Biomatemática ***20*** *(2010), 25–36* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Equação Diferencial Fuzzy com Parâmetros Interativos

Valtemir Cabral[1],
DM, ICE–UFAM, 69.000-000, Manaus/AM.
Laecio C. Barros[2],
DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo. Neste artigo estudamos as equações diferencial fuzzy com parâmetros e condições iniciais interativas. A interatividade é dada pelo conceito de números fuzzy completamente correlacionados (Carlsson et al., 2004). Nós consideramos o problema por dois caminhos diferentes: o primeiro usa uma familia de inclusões diferenciais (Aubin e Cellina, 1984; Hullermeier, 1997; Diamond, 2001) e o segundo usa o princípio de extensão, para solucionar a equação diferencial fuzzy. Concluímos que as soluções obtidas pelos dois caminhos são idênticas. Nós também apresentamos um princípio de extensão para Números Fuzzy Completamente Correlacionados e mostramos que o Teorema de Nguyen (Nguyen, 1978) permanece válido neste ambiente.

Palavras-chave: *Números Fuzzy Completamente Correlacionados; Princípio de Extensão; Inclusão Diferencial Fuzzy; Equação Diferencial Fuzzy.*

1. Introdução

Vamos iniciar considerando o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), w) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

com $x_0, w \in \mathbb{R}$ e f é uma função contínua.

Fazendo a mudança de variável $y = (x, w)$, o problema de valor inicial (1.1) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} y'(t) &= F(y(t)) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

[1]valtemircabral@yahoo.com.br
[2]laeciocb@ime.unicamp.br

Supondo que x_0 e w são incertos e modelados por números fuzzy completamente correlacionados X_0 e W, y_0 pode ser modelado pela distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W. Portanto, é possível relacionar o problema determinístico (1.2) com o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(t_0) & \in & C. \end{cases} \tag{1.3}$$

A equação diferencial fuzzy (1.3) será abordada de duas formas diferentes. A primeira abordagem foi sugerida por (Hullermeier, 1997) na qual a solução é dada pela seguinte familia de inclusões diferenciais:

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(t_0) & \in & [C]^\alpha. \end{cases} \tag{1.4}$$

com $[C]^\alpha$ o α-nível do subconjunto fuzzy C.

A segunda abordagem é obtida por meio da aplicação do princípio de extensão da solução determinística do problema (1.2) como feito em (Mizukoshi et al., 2007; Oberguggenberger e Pittschmann, 1999). Em (Mizukoshi et al., 2007), o estudo é feito para o caso em que a distribuição de possibilidade conjunta C é dada pelo mínimo entre dois números fuzzy, isto é, os números fuzzy são não interativos.

Na seção 2, definimos o princípio de extensão para números fuzzy completamente correlacionados e mostramos que o teorema de Nguyen (Nguyen, 1978) permanece válido.

Na seção 3, mostramos que a solução de (1.3) pode ser obtida através do princípio de extensão similarmente a Mizukoshi et al. (2007) e Oberguggenberger e Pittschmann (1999). Nós concluímos que esta solução coincide com a solução obtida pelo uso da abordagem de Hullermeier, via inclusão diferencial.

Para exemplificar, aplicamos os métodos estudados para obter a solução do modelo malthusiano com taxa de crescimento intrínseco fuzzy e condição inicial fuzzy.

2. Conceitos Básicos

A familia de todos os conjuntos compactos e não vazios de $\mathbb{R}^n$ será denotada por $\mathcal{K}^n$. Para $A, B \in \mathcal{K}^n$ and $\lambda \in \mathbb{R}$ as operações de adição e multiplicação por escalar são definidas por:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \text{ e } \lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Um subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}$ é dado por sua função de pertinência

$$\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

Os α-níveis do subconjunto fuzzy A são definidos por:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{_A}(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Se $\alpha = 0$, $[A]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu_{_A}(x) > 0\}}$ (o fecho do suporte de A).

O subconjunto fuzzy A é um número fuzzy se todos os seus α-níveis são intervalos fechados e não vazios de $\mathbb{R}$ e o suporte de A

$$supp(A) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{_A}(x) > 0\}$$

é limitado.

A familia de todos os números fuzzy será denotada por $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Definição 2.1. Uma distribuição de possibilidade em $\mathbb{R}^2$ é um subconjunto fuzzy C de $\mathbb{R}^2$ com função de pertinência $\mu_{_C} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$ satisfazendo $\mu_{_C}(x_0) = 1$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

A familia das distribuições de possibilidade de $\mathbb{R}^2$ será denotada por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$.

Definição 2.2. Sejam $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy, então $C \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ é chamada uma distribuição de possibilidade conjunta se

$$\max_y \mu_c(x, y) = \mu_{_A}(x), \quad \max_x \mu_c(x, y) = \mu_{_B}(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Além disso, A e B são chamadas distribuições marginais de C.

Para uma distribuição de possibilidade conjunta C de $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, vale a relação

$$\mu_{_C}(x, y) \leq min\{\mu_{_A}(x), \mu_{_B}(y)\}.$$

Definição 2.3. Os números fuzzy A e B são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta C for dada por

$$\mu_{_C}(x, y) = min\{\mu_{_{A_1}}(x), \mu_{_{A_2}}(x)\}$$

ou equivalentemente,

$$[C]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha,$$

para todo par $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 2.4. Os números fuzzy A e B são ditos interativos se suas funções de pertinências $\mu_{_A}$ e $\mu_{_B}$ não tomam valores independentes uma da outra, isto é, qualquer mudança na função de pertinência $\mu_{_A}$ (respectivamente $\mu_{_B}$) interfere na função de pertinência de $\mu_{_B}$ (respectivamente $\mu_{_A}$).

Observação 2.1: Para o caso em que a distribuição de possibilidade conjunta C é definida a partir de uma t-norma, isto é,

$$\mu_{_C}(x, y) = T(\mu_{_A}(x), \mu_{_B}(y)),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dubois e Prade (Dubois e Prade, 181) definem os números fuzzy A e B como fracamente interativos segundo a t-norma T.

Abaixo apresentamos uma importante classe de números fuzzy interativos chamada completamente correlacionados (Carlsson et al., 2004). Este conceito aparece em estudos feitos em Ahmad e Baets (2009) e Baetens e Baets (2009).

Definição 2.5. Dois números fuzzy A e B são ditos completamente correlacionados, se existem $q, r \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$, tais que sua distribuição de possibilidade conjunta é dada por

$$\begin{aligned} \mu_C(x, y) &= \mu_A(x).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) \\ &= \mu_B(y).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde

$$\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad qx + r = y \\ 0 & \text{se} \quad qx + r \neq y \end{cases}$$

é a função característica da reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : qx + r = y\}$.

Neste caso temos:

$$[C]^\alpha = \{(x, qx + r) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 - s)a_1^\alpha + sa_2^\alpha, s \in [0, 1]\}$$

onde $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$; $[B]^\alpha = q[A]^\alpha + r$, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$, e

$$\mu_B(x) = \mu_A(\tfrac{x-r}{q}),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Seguindo as idéias de Carlsson et al. (2004), nós formulamos o seguinte princípio de extensão para números fuzzy completamente correlacionados.

Definição 2.6. Seja C uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições de possibilidades marginais A e B, e seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Se A e B são números fuzzy completamente correlacionados, então a extensão de f aplicada a (A, B) é o conjunto fuzzy $f_C(A, B)$ cuja função de pertinência é definida por

$$\mu_{f_C(A,B)}(u, v) = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y) \in f^{-1}(u,v)} \mu_c(x, y), & \text{se} \quad f^{-1}(u, v) \neq \emptyset \\ \\ 0 \qquad\qquad , & \text{se} \quad f^{-1}(u, v) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $f^{-1}(u, v) = \{(x, y) : f(x, y) = (u, v)\}$.

A seguir apresentamos o teorema 2.1, o qual pode ser interpretado como um generalização do teorema de Nguyen (Nguyen, 1978).

Teorema 2.1. *Sejam $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy completamente correlacionados, seja C sua distribuição de possibilidade conjunta, e seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função continua. Então,*

$$[f_C(A,B)]^\alpha = f([C]^\alpha).$$

Prova 1. *Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função continua $g(x) = f(x, qx + r)$.*

Vamos dividir a prova em dois casos $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$.

1) Para $\alpha > 0$.

Seja $(u, v) \in f([C]^\alpha)$, então existe $(x_0, y_0) \in [C]^\alpha$, com $\mu_C(x_0, y_0) \geq \alpha$ e $(u, v) = f(x_0, y_0)$. Daí,

$$\mu_{f_C(A,B)}(u,v) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_C(x,y) \geq \mu_C(x_0,y_0) \geq \alpha,$$

isto é,

$$(u,v) \in [f_C(A,B)]^\alpha.$$

Reciprocamente, seja $(u, v) \in [f_C(A, B)]^\alpha$, então

$$\mu_{f_C(A,B)}(u,v) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_C(x,y) \geq \alpha,$$

de forma que $f^{-1}(u, v) \neq \emptyset$.

Agora,

$$\begin{aligned}
\mu_{f_C(A,B)}(u,v) &= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_C(x,y) \\
&= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_A(x).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) \\
&= \sup_{(x,xq+r)\in f^{-1}(u,v)} \mu_A(x).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,xq+r) \\
&= \sup_{x\in g^{-1}(u,v)} \mu_A(x) \\
&= \sup_{x\in [A]^0\cap g^{-1}(u,v)} \mu_A(x) \\
&= \mu_A(x_1) \geq \alpha,
\end{aligned}$$

para algum $x_1 \in [A]^0 \cap g^{-1}(u, v)$ uma vez que μ_A é semicontínua superiormente e $[A]^0 \cap g^{-1}(u, v)$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}$. Daí, $(u, v) \in f([C]^\alpha)$.

2) Para $\alpha = 0$.

Considere $U = \{(u, v) : \mu_{f_C(A,B)}(u, v) > 0\}$ e $V = \{(u, v) : \mu_C(u, v) > 0\}$.

Vamos mostrar que $\overline{U} = f(\overline{V})$, *onde* $\overline{U} = fecho(U)$.

Seja $(u,v) \in U$, *então* $\mu_{f_C(A,B)}(u,v) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_C(x,y) > 0$. *Consequentemente, existe* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *com* $f(a,b) = (u,v)$ *e* $\mu_C(u,v) > 0$, *daí*

$$(u,v) \in f(V).$$

Assim,

$$\overline{U} \subset \overline{f(V)} \subset \overline{f(\overline{V})} = f(\overline{V}),$$

pelo fato que $\overline{V}$ *é compacto e* f *é contínua.*

Por outro lado, seja $(u,v) \in f(V)$. *Então existe* $(a,b) \in V$ *tal que* $f(a,b) = (u,v)$ *e* $\mu_C(a,b) > 0$.

Porém,

$$\sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_C(x,y) \geq \mu_C(a,b) > 0,$$

por conseguinte $(u,v) \in U$.

Assim,

$$f(\overline{V}) \subset \overline{f(V)} \subset \overline{U},$$

pois f *é contínua.* $\square$

2.1. Inclusão Diferencial

Considere a seguinte inclusão diferencial,

$$\begin{cases} x'(t) & \in & F(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 & \in & X_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $F : [t_0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{K}^n$ é uma multifunção e $X_0 \in \mathcal{K}^n$.

Uma função $x(.,x_0)$, com $x_0 \in X_0$, é uma solução de (2.6) no intervalo $[t_0,T]$ se é absolutamente contínua e satisfaz (2.6) para todo $t \in [t_0,T]$. O conjunto atingível no tempo $t \in [t_0,T]$, associado ao problema (2.6), é o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathcal{A}_t(X_0) = \{x(t,x_0) : x(.,x_0) \text{ é solução de (2.6) }\}.$$

Uma generalização do problema (2.6), para modelar sistemas dinâmicos fuzzy, é obtido substituindo o conjunto $F(t,x)$ em (2.6) por um fuzzy, ou seja, podemos considerar o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} x'(t) & \in & \widetilde{F}(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 & \in & \widetilde{X}_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $\widetilde{F} : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é uma multifunção fuzzy e $\widetilde{X}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

De acordo com Hullermeier (1997), o problema (2.7) é interpretado como a família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) & \in & [\widetilde{F}(t, x(t))]^\alpha \\ x(t_0) = x_0 & \in & [\widetilde{X}_0]^\alpha, \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $[\widetilde{F}(t, x(t))]^\alpha$ são os α-níveis de um subconjunto fuzzy $\widetilde{F}(t, x(t))$.

Para simplificar a notação, vamos denotar por X_0 o subconjunto fuzzy da condição inicial.

Para cada $\alpha \in [0, 1]$, dizemos que $x : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, é uma α-solução de (2.7) se é uma solução de (2.8).

O conjunto atingível das α-soluções será denotada por $\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) := \mathcal{A}_t^\alpha$, $t_0 \leq t \leq T$, isto é,

$$\mathcal{A}_t^\alpha = \mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = \{x(t, x_0) : x(., x_0) \text{ é solução de } (2.8)\}.$$

$\mathcal{A}_t^\alpha$ são os α-níveis de um subconjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(X_0) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t_0 \leq t \leq T$ (para mais detalhes, (ver: Diamond, 1999)). O subconjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(X_0)$ é dito o conjunto atingível do problema (2.6).

3. Equações Diferenciais com Coeficiente Fuzzy e Condição Inicial Fuzzy

Nesta seção estudamos as equações diferenciais fuzzy que possuem coeficientes e condição inicial incertas, essas incertezas são modeladas por números fuzzy completamente correlacionados. As equações diferenciais fuzzy são obtidas a partir de uma equação determinística pela introdução de incertezas nos coeficientes e na condição inicial. Mizukoshi et al. (2007) estudaram este problema supondo que os coeficientes e a condição inicial são dados por números fuzzy não interativos.

Iniciamos considerando o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(x(t), w) \\ x(t_0) & = & x_0, \end{cases} \tag{3.9}$$

onde f é contínua e $x_0, w \in \mathbb{R}$.

Fazendo a mudança de variável $y = (x, w)$, o problema de valor inicial (3.9) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0, \end{cases} \tag{3.10}$$

onde $y'(t) = (x'(t), 0)$, $F(y(t)) = (f(x(t), w), 0)$ e $y_0 = (x_0, w)$.

Suponha que x_0 e w são incertos e modelados pelos números fuzzy completamente correlacionados X_0 and W. O problema (3.10) transforma-se em

$$\begin{cases} \quad y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(t_0) = (x_0, w) & \in & C, \end{cases} \tag{3.11}$$

onde C é a distribuição de possibilidade dos números fuzzy completamente correlacionados X_0 e W.

3.1. Solução via princípio de extensão

Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$ tal que existe uma solução $y(., y_0)$ de (3.10) com $y_0 \in U$ no intervalo $[t_0, T]$, e para todo $t \in [t_0, T]$, $y(t, .)$ seja contínua em U. Então, podemos definir o operador

$$L_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

por $L_t(y_0) = y(t, y_0)$, que é a única solução de (3.10) e é contínua com relação a y_0.

A solução do problema (3.11), via principio de extensão, é o operador $(L_t)_C$, este operador é obtido pela aplicação do princípio de extensão (definição 2.6) no operador L_t.

3.2. Solução via inclusão diferencial

O problema (3.11), de acordo com a interpretação de Hullermeier (1997), pode ser escrito como uma familia de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t)) \\ y(t_0) & \in & [C]^\alpha. \end{cases} \tag{3.12}$$

Segundo Diamond (1999), a conjunto atingível $\mathcal{A}_t^\alpha = \mathcal{A}_t([C]^\alpha)$ são os α-níveis de um subconjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(C)$, onde $\mathcal{A}_t(C) \subset \mathbb{R}^2$, para cada $\alpha \in [0, 1]$ e cada $t \in [t_0, T]$.

Neste ponto podemos estabelecer seguinte teorema

Teorema 2: Seja U um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^2$ e C a distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy completamente correlacionados X_0 e W. Suponha que F seja contínua, que para cada $y_0 = (x_0, w) \in U$ existe uma única solução $y(\cdot,\, y_0)$ do problema (3.10) e que $y(t,\, \cdot)$ seja contínua em U. Então, para todo $t \in [t_0,\, T]$ vale a igualdade

$$(L_t)_C(X_0, W) = \mathcal{A}_t(C).$$

Em outras palavras, a solução via inclusão diferencial de (3.11) e a solução via princípio de extensão coincidem.

Prova: Para prova o resultado desejado, basta mostrar que

$$[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha = \mathcal{A}_t([C]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Como por hipótese F é contínua e para cada $y_0 = (x_0, w) \in U$ existe uma única solução para o problema (3.10) no intervalo $[t_0, T]$. Então, para cada $t \in [t_0, T]$, o operador $L_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $L_t(y_0) = y(t, y_0)$ é a única solução do problema (3.10) e é contínuo com relação a $y_0 = (x_0, w)$. Daí, o operador $(L_t)_C$ é a única solução do problema (3.11), via princípio de extensão e pelo teorema 2.1, temos a igualdade

$$[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha = L_t([C]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Mas, dado $\alpha \in [0, 1]$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([C]^\alpha) &= \{(y(t, y_0) : y(., y_0) \text{ é solução de (3.10) } \} \\ &= \{L_t(y_0) : y_0 = (x_0, w) \in [C]^\alpha\} \\ &= L_t([C]^\alpha). \ \Box \end{aligned}$$

Exemplo 1: Considere o modelo malthusiano

$$\begin{cases} x'(t) &= & wx(t) \\ x(0) &= & x_0, \end{cases} \tag{3.13}$$

onde w é a taxa de intrínseca de crescimento.

O problema (3.13) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= & (wx(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &= & (x_0, w). \end{cases} \tag{3.14}$$

A solução determinística de (3.14) é dada por $L_t(x_0, w) = (x_0 e^{wt}, w)$ a qual é contínua.

Suponha que x_0 e w sejam incertos e modelados pelos números fuzzy completamente correlacionados $X_0 = (2; 3; 4)$ e $W = (-5; -3; -1)$ cuja distribuição de possibilidade conjunta C é

$$\begin{aligned} \mu_C(x, w) &= \mu_{X_0}(x).\mathcal{X}_{\{-2x+3=w\}}(x, y) \qquad (3.15) \\ &= \mu_W(w).\mathcal{X}_{\{-2x+3=y\}}(x, w). \end{aligned}$$

Temos que,

$[X_0]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$, $[W]^\alpha = [2\alpha - 5, 3 - 2\alpha]$ e

$[C]^\alpha = \{(x, -2x + 3) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 - s)(\alpha + 2) + s(4 - \alpha), \quad s \in [0, 1]\}$.

O problema (3.14) é substituído por

$$\begin{cases} (x'(t), 0) & = & (wx(t), 0) \\ (x_0, w) & \in & C. \end{cases} \tag{3.16}$$

O problema (3.16) é interpretado por

$$\begin{cases} (x'(t), 0) & = & (wx(t), 0) \\ (x_0, w) & \in & [C]^\alpha. \end{cases} \tag{3.17}$$

O conjunto atingível de (3.17) é
$\mathcal{A}_t([C]^\alpha) = \{x(t, x_0, w) : x(., x_0, w)$ é solução de $(3.16)\}$

$$= \{(x_0 e^{-2x_0+3}, -2x_0 + 3) : x_0 = (1 - s)(\alpha + 2) + s(4 - \alpha), s \in [0, 1]\}.$$

Por outro lado, $L_t(x_0, w) = (x_0 e^{wt}, w)$ é uma função contínua. Com isto, o operador $(L_t)_C$ é a solução de (3.16) via princípio de extensão e, pelo teorema (1), temos a igualdade

$$[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha = L_t([C]^\alpha) = \{(x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [C]^\alpha\}$$

$$= \{(x_0 e^{-2x_0+3}, -2x_0 + 3) : x_0 = (1 - s)(\alpha + 2) + s(4 - \alpha), s \in [0, 1]\}.$$

Consequentemente, $\mathcal{A}_t(C) = (L_t)_C(X_0, W)$.

4. Conclusão

Neste trabalho fizemos uma revisão sobre números fuzzy completamente correlacionados e apresentamos um princípio de extensão neste ambiente. Relacionamos dois métodos para estudar as equações diferenciais fuzzy com parâmetros completamente correlacionados, O primeiro método usa uma familia de inclusões diferenciais de acordo com a proposta de Hullermeier, e o segundo usa a defuzzificação da solução crisp via princípio de extensão. Mostramos que sob certas condições as soluções obtidas por ambos os métodos são idênticas.

Referências

Ahmad, M. Z. e Baets, B. D. (2009). A predator-prey model with fuzzy initial populations. Proceeding of IFSA-EUSFLAT Conference (CD-ROM), Lisbon, Portugal.

Aubin, J. P. e Cellina, A. (1984). *Differential inclusion.* Springer-Verlag, Berlin.

Baetens, J. M. e Baets, B. D. (2009). Incorporating fuzziness in spatial susceptible-infected epidemic models. Proceeding of IFSA-EUSFLAT Conference (CD-ROM), Lisbon, Portugal.

Carlsson, C., Fullér, R., e Majlender, P. (2004). Additions of completely correlated fuzzy numbers. Proceeding of IEEE international conference on fuzzy Systems, 25-29 July.

Diamond, P. (1999). Time-dependent differential inclusions,cocycle attractors and fuzzy differential equations. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 7:734–740.

Diamond, P. (2001). Brief note on the variation of constants formula for fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*, 129:65–71.

Dubois, D. e Prade, H. (181). Additions of interactive fuzzy numbers. *IEEE Transactions on automatic control*, 4:926–936.

Hullermeier, E. (1997). An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems. *International Journal of Uncertainty, fuzziness knowledge-bases system*, 5:117–137.

Mizukoshi, M. T., Barros, L. C., Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H., e Bassanezi, R. C. (2007). Fuzzy differential equation and the extension principle. *Information Sciences*, 177:3627–3635.

Nguyen, H. T. (1978). A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of mathematical analisys and applications*, 64:369–380.

Oberguggenberger, M. e Pittschmann, S. (1999). Differential equations with fuzzy parameters. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 5:181–202.