Biomatemática ***21*** *(2011), 1–12* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Descrição de processos difusivos utilizando apenas base de regras

Jefferson Leite[1],
DMAT, CCN – UFPI, 64.049-550, Teresina/PI.

Rodney C. Bassanezi[2],
CMCC - UFABC, 09.210-170, Santo André/SP

Resumo. Neste trabalho, propomos um sistema fuzzy que simule a dispersão dos indivíduos cujos movimentos sejam descritos por difusão. Dessa forma, utilizaremos apenas a posição da população como variável de entrada para descrevermos todo o processo. Destacamos o fato de que a equação clássica de difusão, juntamente com sua solução analítica em nenhum momento foi usada para a obtenção de nossa descrição.

Palavras-chave*: Difusão; Sistemas p-fuzzy; Biomatemática.*

1. Introdução

As equações diferenciais e de diferenças determinísticas constituem uma poderosa ferramenta para a modelagem de fenômenos cujas as variáveis de estado estão sujeitas às variações ao longo do tempo. No entanto, para a modelagem determinística ser eficiente é necessário que tenhamos um conhecimento um tanto profundo das relações existentes entre as variáveis e suas variações. É o conhecimento do fenômeno que torna possível a escolha das funções que determinam as variações com relação ao estado (valor) da variável. Em muitas situações porém, esta relação entre variáveis e variações é somente conhecida parcialmente, o que torna a modelagem determinística menos aplicável.

Por outro lado, a modelagem através de equações variacionais fuzzy embora comportando subjetividades, também não são aplicáveis à modelagem de

[1]jleite@ufpi.edu.br
[2]rodney@ufabc.edu.br

fenômenos com relações parcialmente conhecidas. Isto vem do fato de que estes modelos são provenientes de modelos determinísticos. A subjetividade suportada pelas equações fuzzy se refere à imprecisões quanto aos estados iniciais das variáveis (*fuzziness demográfica*) e parâmetros (*fuzziness ambiental*). De modo geral, ambos os tipos de fuzziness estão presentes em equações de dinâmica populacional.

Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis, sendo portanto uma ferramenta muito útil para modelagem de fenômenos cujo comportamento é parcialmente conhecido.

Os sistemas fuzzy são, em geral, o resultado de uma generaliza ção dos sistemas clássicos, ou seja, nessa abordagem os conceitos incertos são incorporados a esses sistemas. Uma característica central dos sistemas fuzzy é que eles são baseados no conceito de partição fuzzy das informações. A utilização de conjuntos fuzzy permite uma generalização da informação, que está associada com a introdução da imprecisão do desconhecimento dos fenômenos. Em essência, a representação da informação nos sistemas fuzzy procura imitar o processo de raciocínio humano, considerando conhecimentos heurísticos e cruzando informações a princípio desconectadas.

Neste trabalho buscamos descrever um processo difusivo sem utilizar sua solução analítica, utilizando sistemas dinâmicos p-fuzzy e dada uma base de regras. Vale destacar que os resultados obtidos em termos de solução, são muito semelhantes ao do determinístico.

2. Preliminares

Um subconjunto (clássico) A do universo U pode ser representado por sua função característica dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in A \\ 0, \text{ se } x \neq A. \end{cases}$$

Assim, a função característica descreve completamente o conjunto A, uma vez que indica quais elementos do conjunto U são elementos de A.

Permitindo uma espécie de relaxamento no conjunto imagem da função característica de um conjunto foi que Zadeh formulou matematicamente um subconjunto fuzzy (Zadeh, 1965). Definimos um subconjunto fuzzy A de U, ou simplesmente conjunto fuzzy, por meio de pertinência $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$, em que o número $\mu_A(x)$ representa o grau de pertinência do elemento x ao subconjunto fuzzy A.

Um sistema baseado em regras fuzzy possui, basicamente, quatro componentes: Um processador de entrada (ou fuzzificador), um conjunto de regras linguísticas, um modelo de inferência fuzzy e um processador de saída (ou defuzzificador), gerando um número real como saída. A figura 1 ilustra o controlador fuzzy.

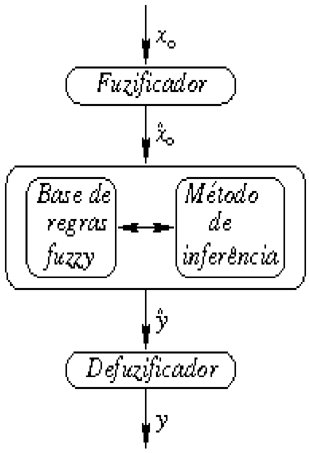

Figura 1: Estrutura do controlador fuzzy

A fuzzificação é o processo pelo qual os valores de entrada do sistema são convertidos para conjuntos fuzzy, com as respectivas faixas de valores onde estão definidos. É um mapeamento do domínio de números reais para o domínio fuzzy.

Também é importante definir o que são as Regras Fuzzy. Podemos definir como estruturas da forma Se {antecedentes} Então {consequentes} utilizadas para descrever situações específicas que podem ser submetidas à análise de um painel de especialistas, cuja inferência conduz a algum resultado desejado. Os antecedentes definem uma região fuzzy no espaço das variáveis de entrada do sistema e descrevem uma condição, enquanto os consequentes definem uma região no espaço das variáveis de saída do sistema e descrevem uma conclusão ou uma ação que pode ser esboçada quando as premissas se verificam. A regra fuzzy é uma unidade capaz de capturar algum conhecimento específico.

Um conjunto de regras (ou Base de Regras) é capaz de descrever um sistema em suas várias possibilidades, cumprindo o papel de "traduzir" matematicamente informações que formam a base de conhecimentos do sistema fuzzy. Os sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF), nesse caso denominados Controladores Fuzzy, possuem quatro módulos: módulo de fuzzificação; módulo da base de regras linguísticas; módulo de inferência fuzzy e módulo de defuzzificação. Estes módulos estão conectados conforme indicado na Figura (2). Denominamos de sistema *p-fuzzy* ao sistema iterativo

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x_o \in \mathbb{R}^n \text{ dado} \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $f(x_k)$ é quase linear, isto é, $f(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$, $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta(x_k)$ é obtido por um sistema baseado em regras fuzzy.

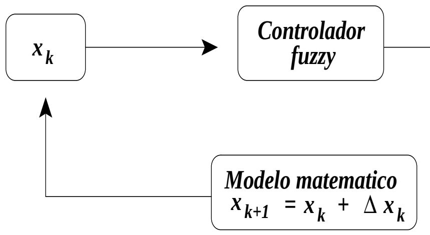

Figura 2: Estrutura de funcionamento de um sistema p-fuzzy

A *base de regras* é um conjunto formado por regras fuzzy que relaciona os termos linguísticos das variáveis de entrada e saída. A base de regras é considerada como um elemento integrante do núcleo do controlador fuzzy. Cada regra da base satisfaz a seguinte estrutura:

SE *a está em* A_i ENTÃO *b está em* B_i.

onde A_i e B_i são conjuntos fuzzy que representam termos linguísticos das variáveis de entrada e saída, respectivamente. A expressão *a está em* A_i significa que $\mu_{A_i}(a) \in [0,1]$. Tanto o conjunto fuzzy A_i quanto B_i podem ser um produtos cartesianos de conjuntos fuzzy, isto é, $A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \cdots \times A_{im}$ e $B_i = B_{i1} \times B_{i2} \times \cdots \times B_{in}$. Neste caso, cada conjunto fuzzy A_{ij} e B_{ik} representa um termo linguístico para a j-ésima variável de entrada e k-ésima variável de saída e, a expressão *a está em* A_i significa que

$$\mu_{A_i}(a) = \min\{\mu_{A_{i1}}, \mu_{A_{i2}}, \cdots, \mu_{A_{im}}\} \in [0,1].$$

É na definição da base de regras que as informações do fenômeno em estudo são utilizadas. Para cada estado definido pelos termos linguísticos da variável de entrada, é definifido uma regra. Sendo assim, quanto mais termos linguísticos mais informações são incorporadas na modelagem.

A relação entre as variáveis linguísticas é caracterizada pelo operador MIN, isto é, cada regra é considerada uma relação fuzzy R_i onde o grau de pertinência para cada para (a, b) é:

$$\mu_{R_i}(a, b) = \min\{\mu_{A_i}(a), \mu_{B_i}(b)\}.$$

A relação entre cada regra é caracterizada pelo operador máximo, ou seja, a relação fuzzy R que representa o modelo determinado por uma base de regras, é obtida pela união (máximo) de cada regra individual, de modo que para cada par (a, b) temos:

$$\mu_R(a, b) = \max_{1 \le i \le n} \{\mu_{A_i}(a) \wedge \mu_{B_i}(b)\}$$

onde $\wedge$ representa o operador MIN.

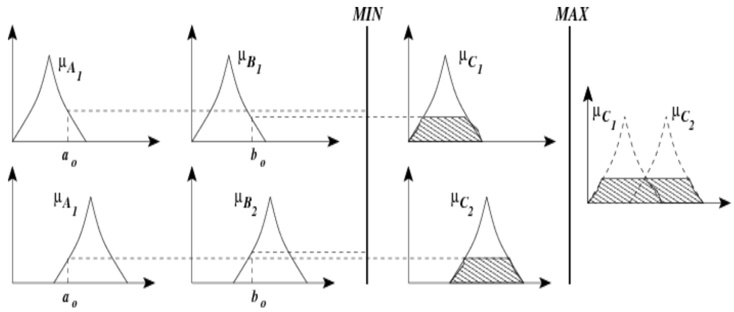

Figura 3: Mecanismo de inferência de Mamdani com duas variáveis linguísticas de entrada e uma de saída.

Agora, para cada entrada desejamos encontrar uma ação correspondente, isto é, para um conjunto A de dados de entrada, queremos determinar um conjunto B de dados de saida. Pelo método de Mamdani, a função de pertinência de B é dada por:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \max_a \{\mu_A(a) \wedge \mu_{A_i}(a)\} \wedge \mu_{B_i}(b) \right\}.$$

Se a entrada for um conjunto clássico unitário, então $\mu_A(a) = 1$ e

$\mu_{A_i}(a) \leq 1$. Logo, a expressão acima resulta em:

$$\mu_B(b) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\mu_{A_i}(a) \wedge \mu_{B_i}(b)\}$$

e, portanto, temos o conjunto fuzzy B que representa a ação para cada entrada A (Figura 3).

O papel do *defuzzificador* é converter cada conclusão obtida pelo método de inferência em um número real que melhor representa a ação a ser tomada. No caso dos sistemas p-fuzzy, o número real obtido pela defuzzificação é acrescentado ao valor assumido pela variável de entrada no instante k, alimentando o sistema iterativo.

Um dos principais métodos de defuzzificação é o centro de massa, que para variáveis contínuas é dado pela expressão

$$m(B) = \frac{\int_\Omega b\mu_B(b)db}{\int_\Omega \mu_B(b)\ db}.$$

Este método de defuzzificação será usado por todo este trabalho. Notemos que o controlador fuzzy pode ser visto como uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, já que dado um valor de entrada, existe um único valor de saída correspondente.

3. O Modelo

Nesta secção, estamos interessados em desenvolver uma base de regras que nos possibilite encontrar uma solução gráfica para um problema que envolva difusão. Para isso, usaremos apenas a posição da população, condição inicial e variação da população. Dessa formas poderemos estimar a densidade populacional em um instante $t = t^*$ sem necessariamente usarmos a solução analítica do problema.

Modelos clássicos de Dinâmica populacional e/ou epidemiologia, em geral, são dados por um sistema de equações diferenciais. Neste caso, os parâmetros dos modelos são frequentemente tomados como valores médios obtidos a partir de um conjunto de dados, de tal maneira que o modelo passa a ser deterministicamente conhecido. No entanto, admitindo-se incerteza devido ao conhecimento parcial, o que é comum em fenômenos biológicos, uma alternativa é modelar tal conhecimento a partir de um conjunto de regras da forma se-então.

É comum adotar uma equação

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{3.2}$$

para representar o sistema dinâmico, onde o campo f representa variação, a partir do qual a evolução do sistema é estudada. Na verdade podemos perguntar da seguinte forma: como podemos analisar o sistema (3.2) se o mesmo for parcialmente conhecido? A resposta é adotar um modelo linguístico capaz de captar as informações disponíveis do modelo, via de regra, junto a um especialista. Barros e Bassanezi (2010), propõem uma metodologia para estimar soluções de equações diferenciais utilizando controladores fuzzy, na qual as variáveis de estado são as entradas e as saídas são as variações de estado.

Dessa forma, considere como variáveis linguísticas para posição da população (distância a origem): *baixa positiva* (Bp), *média positiva* (Mp), *média alta positiva* (MAp), *alta positiva* (Ap), *baixa negativa* (Bn) , *média negativa* (Mn), *média alta negativa* (MAn) e *alta negativa* (An). Onde os termos positivo ou negativo significam distância da origem à direita ou esquerda respectivamente. Assim, a figura 4 representa graficamente essas variáveis linguísticas

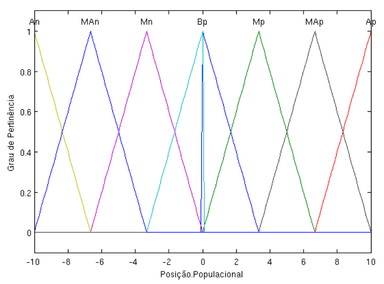

Figura 4: Variáveis linguísticas para posição da população

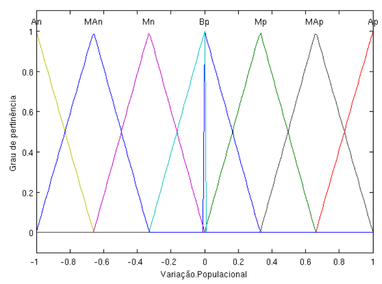

Figura 5: Variáveis linguísticas para variação da população

Da mesma forma, como variável de saída, consideremos a variação populacional e teremos como variáveis linguisticas: *baixa positiva* (Bp), *média positiva* (Mp), *média alta positiva* (MAp), *alta positiva* (Ap), *baixa negativa* (Bn) , *média negativa* (Mn), *média alta negativa* (MAn) e *alta negativa* (An). A figura 5 representa graficamente essas variáveis linguísticas.

Considerando os resultados conhecidos sobre processos de difususão, considere a seguinte base de regras fuzzy:

1. Se a posição dos indivíduos é *baixa positiva Bp* então a variação da população é *baixa positiva Bp*;

2. Se a posição dos indivíduos é *média positiva* Mp então a variação da população é *média positiva* Mp;

3. Se a posição dos indivíduos é *média alta positiva* MAp então a variação da população é *média alta positiva* MAp;

4. Se a posição dos indivíduos é *alta positiva* Ap então a variação da população é *alta positiva* Ap;

5. Se a posição dos indivíduos é *baixa negativa* Bn então a variação da população é *baixa negativa* Bn;

6. Se a posição dos indivíduos é *média negativa* Mn então a variação da população é *média negativa* Mn;

7. Se a posição dos indivíduos é *média alta negativa* MAn então a variação da população é *média alta negativa* MAn;

8. Se a posição dos indivíduos é *alta negativa* An então a variação da população é *alta negativa* An.

A figura 6 mostra o gráfico de toda a variação da variável dependente (Variação da População) como função da variável independente (Posição da População) no modelo de Mamdani.

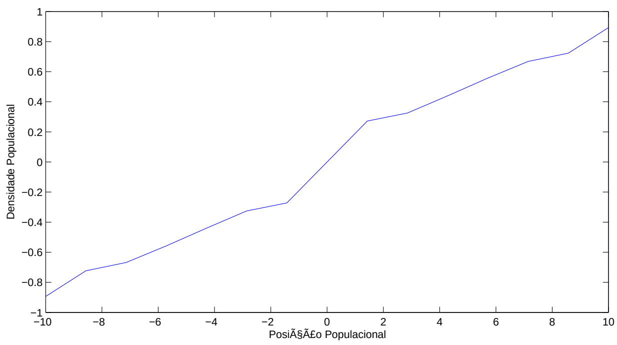

Figura 6: Curva gerada a partir das regras da figura anterior usando MAMDANI

Assim, com essa base de regras, o controlador de Mamdani e a defuzzificação dada pelo centro de massa, o sistema p-fuzzy nos leva à trajetória ilustrada pela sequencia de figuras 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14. Para tal, consideraremos como condição inicial $N_0 = 10$.

Uma outra observação importante é que o tempo, no nosso problema, significa o número de iterações simuladas no MATLAB®. Essa informação é de grande importância, pois diminui a quantidade de dados necessários para descrever o problema. Podemos assim, escrever o sistema dinâmico p-fuzzy na forma

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \tag{3.3}$$

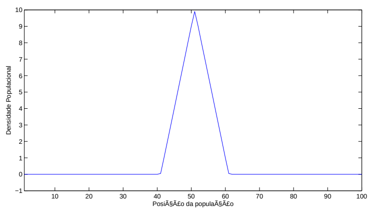

Figura 7: Solução em $t = 0$

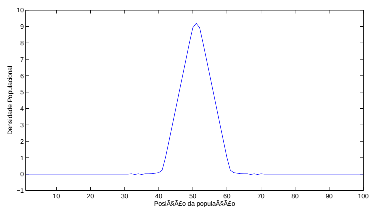

Figura 8: Solução para $t = 10$

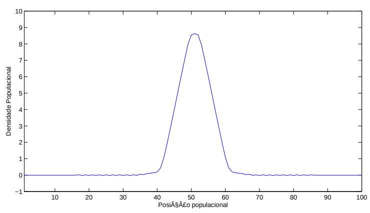

Figura 9: Solução para $t = 25$

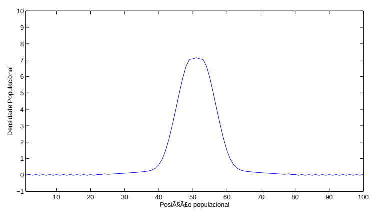

Figura 10: Solução para $t = 100$

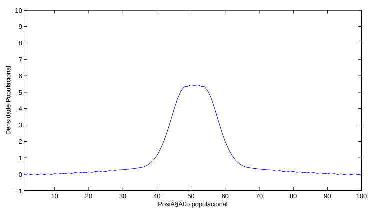

Figura 11: Solução para $t = 250$

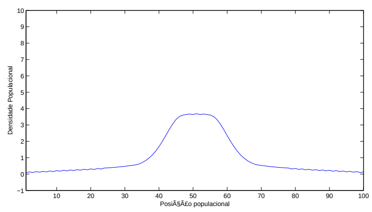

Figura 12: Solução para $t = 500$

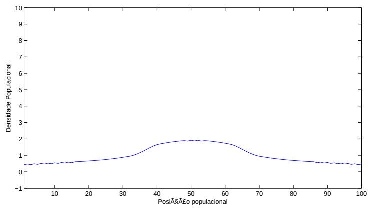

Figura 13: Solução para $t = 1000$

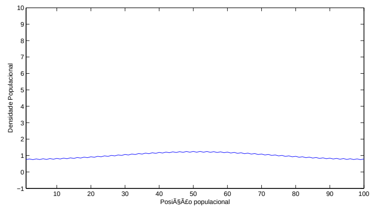

Figura 14: Solução para $t = 5000$

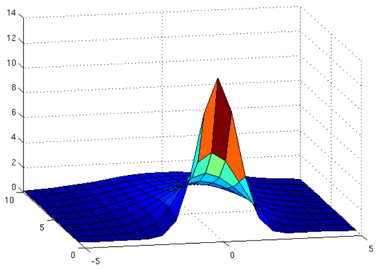

Figura 15: União das soluções p-fuzzy

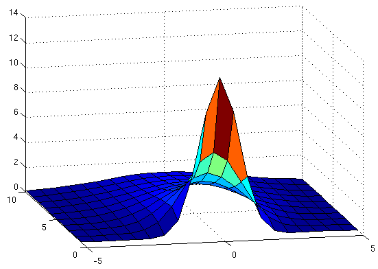

Figura 16: União das soluções p-fuzzy

Como para cada iteração ($t = t^*$) temos uma curva, então podemos plotar uma superfície que será nosso gráfico da solução p-fuzzy da equação de difusão. Esse gráfico está representado pelas figuras 15 e 16.

4. Conclusões

O mais interessante neste processo é que, necessariamente, não se tem condições de saber qual o melhor modelo, se é o determinístico ou se é o p-fuzzy, uma vez que os resultados apresentados são muito semelhantes como podemos ver na figura 15. A modelagem nem sempre pressupõe que se tenha dados reais, a intuição ou o bom senso pode guiar as formulações dos modelos.

Do ponto de vista educacional o melhor modelo é secundário, pois sempre se pode fazer um melhor do que o anterior e sempre se pode imaginar situações diferentes para o mesmo fenômeno (Bassanezi e Pompeu, 2005).

Neste trabalho mostramos que é possível utilizar uma **SBRF** para modelar o comportamento da densidade populacional de uma espécie quando se quer levar em conta a difusão dos indivíduos.

Agradecimentos

Neste espaço, gostaria de agradecer ao professor Moiseis Cecconello pela valiosa ajuda que me foi dispensada pelo uso do MATLAB®.

Referências

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2010). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 de *Coleção Textos Didáticos*. IMECC–UNICAMP.

Bassanezi, R. C. e Pompeu, G. (2005). Um estudo de modelagens alternativas: Podridão da maçã. *Revista Biomatemática - IMECC/UNICAMP*, 15:97–118.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8:338–353.