

Comportamento evolutivo de organismos bentônicos interativos na presença do sedimento

Paulo César Carmona Tabares¹,

Universidad del Quindío, Armenia, Q. - Colombia.

Luciana Torre²,

Laboratorio de Ecología Marina FCEFyNat, Córdoba, C. - Argentina.

João Frederico C.A. Meyer³,

IMECC - UNICAMP, 13083-859, Campinas, SP. - Brasil.

Resumo. Neste trabalho, efetivamos a modelagem matemática do comportamento evolutivo das interações entre espécies competidoras com dinâmicas populacionais verhulstianas na presença de impacto, o problema foi definido a partir de dados do programa antártico argentino. Isto foi feito com um sistema não linear de equações diferenciais parciais que, expresso em sua formulação variacional foi aproximado usando elementos finitos no espaço e Crank-Nicolson no tempo. Gráficos ilustrativos são apresentados a partir de resultados numéricos de simulação.

Palavras-chave: *Ecologia Matemática, Dinâmica Populacional, Método dos Elementos Finitos, Método de Crank-Nicolson.*

1. Introdução

Ao norte da península antártica, encontra-se a Ilha *King George*, que faz parte do Arquipélago *South Shetland*. Ao sul da ilha, acha-se localizada a enseada *Potter* que tem aproximadamente (na sua região interna) uma área de 3km^2 e está rodeada pela geleira *Fourcade*, exceto na costa sul onde têm ficado zonas livres de gelo, como conseqüência do retrocesso da geleira (Wiencke et al., 1998). A profundidade desta enseada varia até 50m aproximadamente

¹paulocct@uniquindio.edu.co

²lutorre17@yahoo.com.ar

³joni@ime.unicamp.br

e, naquela região interna, os fundos, não são, em geral, rígidos (lama e areia). Especificamente, na parte do sul, a região tem a configuração lama-areia e na parte norte possui sedimento fino e depósitos de morena (Sahade et al., 1998).

Durante os meses de primavera e verão (estações de maior temperatura), ocorre o degelo da geleira *Fourcade*, os córregos de degelo *Matias* e *Potter*, que desaguam diretamente na enseada e são os responsáveis pelo aumento do sedimento (Varela, 1998). Nas últimas duas décadas, o retrocesso da geleira tem causado um aumento nos córregos (Eraso e Domínguez, 2007; Schloss et al., 2008), causando mudanças na distribuição e na abundância dos ecossistemas existentes. No caso particular das espécies bentônicas *Mongula pedunculata* e *Cnemidocarpa verrucosa* (ascídias ditas “altas”), foi observada uma diminuição importante nas densidades, e no caso do pennatulaceo *Malacobelemmom daytoni*, um aumento significativo (Sahade et al., 2008).

Aparentemente, o acréscimo na concentração do material particulado inorgânico, o sedimento, ocasionado pelo aumento no degelo da geleira, afeta os organismos filtradores já que a quantidade de sedimento na coluna de água incrementa o gasto metabólico na hora da filtração de nutrientes. Experimentalmente, tem-se observado que as ascídias são mais sensíveis à existência do sedimento, enquanto o pennatulaceo tem mostrado uma melhor tolerância à presença de material particulado.

Neste trabalho, apresentamos um modelo matemático como instrumento auxiliar na avaliação qualitativa e quantitativa da relação existente entre a distribuição e abundância das ascídias (*M. pedunculata* e *C. verrucosa*) e o pennatulaceo *M. daytoni* na presença evolutiva do sedimento, incluindo (na modelagem) o fato de que as ascídias e o pennatulaceo são competidores naturais pelos recursos do solo marinho, sendo as ascídias as melhores competidoras. Em outras palavras, a modelagem matemática e o algoritmo numérico resultante de sua aproximação devem se constituir como um instrumento auxiliar na avaliação das conjecturas lançadas (baseadas nos resultados experimentais).

2. Problema Matemático

Para estudar este fenômeno, apresentamos um modelo apoiado em um sistema de três equações diferenciais parciais não lineares nas quais temos, para os grupos bentônicos, duas equações do tipo reação-difusão, com termos de reação que envolvem a dinâmica Lotka-Volterra de competência intraespecífica

e interespecifica, junto com um termo do tipo Michaelis-Menten para avaliar o efeito do sedimento nessas populações. Para o sedimento, temos uma equação do tipo advecção-difusão e um termo para as fontes pontuais, provocadas pelo degelo. Além disso, a região espacial de estudo é um retângulo (primeira aproximação do domínio real), e consideramos condições iniciais adequadas, com condições de contorno dos tipos Dirichlet homogênea e von Neumann homogênea para os organismos bentônicos; e condições de Robin e Dirichlet homogêneas para o sedimento (veja a figura 1 e a equação (2.2)).

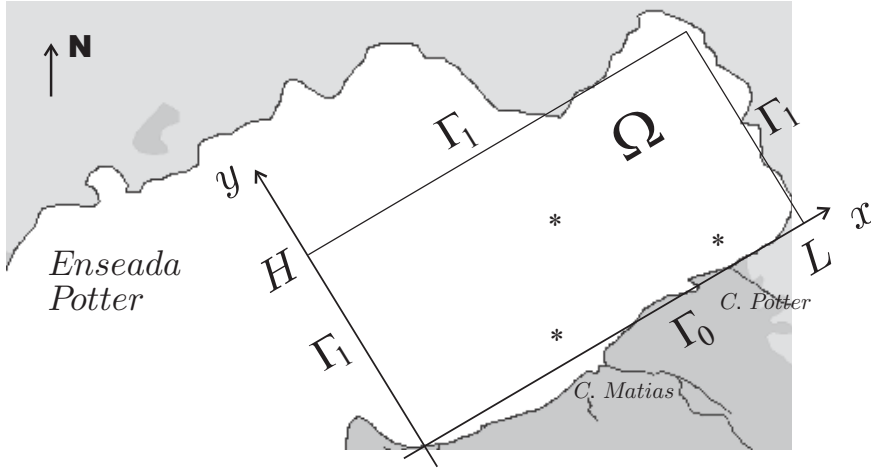


Figura 1: Domínio espacial do problema.

Especificamente, teremos a densidade do primeiro grupo bentônico (ascídias) denotada por $P_1 \equiv P_1(x, y, t)$ e, para o segundo grupo (pennatuláceo), uma densidade denotada por $P_2 \equiv P_2(x, y, t)$. Finalmente, o sedimento é denotado por $S \equiv S(x, y, t)$. Para os três casos, temos $(x, y) \in \Omega = [0, L] \times [0, H] \subseteq \mathbb{R}^2$ e o tempo $t \in J = (0, T]$. Assim, o sistema não linear resultante é:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \alpha_1 \nabla^2 P_1 + \mu_1 P_1 = \lambda_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + \delta_1 P_2}{K}\right) - \frac{\beta_1 S^2}{\gamma_1 + S^2} P_1 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} - \alpha_2 \nabla^2 P_2 + \mu_2 P_2 = \lambda_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2 + \delta_2 P_1}{K}\right) - \frac{\beta_2 S^2}{\gamma_2 + S^2} P_2 \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_S \nabla^2 S + \mathbb{W} \cdot \nabla S = -\sigma_1 P_1 S - \sigma_2 P_2 S + f \end{cases} \quad (2.1)$$

onde os parâmetros (positivos) significam com os subíndices adequados: α difusividade, μ mortalidade, λ crescimento *per capita*, δ competição interes-

pecífica, β a taxa de máximo dano provocado pelo sedimento, γ constantes de Michaelis-Menten e σ a taxa de consumo de sedimento. Além disso, K representa a capacidade de suporte para ambas as populações e f as fontes pontuais de sedimento.

No caso das condições iniciais e de contorno,

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x, y, 0) = P_1^0(x, y), P_2(x, y, 0) = P_2^0(x, y) \text{ e } S(x, y, 0) \equiv 0 \\ P_m|_{\Gamma_0} = 0 \text{ e } \left. \frac{\partial P_m}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_1} = 0, \text{ para todo } t \in J \text{ e } m = 1, 2 \\ S|_{\Gamma_1} = 0 \text{ e } -\alpha_S \left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_0} = kS|_{\Gamma_0}, \text{ para todo } t \in J \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Para este problema, procuramos soluções (de P_1 , P_2 e S) que estão no espaço

$$\mathbf{V}_m = \left\{ w \in L^2((0, T] : H^1(\Omega)); \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(\Omega) \forall t \in J; w|_{\Gamma_m} = 0 \right\} \quad \text{p/ } m = 0, 1.$$

Porém, como não existem métodos analíticos para resolver problemas do tipo (2.1)-(2.2), transformamos o sistema para sua *formulação variacional* (ou *formulação fraca*); na qual podemos encontrar uma boa aproximação da solução do problema original (Lions, 1961).

Para transformar o sistema (2.1), requeremos de espaços de funções adequados para trabalhar. Assim definimos o subespaço de $H^1(\Omega)$

$$\mathcal{V}_m = \{w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_m} = 0\} \quad \text{para } m = 0, 1;$$

para depois procurarmos uma solução aproximada (de P_1 , P_2 e S) em subespaços convenientes de \mathcal{V}_m ($m = 0, 1$).

Se usamos as notações $(u|v) = \int_{\Omega} uv d\mu$ que corresponde ao produto interno entre u e v em $L^2(\Omega)$, $(\nabla u|\nabla v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mu$ e $\langle u|v \rangle = \oint_{\partial\Omega} uv dr$ e usamos o Teorema de Green na parcela do laplaciano. O sistema expresso na formulação forte dado por (2.1), em sua formulação variacional, se transforma em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial P_1}{\partial t} |w \right) + \alpha_1 (\nabla P_1 | |\nabla w) - \alpha_1 \left\langle \frac{\partial P_1}{\partial \eta} |w \right\rangle + \mu_1 (P_1 |w) = \\ \quad \lambda_1 (P_1 (1 - \frac{P_1 + \delta_1 P_2}{K}) |w) - \beta_1 (\frac{S^2}{\gamma_1 + S^2} P_1 |w) \\ \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} |w \right) + \alpha_2 (\nabla P_2 | |\nabla w) - \alpha_2 \left\langle \frac{\partial P_2}{\partial \eta} |w \right\rangle + \mu_2 (P_2 |w) = \\ \quad \lambda_2 (P_2 (1 - \frac{P_2 + \delta_2 P_1}{K}) |w) - \beta_2 (\frac{S^2}{\gamma_2 + S^2} P_2 |w) \\ \left(\frac{\partial S}{\partial t} |w \right) + \alpha_S (\nabla S | |\nabla w) - \alpha_S \left\langle \frac{\partial S}{\partial \eta} |w \right\rangle + W_1 (\frac{\partial S}{\partial x} |w) + W_2 (\frac{\partial S}{\partial y} |w) = \\ \quad -\sigma_1 (P_1 S |w) - \sigma_2 (P_2 S |w) + (f |w), \end{array} \right. \quad (2.3)$$

para todo $w \in \mathcal{V}_m$ com $m = 0, 1$.

Na construção da solução aproximada do sistema variacional (2.3), inicialmente trabalhamos com as variáveis espaciais, usando o método de elementos finitos (Kardestuncer e Douglas, 1987; Brenner e Scott, 2007). Para isto, seja $\mathcal{V}_h \subseteq \mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1$ um subespaço de dimensão n tal que $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ seja uma base desse subespaço; então, usando as funções da base \mathcal{B} na aplicação da separação de variáveis nas funções P_m ($m = 1, 2$) e S , obtemos as aproximações

$$\begin{aligned} P_m(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^n p_{m,j}(t) \varphi_j(x, y), \quad \frac{\partial P_m}{\partial x}(x, y, t) \approx \sum_{j=1}^n p_{m,j}(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial P_m}{\partial y}(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^n p_{m,j}(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial P_m}{\partial t}(x, y, t) \approx \sum_{j=1}^n \frac{dp_{m,j}}{dt}(t) \varphi_j(x, y), \end{aligned}$$

para $m = 1, 2$

e

$$\begin{aligned} S(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^n s_j(t) \varphi_j(x, y), \quad \frac{\partial S}{\partial x}(x, y, t) \approx \sum_{j=1}^n s_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x, y), \\ \frac{\partial S}{\partial y}(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^n s_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial S}{\partial t}(x, y, t) \approx \sum_{j=1}^n \frac{ds_j}{dt}(t) \varphi_j(x, y). \end{aligned}$$

Assim, ao utilizar tais aproximações na formulação variacional (2.3) e, depois de usar as propriedades do produto interno, temos o sistema discretizado

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{dp_{1,j}}{dt}(\varphi_j |w_h) + \alpha_1 \sum_{j=1}^n p_{1,j} (\nabla \varphi_j | |\nabla w_h) + \mu_1 \sum_{j=1}^n p_{1,j} (\varphi_j |w_h) = \\ \quad = \lambda_1 \sum_{j=1}^n p_{1,j} (\varphi_j |w_h) - \frac{\lambda_1}{K} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{1,j} p_{1,k} (\varphi_j \varphi_k |w_h) - \\ \quad - \frac{\lambda_1 \delta_1}{K} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{1,j} p_{2,k} (\varphi_j \varphi_k |w_h) - \frac{\beta_1 \bar{S}}{\gamma_1 + \bar{S}^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{1,j} s_k (\varphi_j \varphi_k |w_h) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{dp_{2,j}}{dt}(\varphi_j|w_h) + \alpha_2 \sum_{j=1}^n p_{2,j}(\nabla\varphi_j|\nabla w_h) + \mu_2 \sum_{j=1}^n p_{1,j}(\varphi_j|w_h) = \\ = \lambda_2 \sum_{j=1}^n p_{2,j}(\varphi_j|w_h) - \frac{\lambda_2}{K} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{2,j}p_{2,k}(\varphi_j\varphi_k|w_h) \\ - \frac{\lambda_2\delta_2}{K} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{1,j}p_{2,k}(\varphi_j\varphi_k|w_h) - \\ - \frac{\beta_2\bar{S}}{\gamma_2+S^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{2,j}s_k(\varphi_j\varphi_k|w_h) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{ds}{dt}(\varphi_j|w_h) + \alpha_S \sum_{j=1}^n s_j(\nabla\varphi_j|\nabla w_h) + k \sum_{j=1}^n s_j \langle \varphi_j|w_h \rangle + \\ + W_1 \sum_{j=1}^n s_j \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} |w_h \right) + W_2 \sum_{j=1}^n s_j \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} |w_h \right) = (f|w_h) - \\ - \sigma_1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_j p_{1,k}(\varphi_j\varphi_k|w_h) \sigma_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_j p_{2,k}(\varphi_j\varphi_k|w_h) \end{array} \right.$$

para todo $w_h \in \mathcal{V}_h$. Além de assumir que, no sistema anterior, a quantidade \bar{S} corresponde a uma aproximação adequada para S .

Dado que o sistema (2.4) vale para todo $w_h \in \mathcal{V}_h$, então é suficiente escrever (2.4) tomando como referencia os elementos $\varphi_i \in \mathcal{B}$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{dp_{1,j}}{dt}(\varphi_j|\varphi_i) + \alpha_1 \sum_{j=1}^n p_{1,j}(\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i) + \mu_1 \sum_{j=1}^n p_{1,j}(\varphi_j|\varphi_i) = \\ = \lambda_1 \sum_{j=1}^n p_{1,j}(\varphi_j|\varphi_i) - \frac{\lambda_1}{K} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{1,j}p_{1,k}(\varphi_j\varphi_k|\varphi_i) - \\ - \frac{\lambda_1\delta_1}{K} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{1,j}p_{2,k}(\varphi_j\varphi_k|\varphi_i) - \frac{\beta_1\bar{S}}{\gamma_1+S^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{1,j}s_k(\varphi_j\varphi_k|\varphi_i) \\ \text{para } i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{dp_{2,j}}{dt}(\varphi_j|\varphi_i) + \alpha_2 \sum_{j=1}^n p_{2,j}(\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i) + \mu_2 \sum_{j=1}^n p_{1,j}(\varphi_j|\varphi_i) = \\ = \lambda_2 \sum_{j=1}^n p_{2,j}(\varphi_j|\varphi_i) - \frac{\lambda_2}{K} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{2,j}p_{2,k}(\varphi_j\varphi_k|\varphi_i) - \\ - \frac{\lambda_2\delta_2}{K} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{1,j}p_{2,k}(\varphi_j\varphi_k|\varphi_i) - \frac{\beta_2\bar{S}}{\gamma_2+S^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{2,j}s_k(\varphi_j\varphi_k|\varphi_i) \\ , \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (2.5)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{ds}{dt}(\varphi_j|\varphi_i) + \alpha_S \sum_{j=1}^n s_j(\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i) + k \sum_{j=1}^n s_j \langle \varphi_j|\varphi_i \rangle + W_1 \sum_{j=1}^n s_j \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \\ + W_2 \sum_{j=1}^n s_j \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right) = (f|\varphi_i) - \sigma_1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_j p_{1,k}(\varphi_j\varphi_k|\varphi_i) \\ - \sigma_2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n s_j p_{2,k}(\varphi_j\varphi_k|\varphi_i), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

para todo $\varphi_i \in \mathcal{B}$.

Finalmente, aplicando o método de Crank-Nicolson (ver LeVeque, 2007) em (2.5) para a aproximação temporal do sistema, obtemos um sistema não linear da forma

$$\begin{cases} \mathbb{M}_{e,1}(\cdot)\mathbf{P}_1^{(n+1)} = \mathbb{M}_{d,1}(\cdot)\mathbf{P}_1^{(n)} \\ \mathbb{M}_{e,2}(\cdot)\mathbf{P}_2^{(n+1)} = \mathbb{M}_{d,2}(\cdot)\mathbf{P}_2^{(n)} \\ \mathbb{M}_{e,s}(\cdot)\mathbf{S}^{(n+1)} = \mathbb{M}_{d,s}(\cdot)\mathbf{S}^{(n)} + \mathbb{F}^{(n+1/2)}, \end{cases} \quad (2.6)$$

com a notação (\cdot) que representa a dependência nas matrizes \mathbb{M}_* das quantidades $\mathbf{P}_1^{(n)}$, $\mathbf{P}_1^{(n+1)}$, $\mathbf{P}_2^{(n)}$, $\mathbf{P}_2^{(n+1)}$, $\mathbf{S}^{(n)}$ e $\mathbf{S}^{(n+1)}$.

Explicitamente, os coeficientes das matrizes $\mathbb{M}_{e,l}$, $\mathbb{M}_{d,l}$ para $l = 1, 2$ e s ; estão dados por:

$$\begin{aligned} (\mathbb{M}_{e,1})_{i,j} &= \left(1 + \frac{\mu_1 \Delta t}{2} - \frac{\lambda_1 \Delta t}{2}\right) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_1 \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | | \nabla \varphi_i) \\ &+ \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\lambda_1}{K} (p_{1,k}^{(n+1)} + p_{1,k}^{(n)}) + \frac{\lambda_1 \delta_1}{K} (p_{2,k}^{(n+1)} + p_{2,k}^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_1 \bar{S}}{\gamma_1 + \bar{S}^2} (S^{(n+1)} + S^{(n)}) \right] (\varphi_j \varphi_k | \varphi_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{M}_{d,1})_{i,j} &= \left(1 - \frac{\mu_1 \Delta t}{2} + \frac{\lambda_1 \Delta t}{2}\right) (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_1 \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | | \nabla \varphi_i) \\ &- \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\lambda_1}{K} (p_{1,k}^{(n+1)} + p_{1,k}^{(n)}) + \frac{\lambda_1 \delta_1}{K} (p_{2,k}^{(n+1)} + p_{2,k}^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_1 \bar{S}}{\gamma_1 + \bar{S}^2} (S^{(n+1)} + S^{(n)}) \right] (\varphi_j \varphi_k | \varphi_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{M}_{e,2})_{i,j} &= \left(1 + \frac{\mu_2 \Delta t}{2} - \frac{\lambda_2 \Delta t}{2}\right) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_2 \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | | \nabla \varphi_i) \\ &+ \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\lambda_2}{K} (p_{2,k}^{(n+1)} + p_{2,k}^{(n)}) + \frac{\lambda_2 \delta_2}{K} (p_{1,k}^{(n+1)} + p_{1,k}^{(n)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_2 \bar{S}}{\gamma_2 + \bar{S}^2} (S^{(n+1)} + S^{(n)}) \right] (\varphi_j \varphi_k | \varphi_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{M}_{d,2})_{i,j} &= (1 - \frac{\mu_2 \Delta t}{2} + \frac{\lambda_2 \Delta t}{2})(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_2 \Delta t}{2}(\nabla \varphi_j | | \nabla \varphi_i) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^n [\frac{\lambda_2}{K}(p_{2,k}^{(n+1)} + p_{2,k}^{(n)}) + \frac{\lambda_2 \delta_2}{K}(p_{1,k}^{(n+1)} + p_{1,k}^{(n)}) \\
&\quad \quad + \frac{\beta_2 \bar{S}}{\gamma_2 + \bar{S}^2}(S^{(n+1)} + S^{(n)})](\varphi_j \varphi_k | \varphi_i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{M}_{e,s})_{i,j} &= (1 + \frac{\mu_s \Delta t}{2})(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2}(\nabla \varphi_j | | \nabla \varphi_i) + \frac{k \Delta t}{2} \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle \\
&\quad + \frac{W_1 \Delta t}{2}(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) + \frac{W_2 \Delta t}{2}(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i) + \\
&\quad \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^n [\sigma_1(p_{1,k}^{(n+1)} + p_{1,k}^{(n)}) + \sigma_2(p_{2,k}^{(n+1)} + p_{2,k}^{(n)})](\varphi_j \varphi_k | \varphi_i) e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{M}_{e,d})_{i,j} &= (1 - \frac{\mu_s \Delta t}{2})(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2}(\nabla \varphi_j | | \nabla \varphi_i) - \frac{k \Delta t}{2} \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle \\
&\quad - \frac{W_1 \Delta t}{2}(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) - \frac{W_2 \Delta t}{2}(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k=1}^n [\sigma_1(p_{1,k}^{(n+1)} + p_{1,k}^{(n)}) + \sigma_2(p_{2,k}^{(n+1)} + p_{2,k}^{(n)})](\varphi_j \varphi_k | \varphi_i).
\end{aligned}$$

O vetor $\mathbb{F}^{(n+1/2)}$ está definido (nas componentes que correspondem às fontes pontuais) por $\frac{\Delta t}{2}(f^{(n+1)} + f^{(n)})$.

O sistema não linear (2.6) será resolvido iterativamente (no tempo) a partir das condições iniciais e usando o método das iterações incompletas desenvolvido por Douglas Jr. et al. (1979) e que também foi utilizado por: Meyer (1988), Pregnotato e Meyer (2003), Sossae e Meyer (2004) e Salvatierra e Meyer (2006), entre outros. A implementação do algoritmo foi feito no MATLAB e foram usados elementos finitos de primeira ordem na discretização espacial.

3. Simulações numéricas

Para realizar as simulações numéricas, usamos valores dos parâmetros baseados na hipótese que as ascídias são boas competidoras, seu crescimento é mais rápido que os pennatuláceos e possuem uma melhor taxa de filtração (Kowalke, 1999; Kowalke et al., 2001). Os outros parâmetros estão na linha das quantidades usadas no trabalho de Torre et al. (2008) e acrescentamos a

capacidade de suporte $K = 100$ e um vento predominante na direção leste (Roese e Drabble, 1998) dada por $\mathbb{W} = \langle 5.0 \times 10^{-3}, 4.3 \times 10^{-3} \rangle$.

A tabela 1 contém os valores dos parâmetros correspondentes ao sistema (2.1) e geram os gráficos mostrados nas figuras 2 e 3.

Tabela 1: Valores dos parâmetros para as figuras 2 e 3.

Índice	1	2	s
α	7.5×10^{-4}	7.5×10^{-4}	2.5×10^{-4}
μ	2.0×10^{-7}	2.0×10^{-7}	1.0×10^{-7}
λ	2.5×10^{-2}	3.5×10^{-2}	
δ	2.0×10^{-2}	4.0×10^{-2}	
β	1.0×10^{-3}	5.0×10^{-5}	
γ	1.0	1.0	
σ	2.0×10^{-6}	1.5×10^{-6}	

O gráfico 2 exibe a mudança no comportamento das densidades no sistema na evolução do tempo; percebendo a uniformidade das populações no espaço, embora na parte direita da região (setor de acúmulo do sedimento), é diferenciado o efeito negativo do sedimento nos organismos bentônicos, com maior dano nas ascídias e menor no pannatulaceo. No mesmo gráfico, observamos no caso das ascídias uma maior densidade das populações na região onde não temos, por causa do vento predominante, o material particulado.

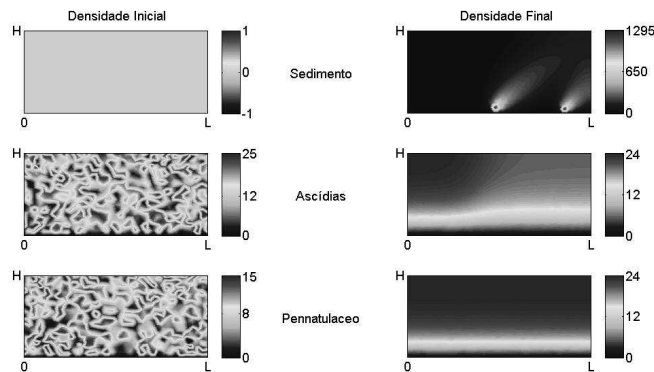


Figura 2: Distribuição e abundância do sedimento e dos organismos bentônicos.

No gráfico 3, estamos capturando a informação de alguns dos pontos da região (veja na figura 1, as partes marcadas com *), em concordância com sua localização e, pensando nas possíveis diferenças no comportamento do sistema. Na primeira coluna observamos a estabilização do sedimento nos pontos observados, notando uma maior quantidade de sedimento no ponto que fica perto do córrego *Potter*, por causa da fonte e pelo vento predominante. Também percebemos um aumento (redução) na população do pennatulaceo (ascídias) neste mesmo ponto. Os comportamentos das populações nos outros pontos analisados correspondem às conjecturas biológicas observadas experimentalmente, ou seja: as ascídias são altamente sensíveis ao incremento do sedimento e o pennatulaceo não é afetado negativamente pelo incremento de sedimento.

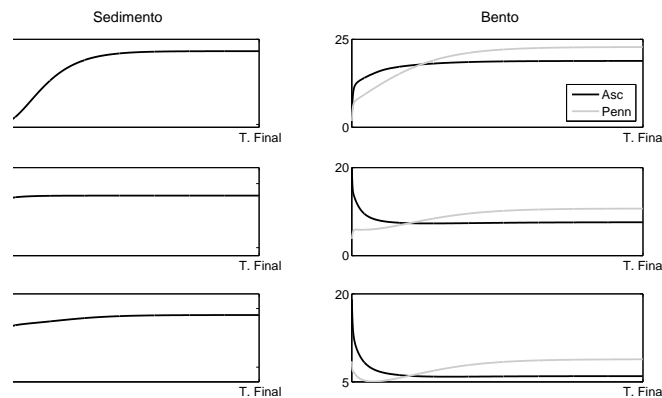


Figura 3: Comportamento evolutivo do sedimento e dos organismos bentônicos.

4. Conclusões

Neste trabalho, desenvolvemos uma ferramenta matemática para validar, por meio simulações numéricas, uma conjectura acerca do efeito do sedimento na distribuição e na abundância de alguns grupos bentônicos na antártica; fenômeno que tem sido previsto e, além disso, observado experimentalmente. Conseqüentemente, acreditamos ter viabilizado um relevante instrumental auxiliar em avaliações de impacto.

Agradecimentos

Os autores agradecem as suas respectivas universidades pelo apoio financeiro para nos reunir e assim realizar um bom trabalho interdisciplinar.

Referências

- Brenner, S. C. e Scott, L. R. (2007). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 3a ed.
- Douglas Jr., J., Dupont, T., e Ewing, R. E. (1979). Incomplete iteration for time-stepping a galerkin method for a quasi-linear parabolic-problem. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 16:503–522.
- Eraso, A. e Domínguez, M. (2007). Physicochemical characteristics of the subglacier discharge in potter cove, king george island, antarctica. *Studies of the Faculty of Earth Sciences, University of Silesia*, 45:111–122.
- Kardestuncer, H. e Douglas, H. N. (1987). *Finite Element Handbook*. Mcgraw-Hill, New York.
- Kowalke, J. (1999). Filtration in antarctic ascidians - striking a balance. *Journal of Experimental Marine Biology and Ecology*, 242:233–244.
- Kowalke, J., Tatián, M., Sahade, R., e Arntz., W. (2001). Production and respiration of antarctic ascidians. *Polar Biology*, 24:663–669.
- LeVeque, R. J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Lions, J. L. (1961). *Equations Différentielles Opérationnelles et Problèmes Aux Limites*. Springer, 2rd.
- Meyer, J. F. C. A. (1988). *Modelagem e Simulação Numérica do Transiente Térmico em Meios Compostos*. Tese de Doutorado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Pregolato, S. A. e Meyer, J. F. C. A. (2003). Mathematical model and numerical simulation of the population dynamics of capybaras: an epizootic model with dispersal, migration and periodically varying contagion. *Biomatemática*, 13:145–152.

- Roese, M. e Drabble, M. (1998). Wind driven circulation in potter cove. *The Potter Cove Coastal Ecosystem, Antarctica. Reports on Polar Research*, 299:40–46.
- Sahade, R., Tarantelli, S., e Mercuri, G. (2008). Benthic community shifts: A possible linkage to climate change? *Berichte zur Polar und Meeresforschung/Reports on Polar and Marine Research*, páginas 331–337.
- Sahade, R., Tatián, M., e Esnal, G. (1998). Benthic faunal associations on soft substrates at potter cove, king georg island, antarctica. *Polar Biology*, 19:85–91.
- Salvatierra, M. e Meyer, J. F. C. A. (2006). Modelagem matemática e simulação computacional da presença de materiais impactantes tóxicos em casos de dinâmica populacional com competição inter e intra-específica. *Biomatemática*, 16:1–22.
- Schloss, I., Ferreyra, G., e Abele., D. (2008). Long term hydrographic conditions and climate trends in potter cove. *Reports on Polar Research*, 571:382–389.
- Sossae, R. C. e Meyer, J. F. C. A. (2004). A presença evolutiva de um material impactante e seu efeito no transiente populacional de espécies interativas: modelagem e aproximação. *Biomatemática*, 14:131–159.
- Torre, L., Sahade, R., Momo, F., e Meyer, J. F. C. A. (2008). Effect of sedimentation increase on antarctic benthic ecosystem: A mathematical approach in a global warming context. Technical report, BIOMAT 2008 - 8th International Symposium on Mathematical and Computational Biology.
- Varela, L. (1998). Hydrology of matias and potter creeks. *Berichte Zur Polarforschung*, 299:33–39.
- Wiencke, C., Clayton, M., e Peters, A. (1998). Biodiversity, life cycles and evolution of antarctic macroalgae. *Reports on Polar Research, Alfred Wegener Institute for Polar and Marine Research*, 299:82–89.