta_1 I^* \\
&\quad + \frac{\beta_2\gamma I^*}{(\mu + \tau)} + \varepsilon) - \mu\left(N - \frac{N I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma)}{I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \varepsilon(\mu + \tau)}\right) \\
&\quad (\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) \frac{I^*(\mu + \delta + \theta + \gamma)}{\alpha} \\
&\quad \frac{I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \varepsilon(\mu + \tau)}{N I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma)} \\
&= \left(\mu + \frac{\alpha N I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma)}{I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \varepsilon(\mu + \tau)}\right)(\mu + \delta + \theta + \gamma)(\mu + \tau) \\
&\quad \left(\frac{\beta_1 I^*(\mu + \tau) + \beta_2\gamma I^* + \varepsilon(\mu + \tau)}{(\mu + \tau)}\right) \\
&\quad - \mu\left(\frac{I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \varepsilon(\mu + \tau) - I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma)}{I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \varepsilon(\mu + \tau)}\right) \\
&\quad (\mu + \delta + \theta + \gamma)(I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \varepsilon(\mu + \tau)) \\
&= \{\mu[I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \varepsilon(\mu + \tau)] + \alpha N I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) \\
&\quad - \mu\varepsilon(\mu + \tau)\}(\mu + \delta + \theta + \gamma) \\
&= \{\mu I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \mu\varepsilon(\mu + \tau) + \alpha N I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) \\
&\quad - \mu\varepsilon(\mu + \tau)\}(\mu + \delta + \theta + \gamma) \\
&= \{\mu I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma) + \alpha N I^*(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma)\}(\mu + \delta + \theta + \gamma) \\
&= (\mu + \alpha N)(\beta_1(\mu + \tau) + \beta_2\gamma)(\mu + \delta + \theta + \gamma) I^* > 0 \text{ quando } R_0 > 1.
\end{aligned}$$

O próximo passo será demonstrar que $a_1 a_2 > a_3$, ou equivalentemente $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Assim,

$$a_1 a_2 - a_3 = [(\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon) + (\mu + \tau) + (\mu + \delta + \theta + \gamma) + (\alpha Y^* + \mu)] \{[(\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon) + (\mu + \tau)][(\mu + \delta + \theta + \gamma) + (\alpha Y^* + \mu)] - \alpha S^* \beta_1 (N - Y^*)\}$$

$$\begin{aligned}
&+ (\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon)(\mu + \tau) + (\mu + \delta + \theta + \gamma)(\alpha Y^* + \mu) \} \\
&- \{(\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon)(\mu + \tau)[(\mu + \delta + \theta + \gamma) + (\alpha Y^* + \mu)] \\
&+ (\mu + \delta + \theta + \gamma)(\alpha Y^* + \mu)[(\beta_1 I^* + \beta_2 A^* + \varepsilon) + (\mu + \tau)] \\
&- \alpha S^*(N - Y^*)[\mu\beta_1 + \gamma\beta_2 + \beta_1(\mu + \tau)]\}
\end{aligned}$$

Depois de algumas operações algébricas, e substituindo (3.12) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & (\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \tau)} + \varepsilon)^2 \left[\frac{\alpha N I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}{I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2) + \varepsilon (\mu + \tau)} + \mu \right] \\
 & + (\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \tau)} + \varepsilon) [\beta_1 I^* (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma I^* + \varepsilon (\mu + \tau) + \mu (\mu + \delta + \theta \\
 & + \gamma)] + (\mu + \tau) \left\{ \left[(\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \tau)} + \varepsilon) + (\mu + \tau) \right] [(\mu + \delta + \theta + \gamma) + (\mu \right. \\
 & + \frac{\alpha N I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}{I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2) + \varepsilon (\mu + \tau)} + \mu)] + \beta_1 I^* (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma + \varepsilon (\mu + \tau) \\
 & + (\mu + \frac{\alpha N I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}{I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2) + \varepsilon (\mu + \tau)}) (\mu + \delta + \theta + \gamma) \left. \right\} + (\mu + \delta + \theta + \gamma) \\
 & \left\{ (\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \tau)} + \varepsilon) (\mu + \frac{\alpha N I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}{I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2) + \varepsilon (\mu + \tau)}) + (\mu + \tau) \right. \\
 & \left. [(\mu + \delta + \theta + \gamma) + (\mu + \frac{\alpha N I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}{I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2) + \varepsilon (\mu + \tau)})] + \beta_1 I^* (\mu + \tau) \right. \\
 & \left. + \beta_2 \gamma + \varepsilon (\mu + \tau) + (\mu + \frac{\alpha N I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}{I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2) + \varepsilon (\mu + \tau)}) (\mu + \delta + \theta + \gamma) \right\} \\
 & + (\mu + \frac{\alpha N I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}{I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2) + \varepsilon (\mu + \tau)})^2 \left[(\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma I^*}{(\mu + \tau)} + \varepsilon) \right. \\
 & \left. + (\mu + \tau) + (\mu + \delta + \theta + \gamma) \right] + (\mu + \frac{\alpha N I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}{I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2) + \varepsilon (\mu + \tau)}) \\
 & \left[\beta_1 I^* (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma + \varepsilon (\mu + \tau) \right] + \frac{(\mu + \delta + \theta + \gamma)}{N (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)} \beta_1 (\mu + \tau)^2 N \varepsilon \\
 & + \left\{ (\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \tau)} + \varepsilon) (\mu + \delta + \theta + \gamma) \left(\frac{\alpha N I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}{I^* (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2) + \varepsilon (\mu + \tau)} \right) \right. \\
 & \left. (\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \tau)} + \varepsilon)^2 (\mu + \delta + \theta + \gamma) + (\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma}{(\mu + \tau)} + \varepsilon) (\mu + \delta + \theta \right. \\
 & \left. + \gamma) \right\} \left[1 - \frac{\beta_1 \varepsilon (\mu + \tau)}{(\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma I^*}{(\mu + \tau)} + \varepsilon) (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)} \right]
 \end{aligned}$$

Para ter o desejado, é necessário garantir que

$$\left(1 - \frac{\beta_1 \varepsilon (\mu + \tau)}{(\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma I^*}{(\mu + \tau)} + \varepsilon) (\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)} \right) > 0$$

Mas,

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\beta_1 \varepsilon (\mu + \tau)}{(\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma I^*}{\mu + \tau} + \varepsilon)(\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)}\right) > 0 \\
& \Leftrightarrow 1 > \frac{\beta_1 \varepsilon (\mu + \tau)}{(\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + \tau} + \varepsilon)(\beta_1 (\mu + \tau) + \beta_2 \gamma)} \\
& \Leftrightarrow 1 > \frac{\beta_1 \varepsilon (\mu + \tau)}{(\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma I^*}{\mu + \tau} + \varepsilon)(\beta_1 + \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + \tau})(\mu + \tau)} \\
& \Leftrightarrow (\beta_1 I^* + \frac{\beta_2 \gamma I^*}{\mu + \tau} + \varepsilon)(\beta_1 + \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + \tau}) > \beta_1 \varepsilon \\
& \Leftrightarrow I^* (\beta_1 + \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + \tau})^2 + \varepsilon (\beta_1 + \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + \tau}) > \beta_1 \varepsilon \\
& \Leftrightarrow I^* (\beta_1 + \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + \tau})^2 + \beta_1 \varepsilon + \frac{\varepsilon \beta_2 \gamma}{\mu + \tau} > \beta_1 \varepsilon \\
& \Leftrightarrow I^* (\beta_1 + \frac{\beta_2 \gamma}{\mu + \tau})^2 + \frac{\varepsilon \beta_2 \gamma}{\mu + \tau} > 0, \text{ pois } R_0 > 1,
\end{aligned}$$

e como $I^* > 0$ e os outros parâmetros são maiores que zero, segue que

$$a_1 a_2 > a_3.$$

A condição $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_4^2$ foi verificada numericamente, devido à dificuldade de sua demonstração.

4 Resultados Numéricos

Apresentamos aqui alguns resultados numéricos para estudar o comportamento da dinâmica com relação a parâmetros que não tem sido determinados exatamente na literatura. O parâmetro α não pôde ser avaliado próximo do que realmente é devido a ausência de dados na literatura sobre a quantidade de cavalos infectados ao longo do tempo. Com isso, optamos por fazer um modelo simplista no qual consideramos α a partir da probabilidade de infecção dos insetos. Já com o parâmetro ε^{-1} há uma discrepância na literatura sobre seu valor. Há trabalhos que o referem com sendo 15 minutos e outros apresentam valores próximos a 4 horas. Optamos aqui por um tempo intermediário de 30 minutos, o que a partir das simulações nos pareceu razoável. O primeiro parâmetro a se considerar é a taxa de picada das mutucas.

A taxa de infecção por cavalo suscetível é dado pelo produto entre a taxa de picada, denotada por b , a probabilidade de transmissão, w , a taxa relativa

entre inseto e cavalos, $\frac{N}{C}$, e a proporção de insetos portadores, $\frac{Y}{N}$, ou seja:

$$bw \frac{N}{C} \frac{Y}{N} = \frac{bw}{C} Y = \alpha Y,$$

onde $\alpha = \frac{bw}{C}$ é a taxa de contato constante entre insetos portadores e cavalos suscetíveis.

Da mesma maneira a taxa de infecção por inseto não portador é dado pela soma de dois fatores. O primeiro é dado pelo produto entre a taxa de picada, a probabilidade de transmissão, w_1 , e a proporção de cavalos infectados. No segundo termos é considerado a proporção de cavalos assintomáticos, ou seja,

$$bw_1 \frac{I}{C} + bw_2 \frac{A}{C} = \beta_1 I + \beta_2 A,$$

onde $\beta_1 = \frac{bw_1}{C}$ e $\beta_2 = \frac{bw_2}{C}$ representam respectivamente a taxa de contato entre inseto não portador e cavalo infectado e a taxa de contato entre inseto não portador e cavalo assintomático.

De acordo com (Ballweber, 2001), o vetor da doença pode se alimentar uma ou duas vezes por dia. Este fato, parece simples mas afeta drasticamente no comportamento da doença, como mostra a figura 1. Os parâmetros considerados são: $\frac{\phi}{\mu} = 49000$, população de cavalos no pantanal (Silva et al., 2001). Consideramos $\mu^{-1} = 25$ anos, o tempo de vida média de um cavalo; a taxa de mortalidade pela doença $\delta^{-1} = 270$ dias; o período de infecção $\gamma^{-1} = 180$ dias (Vargas, 2008); tempo de vida média do vírus no aparelho bucal dos insetos $\varepsilon^{-1} = 1$ hora. Não foi considerado nenhum controle, ou seja, $\theta = \tau = 0$. As probabilidades $w = 0,07$, $w_1 = 0,07 * 0,75$, $w_2 = 0,07 * 0,25$ de infecção, onde (Barros et al., 2003) verificou que no Pantanal um cavalo pode sofrer o ataque de até 348 tabanídeos por dia, e que destes 7% poderiam transferir o vírus a animais a menos de 25 metros (Barros e Foil, 2000).

Na figura 1 se mostra a densidade populacional de cavalos infectados considerando duas taxas de picadas diferentes, uma picada por dia $b = 1$, e duas picadas por dia $b = 2$.

Note que com duas picadas ao dia além da doença se proliferar muito mais rápido que com uma picada ao dia, a quantidade de animais infectados chega muito perto ao total da população. Com duas picadas por dia os infectados chegam a atingir aproximadamente 82% da população total. Já com uma picada por dia esse percentual desce para aproximadamente 53%.

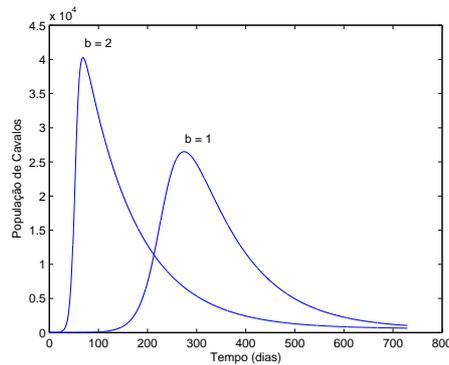


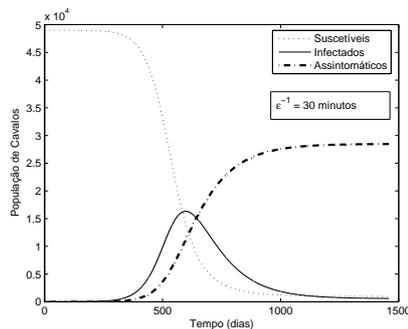
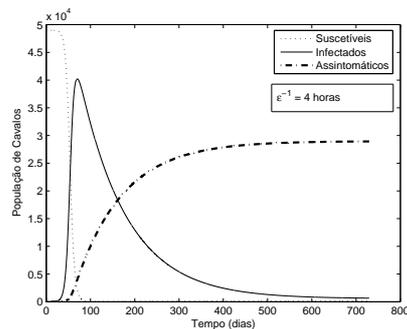
Figura 1: Influência do número de picadas na dinâmica dos infectados

Um outro parâmetro que tem grande influência na maneira da doença se comportar, é o tempo em que o a infecção fica no aparelho bucal das moscas. Consideramos na figura 2 dois valores: $\varepsilon^{-1} = 30$ minutos, e $\varepsilon^{-1} = 4$ horas. A estabilidade do agente nas peças bucais de vetores potenciais é uma variável de grande importância na transmissão de patógenos e, em última análise, limita o tempo para a transferência do tabanídeo e reinício de sua alimentação em outro hospedeiro.

Com relação ao vírus da AIE, por exemplo, este permanece viável nas peças bucais de tabanídeos por 30 minutos mas não por quatro horas (Hawkins et al., 1973), indicando que a adoção de barreiras espaciais entre equinos infectados e susceptíveis pode ser uma eficiente estratégia de prevenção (Barros e Foil, 2000).

Observa-se que para $\varepsilon^{-1} = 4$ horas, os infectados atingem aproximadamente 82% da população total (49000). No entanto para $\varepsilon^{-1} = 30$ minutos os infectados atingem aproximadamente 30% da população total, o que parece muito mais razoável.

Outro fato que se pode observar é que se aumenta o tempo em que a infecção fica no aparelho bucal dos insetos, diminui o tempo de aparição da doença. Podendo ser de aproximadamente 30 dias quando $\varepsilon^{-1} = 4$ horas, e pouco mais de um ano quando $\varepsilon^{-1} = 30$ minutos.

Figura 2: $\varepsilon^{-1}=30$ minutos.Figura 3: $\varepsilon^{-1}=4$ horas.

Referências

- Ballweber, L. R. (2001). The practical veterinarian. *Veterinary Parasitology*, página 56.
- Barros, A. M. e Foil, L. D. (2000). Influência da distância na transferência de tabanídeos (diptera: Tabanidae) entre equinos. *Simpósio sobre Recursos Naturais e Sócio-Econômicos do Pantanal*, 3:155–156.
- Barros, A. M., Foil, L. D., e de Souza Vasquez, S. (2003). Mutucas (diptera: Tabanidae) do pantanal: Abundância relativa e sazonalidade na sub-região da nhecolândia. *Embrapa Pantanal. Boletim de Pesquisa e Desenvolvimento*, 48:6–17.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). *Equações diferenciais com aplicações*. Ed. Harbra, S. Paulo.
- Hawkins, J. A., Adams, W. V., Cook, L., Wilson, B., e Roth, E. (1973). Role of horse fly (*tabanus fuscicostatus* hine) and stable fly (*stomoxys calcitrans* l.) in transmission of equine infectious anemia to ponies in louisiana. *American Journal of Veterinary Research*, 34:1583–1586.
- Keeling, M. J. e Rohani, P. (2008). *Modeling Infectious Diseases in Human and Animals*. Princeton University Press, Princeton.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology*. Springer, Berlin.

- Parreira., D. R. (2009). Coinfecção por trypanossoma evansi (steel 1885), balbiani 1888, e pelo vírus da anemia infecciosa equina em cavalos do pananal sul-matogrossense. *Instituto Oswaldo Cruz*, 1:27–31.
- Silva, R. A. M. S., de Abreu, U. G. P., e de Barros, A. T. M. (2001). Anemia infecciosa equina: Epizootiologia, prevenção e controle. *Embrapa Pantanal. Circular Técnica*, 29:7–18.
- Thomassiam, A. (2005). *Enfermidades dos Cavalos*. Editora Varela, São Paulo.
- Vargas, R. O. (2008). Anemia infecciosa equina. *Trabalho apresentado para o cumprimento de trabalho de conclusão de curso de especialização Latu sensu em Defesa e Vigilância Sanitária Animal UCB*, 1:5–12.