

# Dinâmica Populacional Interativa da Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) na Presença de um Predador: Simulações Computacionais

Miguel T. Koga<sup>1</sup>,

DMAT, UNEMAT, 78.555-000, Sinop/MT.

João Frederico C. A. Meyer<sup>2</sup>,

DMA, IMEEC-UNEMAT, 13.083-970, Campinas/SP.

Paulo César Carmona Tabares<sup>3</sup>,

Universidad del Quindío, Armenia, Q. - Colombia

**Resumo.** Neste trabalho, apresentamos simulações computacionais obtidas no modelo matemático da interação entre a mosca-dos-chifres, o gado de criação agroindustrial e os besouros coprófagos. O processo é modelado através de um sistema não-linear de equações diferenciais parciais - EDP's, com as condições de contorno clássicas de Dirichlet e Von Neumann. Para esta interação interespecífica propomos aproximações da solução do sistema através do método das diferenças finitas, utilizando também o método de Crank-Nicolson, realizando simulações computacionais em ambiente MATLAB®.

**Palavras-chave:** *Dinâmica populacional, Sistemas não-lineares de EDP, modelos de dispersão-migração, Método das Diferenças Finitas.*

## 1. Introdução

A Mosca-dos-chifres (*Haematobia irritans*) é um ectoparasita que se alimenta exclusivamente de sangue, preferencialmente bovino. Foi detectada

---

<sup>1</sup>miguelkoga@unemat-net.br

<sup>2</sup>joni@ime.unicamp.br

<sup>3</sup>paulocct@uniquindio.edu.co

no Brasil na década de 70 e começou a ser estudada por Valério e Guimarães em 1983 – *apud* (Barros, 2001a). Sua ação provoca sérios prejuízos para a economia bovina, segundo Bianchin (2001), em 2004 o Brasil teve uma perda de aproximadamente 2,38 bilhões de reais.

O ciclo biológico da mosca ocorre nas fezes de seu hospedeiro, de onde sai somente para ovopositar. Seu controle é realizado através da aplicação de inseticidas para a mosca adulta e por produtos injetáveis que são aplicado no gado que os eliminam nas fezes, estes produtos não permitem que os ovos da mosca eclodam impossibilitando o nascimento de novos insetos.

Pesquisadores vêm estudando e desenvolvendo trabalhos com o objetivo de um controle biológico no qual se buscam inimigos naturais para manter um controle populacional. Esses inimigos, são definidos como biocontroladores e sua função é manter um equilíbrio ambiental natural.

Os bolos fecais servem de alimento para diferentes espécies de insetos, entre eles os besouros coprófagos. São insetos da família Scarabaeidae e sua ação junto ao bolo fecal inviabiliza a reprodução da mosca, tornando este besouro um predador indireto da mosca-dos-chifres, pois não se alimenta da mosca e sim das fezes onde suas larvas se desenvolvem. Os besouros levam pelotas desse bolo fecal ao local onde fica sua prole, para alimentação.

Segundo Quadros e Franco (2010), os besouros coprófagos são divididos em 4 grupos:

- **Telecoprídeos**, também chamado de “rola-bosta”, tem como característica separar e transportar pedaços de fezes para fora do bolo fecal, que é enterrado e guardado para alimento próprio ou dos filhotes;
- **Paracoprídeos** constroem seus ninhos ao redor ou abaixo do bolo fecal, criando túneis que ligam o ninho ao bolo fecal;
- **Endocoprídeos** constroem seus ninhos na massa fecal;
- **Cleptocoprídeos**: Os Cleptocoprídeos são poucos citados na literatura, porém são os besouros que se utilizam das massas já enterradas por outros besouros coprófagos.

A ação dos besouros na massa fecal, além de servir como processo de controle populacional da mosca, também contribui para o desenvolvimento do pasto, um boi defeca em média de 11 vezes por dia e, nos locais onde os bolos

fecais são depositados, o pasto não cresce mais e morre, esta área fica improdutiva por quase um ano. Com a remoção do bolo fecal isto não ocorre e outro fator importante é que os túneis feitos pelos besouros, favorecem a circulação de oxigênio contribuindo diretamente para o crescimento das plantas.

## 2. O Modelo Matemático

Nosso modelo envolve 3 espécies de animais e buscamos identificar parâmetros disponíveis (cf. Barros et al., 2002; Barros, 2001a,b) para estruturar o modelo matemático através de um sistema não-lineares de Equações Diferenciais Parciais combinando Equações de Dispersão-Migração com características SIR/SIRS. Estas equações evolutivas a derivadas parciais que visam permitir, através das simulações, avaliar a possibilidade de controle biológico com a presença do predador da mosca-dos-chifres (cf. Murray, 1989; Edelstein-Keshet, 2005). Para isto, representamos por  $R$ , o gado,  $M$ , a mosca e  $B$ , o besouro, na região definida por  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e com  $J = (0, T]$ . Portanto, teremos  $R = R(x, y, t)$ ,  $M = M(x, y, t)$  e  $B = B(x, y, t)$ , tais que:

- a. Para o gado,  $R$ , consideraremos que se encontra em uma região fechada, não havendo espalhamento geográfico e sua reprodução é assistida, logo, Malthusiana e o contato da rês com a mosca é prejudicial para o gado, pois a mosca vive parasitando-o, assim a variação populacional do gado é dada por:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \mu_A R = \lambda_R R - \mu_{RM} RM, \quad (2.1)$$

onde:

- $\lambda_R R$  indica a reprodução da rês;
  - $\mu_A R$  é o termo de abate bovino;
  - $\mu_{RM} RM$  é o termo de efeito nocivo que a mosca provoca no gado;
- b. Para a mosca  $M$ , a reprodução é Verhulstiana, ela voa longe e existe o espalhamento geográfico, existe também a possibilidade da inclusão de um termo advectivo, e pode sobreviver do sangue de outros animais. A relação mosca-rês é primordial para seu crescimento populacional, porém a presença dos besouros coprófagos é prejudicial para o seu crescimento populacional e, com isto, a variação populacional da mosca é representada





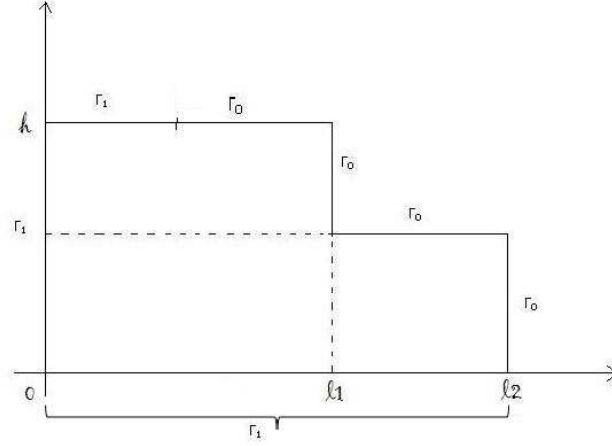


Figura 1: **Regi~ao**  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

- $R(x, y, 0) = R_0(x, y) = r_0$  (constante);
- $M(x, y, 0) = M_0(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \partial\Omega \\ m_0, & (x, y) \in \Omega \end{cases}$
- $B(x, y, 0) = B_0(x, y) \equiv b_0$  constante;

Para a discretiza~ao do dom~nio  $\Omega$ , uma regi~ao n~ao retangular, consideramos que o valor  $ny$  ser~a definido como  $ny_1$  no intervalo  $[0, \ell_1]$  e  $ny_2$  no intervalo  $[\ell_1, \ell_2]$ , conforme apresentado na figura 2.

Para realizar o tratamento matem~tico do sistema utilizamos o M~todo de Diferen~as Finitas. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x}(x_i, t_n) &\cong \frac{C_{i+1}^{(n)} - C_{i-1}^{(n)}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x_i, t_n) &\cong \frac{C_{i+1}^{(n)} - 2C_i^{(n)} + C_{i-1}^{(n)}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para desenvolver a parte temporal, utilizamos o M~todo de Crank-Nicolson, isto e', usando as aproxima~oes:

$$\begin{aligned} C'(x, t_{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{C(x, t_{n+1}) - C(x, t_n)}{\Delta t}, \theta(\Delta t)^2 \\ C(x, t_{n+\frac{1}{2}}) &= \frac{C(x, t_{n+1}) + C(x, t_n)}{2}, \theta(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

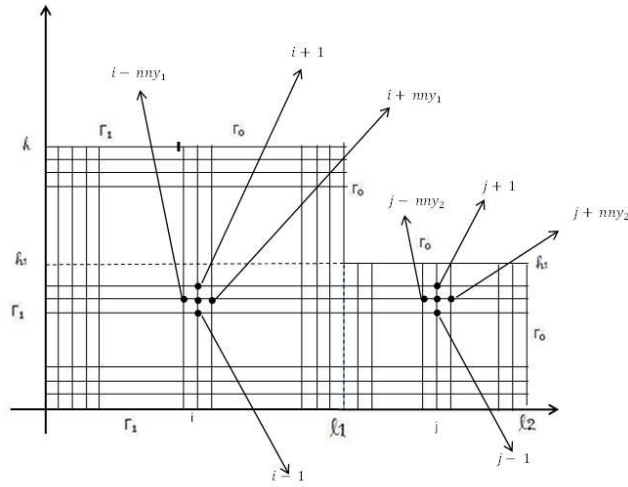


Figura 2: Malha da região  $\Omega$

teremos, então:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{i+ny}^{(n+\frac{1}{2})} - C_{i-ny}^{(n+\frac{1}{2})}}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i+ny}^{(n+\frac{1}{2})} - 2C_i^{(n+\frac{1}{2})} + C_{i-ny}^{(n+\frac{1}{2})}}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C_{i+1}^{(n+\frac{1}{2})} - C_{i-1}^{(n+\frac{1}{2})}}{2\Delta y} \text{ e } \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C_{i+1}^{(n+\frac{1}{2})} - 2C_i^{(n+\frac{1}{2})} + C_{i-1}^{(n+\frac{1}{2})}}{\Delta y^2}$$

Daí, substituindo no sistema (2.5), obtemos:

1. Primeira equação:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda_R \Delta t}{2} + \frac{\mu_A \Delta t}{2} + \frac{\mu_{MR} \Delta t}{2} \left(\frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{2}\right)\right) R_i^{(n+1)} = \\ & = \left(1 + \frac{\lambda_R \Delta t}{2} - \frac{\mu_A \Delta t}{2} - \frac{\mu_{MR} \Delta t}{2} \left(\frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{2}\right)\right) R_i^{(n)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2. Segunda equação:

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u_M \Delta t}{4\Delta x}\right) M_{i+nnny}^{(n+1)} + \left(-\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v_M \Delta t}{4\Delta y}\right) M_{i+1}^{(n+1)} + \\
& + \left[1 + \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta y^2} - \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \left(1 - \frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{\rho(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)})}\right) + \right. \\
& + \frac{\beta \Delta t}{4} \left(B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}\right) - \frac{\gamma \Delta t}{4} \left(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}\right) \left. \right] M_i^{(n+1)} \\
& + \left(-\frac{v_M \Delta t}{4\Delta y} - \frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2}\right) \left(M_{i-1}^{(n+1)}\right) + \left(-\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u_M \Delta t}{4\Delta x}\right) M_{i-nny}^{(n+1)} \\
& = \left(\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u_M \Delta t}{4\Delta x}\right) M_{i+nnny}^{(n)} + \left(\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v_M \Delta t}{4\Delta y}\right) M_{i+1}^{(n)} + \\
& + \left[1 - \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha_M \Delta t}{\Delta y^2} + \frac{\lambda_M \Delta t}{2} \left(1 - \frac{M_i^{(n+1)} + M_i^{(n)}}{\rho(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)})}\right) - \right. \\
& - \frac{\beta \Delta t}{4} \left(B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}\right) + \frac{\gamma \Delta t}{4} \left(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}\right) \left. \right] M_i^{(n)} + \\
& + \left(\frac{v_M \Delta t}{4\Delta y} + \frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta y^2}\right) M_{i-1}^{(n)} + \left(\frac{\alpha_M \Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u_M \Delta t}{4\Delta x}\right) M_{i-nny}^{(n)}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

3. Terceira equação:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} B_{i+nnny}^{(n+1)} - \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} B_{i+1}^{(n+1)} + \left[1 + \frac{\alpha_B \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_B \Delta t}{\Delta y^2} - \right. \\
& - \frac{\lambda_B \Delta t}{2} \left(1 - \frac{B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}}{2k_B}\right) + \frac{\mu_{RB} \Delta t}{4} \left(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}\right) \left. \right] B_i^{(n+1)} \\
& - \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} B_{i-1}^{(n+1)} - \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} B_{i-nny}^{(n+1)} = \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} B_{i+nnny}^{(n)} + \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} B_{i+1}^{(n)} + \\
& + \left[1 - \frac{\alpha_B \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha_B \Delta t}{\Delta y^2} + \frac{\lambda_B \Delta t}{2} \left(1 - \frac{B_i^{(n+1)} + B_i^{(n)}}{2k_B}\right) - \right. \\
& - \frac{\mu_{RB} \Delta t}{4} \left(R_i^{(n+1)} + R_i^{(n)}\right) \left. \right] B_i^{(n)} + \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta y^2} B_{i-1}^{(n)} + \frac{\alpha_B \Delta t}{2\Delta x^2} B_{i-nny}^{(n)}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Para as condições de contorno, tendo em vista que estamos trabalhando com condições de Robin e de Von Neumann.

1. Para a rês, a condição é de Von Neumann para toda  $\partial\Omega$ , como não há espalhamento geográfico do gado, a condição de contorno  $\frac{\partial R}{\partial \eta} \Big|_{\Omega} = 0$  não afeta as equações.

2. Para a mosca temos que analisar separadamente, então;

- Para a borda superior as condições de contorno são definidas por  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_0$ , para elementos desta borda  $C_{i+1} = C_{\sharp}$ , então, a condição para  $\Gamma_1$  é dada por  $-\alpha_M \frac{\partial M}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1} = k_1 M_i \Rightarrow -\alpha_M \frac{M_{i+1} - M_{i-1}}{2\Delta y} = k_1 M_i \Rightarrow M_{\sharp} = M_{i+1} = -2\Delta y \frac{k_1}{\alpha_M} M_i + M_{i-1}$ . De forma semelhante para  $-\alpha_M \frac{\partial M}{\partial y} \Big|_{\Gamma_0} = k_0 M_i \Rightarrow M_{\sharp} = M_{i+1} = -2\Delta y \frac{k_0}{\alpha_M} M_i + M_{i-1}$ ;



- Para a borda inferior temos  $\Gamma_1$ ,  $C_{i-1} = C_{\#}$  e  $-\alpha_M \frac{\partial M}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1} = k_1 M_i \Rightarrow M_{\#} = M_{i-1} = 2\Delta y \frac{k_1}{\alpha_M} M_i + M_{i+1}$ .
- Para a borda esquerda temos  $\Gamma_1$ ,  $C_{i-ny} = C_{\#}$  e  $-\alpha_M \frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{\Gamma_1} = k_1 M_i \Rightarrow -\alpha_M \frac{M_{i+ny} - M_{i-ny}}{2\Delta x} = k_1 M_i \Rightarrow M_{\#} = M_{i-ny} = 2\Delta x \frac{k_1}{\alpha_M} M_i + M_{i+ny}$ ;
- Para a borda direita temos  $\Gamma_0$ ,  $C_{i+ny} = C_{\#}$  e  $-\alpha_M \frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{\Gamma_0} = k_0 M_i \Rightarrow M_{\#} = M_{i+ny} = -2\Delta x \frac{k_0}{\alpha_M} M_i - M_{i-ny}$ ,  
com  $ny = \begin{cases} nny_1 & \text{p/ } x \in [0, \ell_1] \\ nny_1(\text{esq.}) nny_2(\text{dir.}) & \text{qdo. } x = \ell_1 \text{ e } y \in [0, h_1] \\ nny_2 & \text{p/ } x \in (\ell_1, \ell_2] \end{cases}$

3. Para o besouro teremos;

- Para a borda superior como as condições de contorno são  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_0$ , temos nesta borda  $C_{i+1} = C_{\#}$ . Para  $\Gamma_1$ ,  $-\alpha_B \frac{\partial B}{\partial y} = k_B B_i \Rightarrow -\alpha_B \frac{B_{i+1} - B_{i-1}}{2\Delta y} = k_B B_i \Rightarrow B_{\#} = B_{i+1} = -2\Delta y \frac{k_B}{\alpha_B} B_i + B_{i-1}$ . Para  $\Gamma_0$ ,  $-\alpha_B \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\alpha_B \frac{B_{i+1} - B_{i-1}}{2\Delta y} = 0 \Rightarrow B_{\#} = B_{i+1} = B_{i-1}$ ;
- Na borda inferior, temos,  $C_{i-1} = C_{\#}$  e  $\Gamma_1 \Rightarrow B_{\#} = B_{i-1} = 2\Delta y \frac{k_B}{\alpha_B} B_i + B_{i+1}$ ;
- Na borda esquerda  $C_{i-ny} = C_{\#}$  e  $\Gamma_1 \Rightarrow -\alpha_B \frac{\partial B}{\partial x} = k_B B_i \Rightarrow -\alpha_B \frac{B_{i+ny} - B_{i-ny}}{2\Delta x} = k_B B_i \Rightarrow B_{\#} = B_{i-ny} = 2\Delta x \frac{k_B}{\alpha_B} B_i + B_{i+ny}$ .
- Na borda direita temos  $\Gamma_0$  e  $C_{i+ny} = C_{\#}$ , então  $-\alpha_B \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{\Gamma_0} = 0 \Rightarrow B_{\#} = B_{i+ny} = B_{i-ny}$ , com  $ny = \begin{cases} nny_1 & \text{p/ } x \in [0, \ell_1] \\ nny_1(\text{esquerda}) nny_2(\text{direita}) & \text{qdo. } x = \ell_1 \text{ e } y \in [0, h_1] \\ nny_2 & \text{p/ } x \in (\ell_1, \ell_2] \end{cases}$

### 3. Simulações

Alguns ensaios computacionais foram realizados para observar a relação entre as três espécies. Os parâmetros foram estimados para testar o modelo.

Apresentamos os resultados das simulações, considerando:

1. Distribuição aleatória;

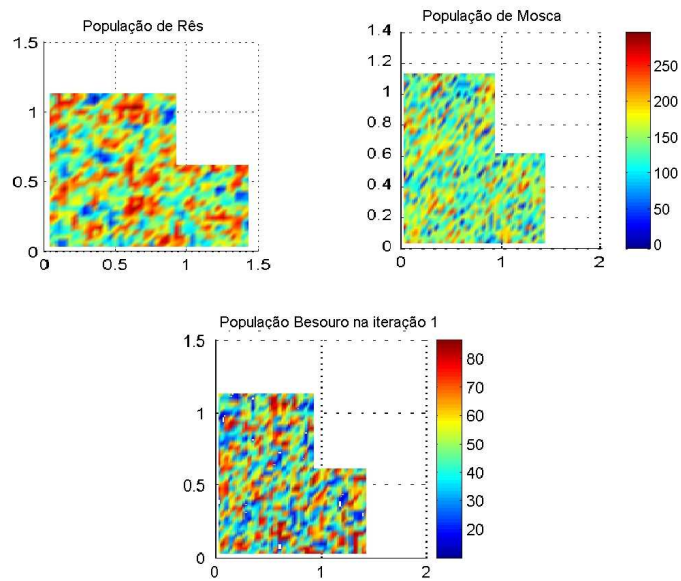


Figura 3: Distribuição das espécies na primeira iteração

2. Considerando a condição de há mosca no canto inferior esquerdo e besouro no canto inferior direito teremos:

Podemos observar nos gráficos a relação do sistema presa-predador. No primeiro caso, a figura 5 mostra que os bois (reses) se deslocam para uma região em que a quantidade de mosca é pequena, assim como as moscas se concentram em regiões onde a quantidade de besouros é menor. Já na segunda simulação, observamos na figura 9 o mesmo comportamento, porém, na última figura 10 é possível observar a influência que o besouro provoca no crescimento populacional da mosca.

## 4. Resultados

Nosso objetivo foi verificar o modelo matemático envolvendo três espécies de animais, o gado, a mosca-dos-chifres e o besouro. O modelo foi estruturado em um sistema não-linear de equações diferenciais parciais, com a característica principal de, a capacidade de suporte da mosca não ser constante, definida como  $k_M = f(R) = \rho R$ .

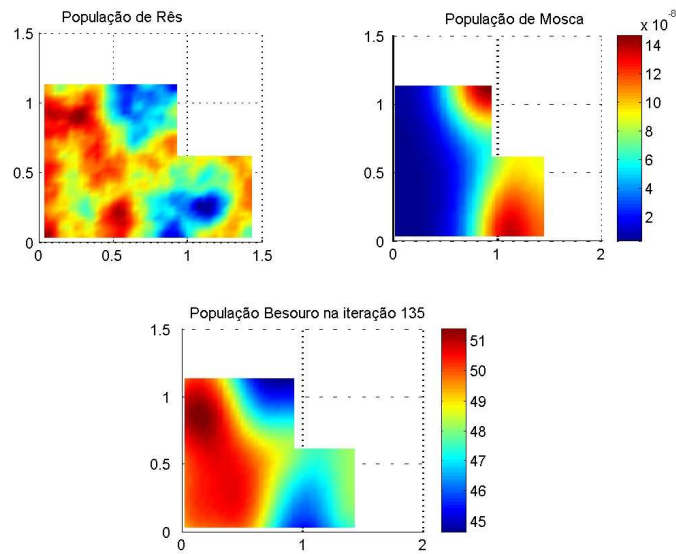


Figura 4: **Distribuição das espécies após 135 iterações**

Os resultados encontrados nas simulações é de que o modelo retrata claramente um sistema presa-predador, o qual é observado nas simulações apresentadas, em ambos os casos fica claro a concentração rês em lugar onde a quantidade de mosca é menor, assim como, a mosca busca se localizar em regiões onde a incidência de besouros são menores. Na segunda simulação, quando iniciamos com as populações de mosca e de besouro em locais diferentes, o crescimento populacional e a difusão ocorrem normalmente surgindo alterações a partir do momento em que as duas espécies começam a ocupar a mesma região, quanto a rês, ela desloca-se para a região onde a concentração de besouros é maior e neste caso, a menor concentração de mosca. O efeito de predação do besouro sobre a mosca é mostrado no gráfico 10, onde mostramos a densidade populacional em determinados pontos de nossa malha, o resultado é bastante visível no nó 810.

Portanto, concluímos que os resultados foram coerentes com o modelo do tipo presa-predador, porém, na situação ao qual o modelo foi construído, temos algumas realidades que os resultados não apresentaram, a principal relação é o fato de que as três espécies ocupam o mesmo espaço, se não houver rês numa

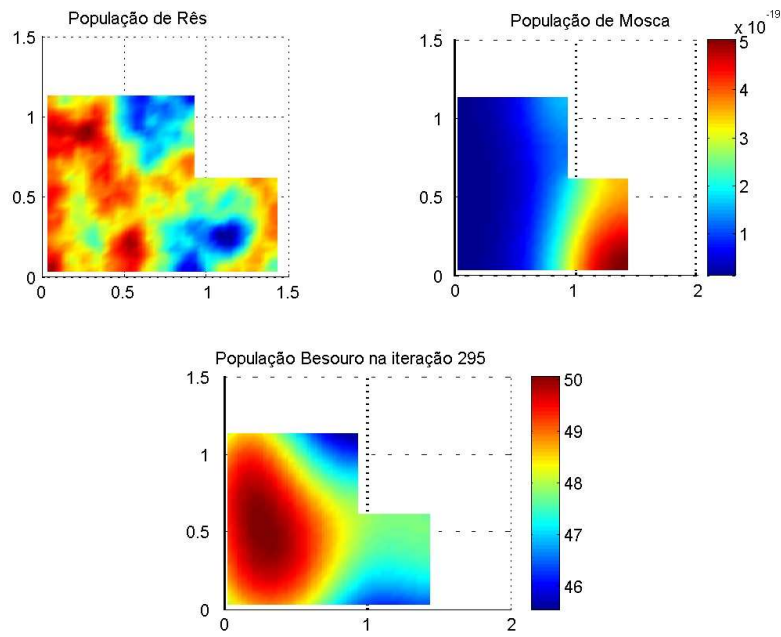


Figura 5: Distribuição das espécies após 195 iterações

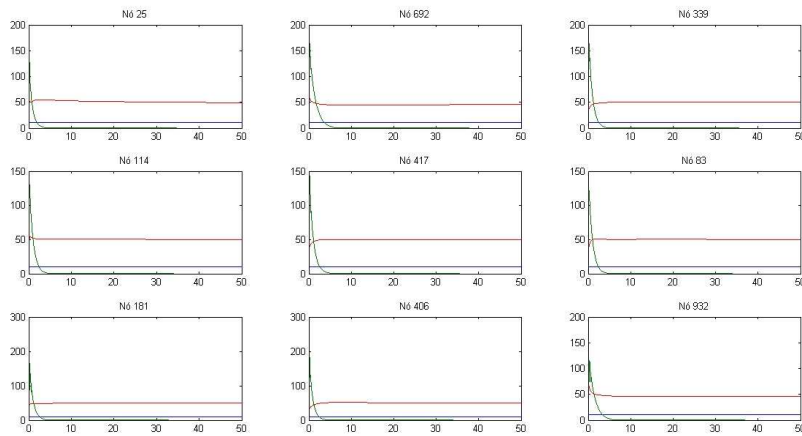


Figura 6: Gráfico de crescimento populacional das três espécies após 300 iterações

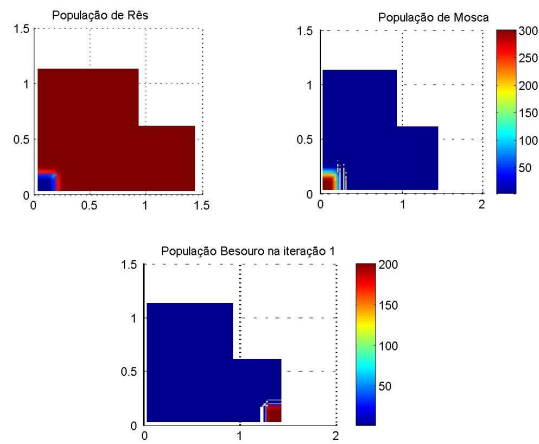


Figura 7: Distribuição das espécies na primeira iteração

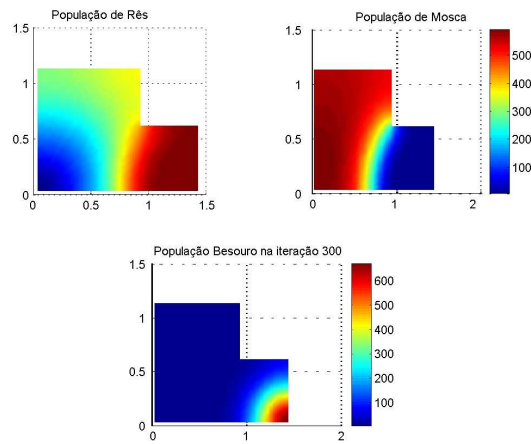


Figura 8: Distribuição das espécies após 300 iterações

determinada região, também não haverá mosca, é claro que a rês busca fugir, mas a mosca é um tipo de parasita, assim como o besouro não afeta a mosca adulta, o que significa que a ela não foge do besouro, o que ele provoca é uma redução no surgimento de moscas adultas, ou seja, a presença de besouros não expulsa a mosca.

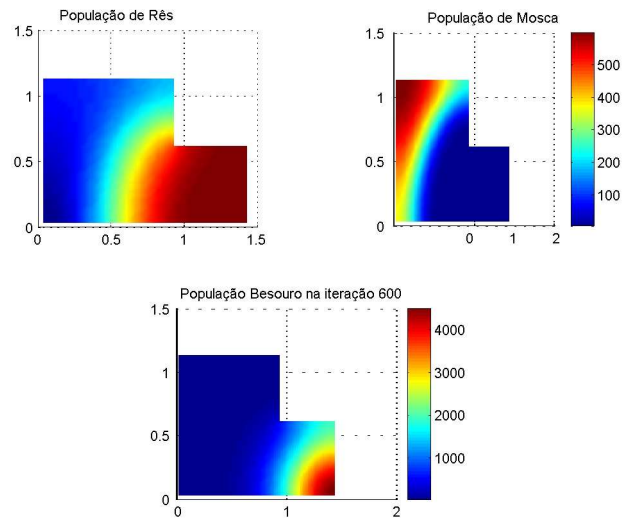


Figura 9: Distribuição das espécies após 300 iterações

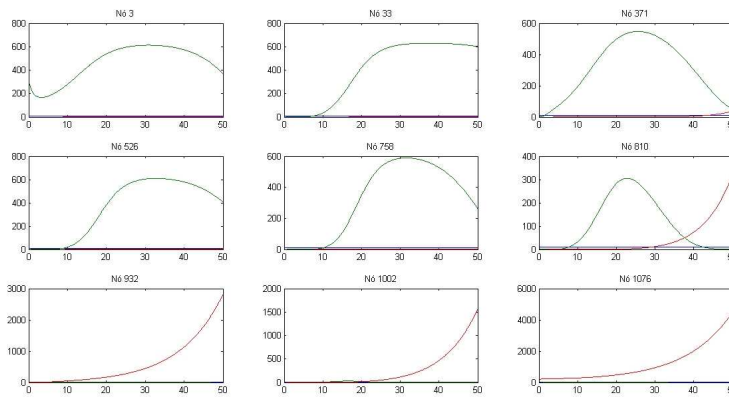


Figura 10: Gráfico de crescimento populacional das três espécies após 600 iterações

## Referências

Barros, A. T., Ismael, A. P. K., e Gomes, E. M. (2002). Dinâmica populacional da mosca-dos-chifres no Pantanal. *Boletim de Pesquisa e Desenvolvimento*

– EMBRAPA–CPAP, 31:19p.

- Barros, A. T. M. (2001a). Desenvolvimento da *haematobia irritans* (diptera: muscidae) em massas fecais de bovinos mantidas em laboratório. *Pesquisa Agropecuária Bras.*, 37(2):217–221.
- Barros, A. T. M. (2001b). Dynamics of horn fly *haematobia irritans* (diptera: Muscidae), Infestation on nelore cattle in the Pantanal, Brazil. *Mem. Inst. Oswaldo Cruz*, 96(4):445–450.
- Bianchin, I. (2001). Sazonalidade de *haematobia irritans* no Brasil Central. *Pesquisa Veterinária Brasileira*, 26(2):79–86.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical Models in Biology*, volume 46 de *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia.
- Murray, J. D. (1989). *Mathematical Biology*. Springer, N. York.
- Quadros, D. G. e Franco, F. B. (2010). Benefícios dos besouros coprófagos à pecuária. url: [http://www.neppa.uneb.br/textos/publicacoes/artigos\\_tecnicos/beneficios\\_besouros\\_coprofagos.pdf](http://www.neppa.uneb.br/textos/publicacoes/artigos_tecnicos/beneficios_besouros_coprofagos.pdf). Acesso em: 07/05/2010.

