Biomatemática ***20*** *(2010), 157–166* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Sistemas dinâmicos fuzzy aplicados a processos difusivos

Jefferson Leite[1],
DMAT, CCN – UFPI, 64.049-550, Teresina/PI.

Rodney C. Bassanezi[2],
CMCC – UFABC, 09.210-170, Santo André/SP.

Resumo. Neste trabalho temos como objetivo principal definir uma solução fuzzy para problemas que envolvam difusão. Para tal, a solução fuzzy da equação de difusão-reação-advecção será definida como a extenção de Zadeh da solução determinística do problema associado. Aspectos importantes como unicidade e estabilidade dessas soluções também são estudadas. Serão apresentados também, uma representação gráfica para esses fluxos fuzzy.

Palavras-chave*: Lógica Fuzzy, Sistemas Dinâmicos Fuzzy, Equações de Disfusão-Reação-Advecção Fuzzy.*

1. Introdução

Em 1965, Lofti Zadeh introduziu o conceito de conjuntos fuzzy (Zadeh, 1965). Após isso, muita pesquisa foi desenvolvida tanto do ponto de vista teórico quanto prático (Barros e Bassanezi, 2006; Nguyen e Walker, 2000). Uma das áreas de grande interesse foi a modelagem de fenômenos incertos por meio de equações diferenciais. Quando a subjetividade é aleatória, a natureza da incerteza pode ser tratada como ferramenta para as equações diferenciais estocásticas, no entanto, os modelos variacionais fuzzy podem contemplar vários tipos de incertezas além das estocásticas.

Dependendo da escolha da variável de estado e/ou dos parâmetros dos modelos temos, respectivamente, fuzzines demográfica quando as variáveis de estado são modeladas por meio de conjuntos fuzzy e/ou fuzzines ambiental quando somente os parâmetros são considerados fuzzy. Nos fenômenos biológicos em geral, ambos os tipos de fuzzines estão presentes (Barros e Bassanezi, 2006).

[1]jleite@ufpi.edu.br
[2]rodney@ufabc.edu.br

As equações variacionais fuzzy têm sido estudadas através de métodos distintos. A primeira tentativa de contemplar subjetividades do tipo não aleatório em sistemas variacionais foi com a derivada de Hukuhara (Kaleva, 1987; Seikkala, 1987), porém esta formulação não é capaz de reproduzir o rico comportamento das equações diferenciais determinísticas tais como periodicidade, estabilidade e bifurcação.

Em 1997, Hullemeier (Hüllermeier, 1997) propôs outra maneira de contemplar a subjetividade não aleatória por meio de inclusões diferenciais. As soluções fuzzy obtidas por essa abordagem são capazes de apresentar periodicidade, estabilidade e bifurcação, no entanto, do ponto de vista técnico, obter soluções por meio de uma família de inclusões diferenciais pode ser extremamente difícil.

Quando as variáveis são incertas, um modo de se ter um tratamento mais adequado para os modelos variacionais é passar toda a incerteza para os parâmetros do modelo matemático. Neste caso, um método alternativo, que é usado, é aquele que consiste em fuzzificar as soluções de um modelo determinístico, usando o princípio da extensão de Zadeh (Mizukoshi et al., 2007).

Nosso objetivo principal, neste trabalho, é explorar propriedades como a unicidade e estabilidade da solução fuzzy de uma equação diferencial fuzzy associada à equação de difusão-advecção com fonte malthusiana, via extensão de Zadeh.

2. Preliminares

Nesta secção apresentaremos os fundamentos básicos necessários para o bom entendimento e aplicação da teoria dos conjuntos fuzzy nas seções seguintes. Para maiores informações, o leitor pode consultar Barros e Bassanezi (2006). Os subconjuntos fuzzy de um espaço X são caracterizados por funções desse espaço no intervalo $[0, 1]$.

Dessa forma, temos

Definição 1 *Seja X um conjunto não vazio. Um subconjunto fuzzy F de X é um subconjunto $\{(x, \mu_F(x)) : x \in X\}$ não vazio de $X \times [0, 1]$ para alguma função $\mu_F : X \to [0, 1]$.*

A função $\mu_F : X \to [0, 1]$ é denominada função de pertinência de F e o valor assumido para cada $x \in X$ é o grau de pertinência de x em F. O conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de um conjunto X será denotado por $\mathcal{F}(X)$.

Segue diretamente dessa difinição, que qualquer subconjunto aleatório de X é também um subconjunto fuzzy de X, uma vez que esse conjunto é bem determinado pela função característica e, portanto, satisfaz a definição acima. De fato, se $F \subset X$ com função característica $\chi_F : X \to [0, 1]$, então o conjunto $\chi_F = \{(x, \chi_F(x)) : x \in X\}$ é um subconjunto de $X \times [0, 1]$ com função de pertinência $\mu_{\chi_F}(x) = \chi_F(x)$ para todo $x \in X$ e,

consequentemente, $\chi_F \in \mathcal{F}(X)$. Para uma melhor distinção, o subconjunto fuzzy χ_F será denominado aqui como conjunto *crisp* de X.

Dado um subconjunto fuzzy F em $\mathcal{F}(X)$ definimos, para cada $\alpha \in (0,1]$, o conjunto $[F]^\alpha \subset X$ como sendo o conjunto dos elementos de X tal que o grau de pertinência em F é ao menos α. O conjunto $[F]^\alpha \subset X$ é denominado *α-nível* de F e, matematicamente, é definido como

$$[F]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } \alpha \in (0,1]$$

O nível zero de um subconjunto fuzzy F é definido por

$$[F]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[F]^\alpha} = \overline{supp(F)}$$

no qual $supp(F)$=$\{x \in X : \mu_F(x) > 0\}$ é o suporte do subconjunto fuzzy F.

Dois conjuntos fuzzy são iguais quando as funções características são iguais, isto é,

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \ \forall x \in X.$$

A igualdade entre conjuntos fuzzy pode ser também caracterizada por meio dos $\alpha-$níveis. Neste caso, os conjuntos são iguais quando os $\alpha-$níveis coincidem para todo $\alpha \in [0,1]$.

Em muitos casos, pode ser necessário estender o domínio de uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ para os conjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$. Notemos que para cada subconjunto $F \subset X$ a aplicação f define o subconjunto $f(F) \subset Y$. Supondo agora que F seja um subconjunto fuzzy X, isto é $F \in \mathcal{F}(X)$, então precisamos determinar como será a imagem induzida da aplicação f sobre F. A forma como essa imagem é caracterizada pode ser feita através do *princípio da extensão* de Zadeh conforme a definição a seguir.

Definição 2 *Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação e F um subconjunto fuzzy de X. A extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ é aplicação cuja imagem tem função de pertinência*

$$\mu_{\hat{f}(F)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{a\in f^{-1}(y)} \mu_F(a) & se\ f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \\ 0 & se\ f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, um subconjunto $F \subset X$ determina o conjunto fuzzy χ_F de X cuja função de pertinência é a função característica de F. A imagem de χ_F através da extensão $\hat{f}$ de uma função f coincide com o conjunto fuzzy $\chi_{f(F)}$ definido por $f(F)$. Isto é, $\hat{f}(\chi_F) = \chi_{f(F)}$. De fato, a definição acima garante que $\hat{f}(\chi_F)$ tem função de

pertinência

$$\mu_{\hat{f}(\chi_F)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in f(F) \\ \\ 0 & \text{se } y \in Y - f(F). \end{cases}$$

que é a função característica de $f(F)$. Logo, $\hat{f}(\chi_F) = \chi_{f(F)}$. Em particular, para todo $x \in X$ vale $\hat{f}(\chi_{\{x\}}) = \chi_{\{f(x)\}}$.

Um tipo particular de conjunto fuzzy que nos será útil é o chamado número fuzzy, que é uma tentativa de generalizar nímeros reais no contexto fuzzy.

Definição 3 *Um conjunto fuzzy $F \subset \mathbb{R}$ é chamado número fuzzy se satisfaz:*

1. *Os $\alpha-$níveis $[F]^\alpha$ são compactos, conexos e não vazios para todo $\alpha \in [0,1]$;*
2. *Existe um único x tal que $\mu_F(x) = 1$.*

Definição 4 *Seja $[u(x,t)]^\alpha$ o α-nível associado a uma função fuzzy $\hat{u}(x,t)$ e $u_1^\alpha(x,t)$, $u_2^\alpha(x,t)$ funções tais que:*

$$[u(x,t)]^\alpha = [u_1^\alpha(x,t), u_2^\alpha(x,t)],$$

então definimos diâmetro de $[u(x,t)]^\alpha$ como sendo

$$diam([u(x,t)]^\alpha) = u_2^0(x,t) - u_1^0(x,t)$$

3. Equação de difusão-reação-advecção fuzzy

A maioria dos fenômenos que envolvem difusão são descritas por modelos que descrevem uma determinada dinâmica em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ e é o que trataremos a seguir. Considere a equação de difusão determinística

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= D\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) &= N_0\delta(x) & \mathbb{R} \times [t=0] \end{cases}$$

onde D é uma constante de difusão, N_0 é o número de indivíduos no instante inicial e $\delta(x)$ é a função de Dirac. Assim, a solução determinística é dada por

$$u(x,t) = \frac{N_0}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Se $\hat{N}_0$ é um número fuzzy, aplicando o princípio da extensão de Zadeh em N_0 temos que o $\alpha-$nível associado a solução fuzzy do problema será dada por

$$[u(x,t)]^\alpha = \frac{[N_0]^\alpha}{\sqrt{(4\pi Dt)}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

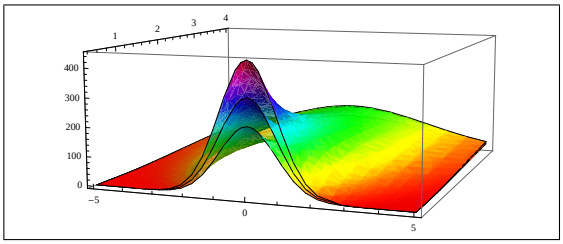

Figura 1: *Gráfico da solução fuzzy envolvendo apenas difusão*

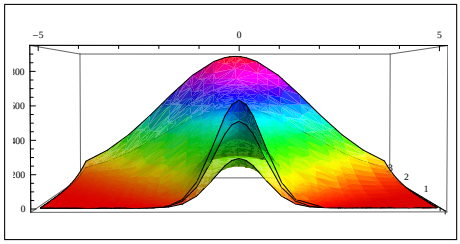

Figura 2: *Gráfico da solução fuzzy envolvendo difusão-reação*

que é representada graficamente pelas figuras 1 e 2.

Podemos provar também que a solução fuzzy é estável utilizando para isso seu diâmetro. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\left(diam\left(\left[\varphi_t\left(N_0\right)\right]^{\alpha}\right)\right) &= \lim_{t\to\infty}\left(N_{01}^{\alpha}-N_{02}^{\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} &= \\
&= \left(N_{01}^{\alpha}-N_{02}^{\alpha}\right)\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} &= \\
&= diam\left(\left[N_0\right]^{\alpha}\right)\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} &= 0
\end{aligned}$$

Assim, quando $t \to \infty$ temos que a solução fuzzy converge para a determinística. Similarmente podemos provar que quando $x \to \pm\infty$ a convergência da solução fuzzy para a determinística também é garantida.

Sabemos a respeito da literatura que um modelo regido apenas por difusão é ineficiente para intervalos de tempos maiores, sendo eficaz apenas no início do processo, assim podemos incluir em nosso modelo os processos de reação e advecção. De fato, seja o modelo unidimensional de reação-difusão-advecção com condição inicial fuzzy

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t}\left(x,t\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(x,t\right)+a\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,t\right)+bu\left(x,t\right) & x\in\mathbb{R},\ t\geq 0 \\
u\left(x,0\right) \in \hat{N}_0\delta\left(x\right) & \mathbb{R}\times\left[t=0\right]
\end{cases}$$

onde N_0 é o número de indivíduos existentes no início do processo $t = 0$, assim temos que a solução determinística é dada por

$$u\left(x,t\right) = \frac{N_0}{\sqrt{\left(4\pi Dt\right)}}e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt}+bt}$$

que usando extensão de Zadec no fluxo determinístico nos dá

$$\left[u\left(x,t\right)\right]^{\alpha} = \frac{\left[N_0\right]^{\alpha}}{\sqrt{\left(4\pi Dt\right)}}e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt}+bt}$$

Dessa forma, se calcularmos o diâmetro dessa solução fuzzy temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\left(diam\left(\left[\varphi_t\left(N_0\right)\right]^{\alpha}\right)\right) &= \lim_{t\to 0}\left(N_{01}^{\alpha}-N_{02}^{\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt}+bt} &&= \\
&= \left(N_{01}^{\alpha}-N_{02}^{\alpha}\right)\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt}+bt} &&= \\
&= diam\left(\left[N_0\right]^{\alpha}\right)\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(x-at)^2}{4Dt}+bt} &&= \pm\infty
\end{aligned}$$

Apesar do diâmetro dessa solução não convergir para 0 temos propriedades importantes sobre essa solução que é o fato de que quando nos afastamos da origem para um t fixo, teremos a solução fuzzy convergindo para a determinística. Uma maneira de minimizar essa problema seria utilizando o modelo logístico ao invés do malthusiano para descrever a reprodução, fato que será explorado em trabalhos futuros. A figura abaixo representa uma solução fuzzy para um problema de reação-difusão-advcecção.

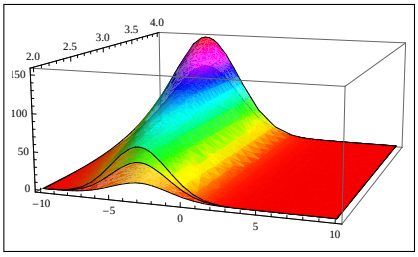

Figura 3: *Gráfico da solução fuzzy envolvendo difusão-reação-advecção para* $a < 0$

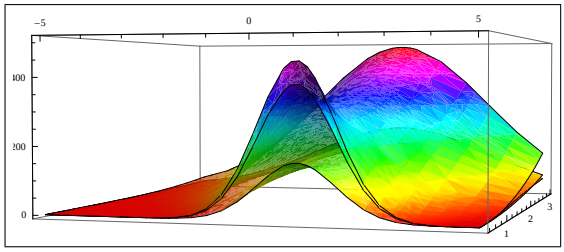

Figura 4: *Gráfico da solução fuzzy envolvendo difusão-reação-advecção para* $a > 0$

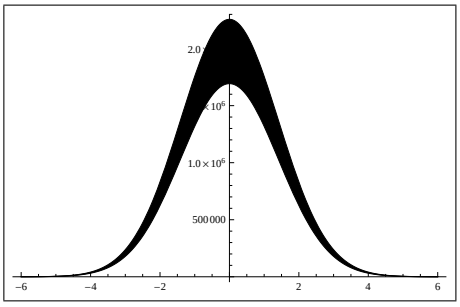

Figura 5: *Gráfico da solução fuzzy unidimensional para* $t = t^*$ *envolvendo difusão-reação*

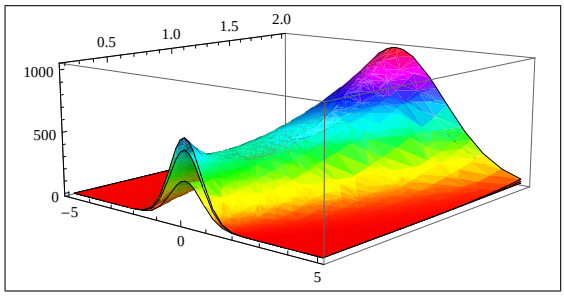

Figura 6: *Gráfico da solução fuzzy envolvendo equação de difusão-reação-advecção fuzzy para* $a > 0$

No caso bidimensional, temos o mesmo comportamento encontrado nas unidimensionais. É claro, que existe uma impossibilidade de plotarmos os gráficos referentes a solução fuzzy bidimensional, mas podemos plotar o gráfico da distribuição espacial para valores de t fixo, para fazer um estudo mais detalhado dessas soluções. De fato, temos que os α-níveis da solução bidimensional fuzzy para o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= D\Delta u(x,t) + a\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + bu(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0 \\ u(x,0) &= N_0\delta(x) \end{cases}$$

é dado por

$$[u(x,t)]^{\alpha} = \frac{[N_0]^{\alpha}}{4\pi Dt} e^{\frac{-\left((x_1-a)^2+x_2^2\right)}{4Dt} - bt}$$

onde $x = (x_1, x_2)$. Assim, podemos olhar para "alguns cortes" no gráfico do fluxo fuzzy bidimensional que nos dão uma idéia da distribuição populacional fuzzy, ou seja, conservando a incerteza da condição inicial.

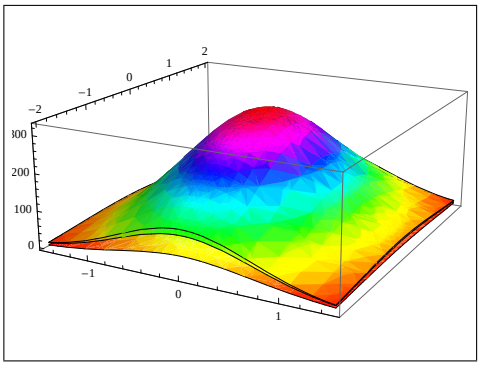

Figura 7: *Gráfico da solução fuzzy bidimensional para $t = 1$ envolvendo difusão-reação-advecção para $a < 0$*

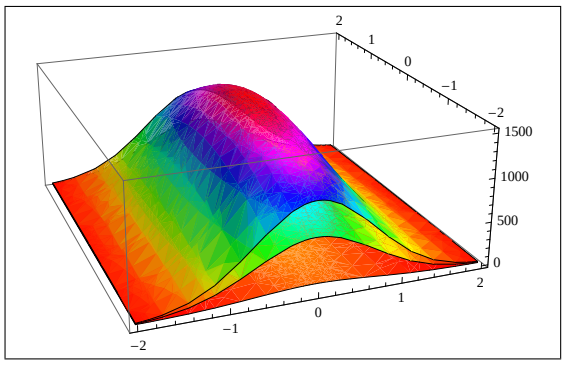

Figura 8: *Gráfico da solução fuzzy da equação de difusão bidimensional para $t = 3$ envolvendo difusão-reaçâo-advecção para $a > 0$*

4. Estabilidade e unicidade da equação de difusão fuzzy

Considere o problema de valor inicial determinado pela equação

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= f(u(x,t)), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0 \\ u(x,0) &= g(x) \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $u : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções reais, com $U \subset \mathbb{R}^n$. Neste caso, consideremos primeiramente $f(u(x,t)) = \Delta u(x,t)$, o que caracteriza nossa equação como de difusão.

Em termos de modelos que simulem a realidade, queremos interpretar o problema acima da seguinte maneira: temos o conheciemnto da lei que rege o crescimento de uma certa variável, através da equação diferencial parcial de difusão, mas a condição inicial não é bem determinada, podendo ser conhecida só parcialmente, carregando consigo um grau de incerteza. Apesar da lei ser determinística, a solução deve carregar as incertezas da condição inicial ao longo do tempo. Assim, consideremos o problema com condição inicial incerta, associado ao modelo determinístico dado em 4.1:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \Delta(u(x,t)) & x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0 \\ u(x,0) & \in & \hat{g}(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $\hat{g}(x)$ é um número fuzzy.

Sabemos que quando a função $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, então a solução para o problema determinístico existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$ e é unica para valores de x em domínios limitados $U \subset \mathbb{R}^n$. Assim, primeiramente, temos a solução determinística dada por

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4Dt}} g(y)\, dy \tag{4.3}$$

Dessa forma, a solução do problema é uma função contínua em x. Após, definimos a extensão de Zadeh da solução $\varphi_t(g(x))$ como a extensão de Zadeh da função $g(x) \to \varphi_t(g(x)) \to \varphi(t, g(x))$. Tal solução será denotada por $\hat{\varphi}_t(g(x))$, e escrevemos

$$\hat{\varphi}_t(x) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4Dt}} \hat{g}(y)\, dy \tag{4.4}$$

e seus $\alpha-$níveis são dados por

$$[\varphi_t(g(x))]^\alpha = \left[\frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4Dt}} g_1^\alpha(y)\, dy, \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4Dt}} g_2^\alpha(y)\, dy \right]$$

Uma maneira de estudarmos o comportamento do fluxo fuzzy $n-$dimensional para a equação de difusão é utilizar o conceito de diâmetro de um $\alpha-$nível de um número fuzzy, para tal, provaremos a seguinte proposição:

Proposição 1 *Seja $\hat{\varphi}_t(g(x))$ um fluxo fuzzy dado por 4.4 e $[\varphi_t(g(x))]^\alpha$ seu $\alpha-$nível. Então,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(diam\left([\varphi_t(g(x)]^\alpha)\right)\right) \leq \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(diam\left([g(y))^\alpha\right)\right) dy,\ t > 0$$

Em particular, $\lim_{t \to \infty} diam\left([\varphi_t(g(x)]^\alpha)\right) = 0$, isto é, $diam\left([\varphi_t(g(x)]^\alpha)\right)$ converge uniformemente para zero, quando $t \to \infty$.

Prova:

Como $diam\left(\left[g\left(y\right)\right]^{\alpha}\right) = g_2^{\alpha}\left(x\right) - g_1^{\alpha}\left(x\right) > 0$, então, podemos chamar $f\left(x\right) = g_2\left(x\right) - g_1\left(x\right)$. Assim, teremos que provar que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} diam\left(\left[\varphi_t\left(g\left(x\right)\right)\right]\right) \leq \frac{1}{\left(4\pi Dt\right)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f\left(y\right)dy,\ t > 0$$

que é verdade no caso determinístico para $diam\left(\left[\varphi_t\left(g\left(x\right)\right)\right]^{\alpha}\right) = \varphi_t^2\left(g\left(x\right)\right) - \varphi_t^1\left(g\left(x\right)\right)$. Assim, segue o resultado.

■

Dessa forma, temos que nossa solução se comporta como a determinística para $t \to \infty$. Agora, vejamos o seguinte teorema de unicidade:

Teorema 1 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ uma região limitada, assim se um problema de condição inicial fuzzy for dado por*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,t\right) & = & \Delta u\left(x,t\right) + f\left(x\right), & x \in U \subset \mathbb{R}^n,\ t \geq 0 \\ u\left(x,0\right) & \in & \hat{g}\left(x\right) & U \times \left[t=0\right] \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $g(x) \in C(U \times [t=0])$ e $f(x) \in C(U \times (0,\infty])$, então o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t(g(x))$ associado ao problema 4.3 é único para uma condição inicial fuzzy $\hat{g}(x)$ dada.

Prova:

Sejam u e v fluxos fuzzy associados ao problema 4.4, então defina $w = u - v$. Assim, temos que w resolve o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}\left(x,t\right) & = & \Delta w\left(x,t\right) & x \in U \subset \mathbb{R}^n,\ t \geq 0 \\ w\left(x,0\right) & = & 0 & U \times \left[t=0\right] \end{cases} \tag{4.6}$$

que é um problema determinístico e, pelo princípio do máximo, temos que o máximo valor de w é assumido na fronteira, logo $w = 0$, assim $u = v$.

■

Temos agora uma ferramenta importante no estudo de incertezas, que envolve a equação de difusão, pois sabemos que limitando nosso domínio convenientemente teremos solução única para problemas que envolvam difusão. Além disso, a estabilidade dessa solução está garantida e funciona como na determinística, conservando o seu grau de incerteza.

5. Conclusões

O estudo das equações diferenciais parciais de difusão fuzzy nos trazem um método alternativo de tratarmos a modelagem de processos difusivos onde temos parâmetros e/ou condições iniciais incertas. Nos casos de modelos que simulem a realidade, temos uma imprecisão em praticamente todos os parâmetros. Nosso trabalho traz uma alternativa para o tratamento de um desses parâmetros, fazendo para isso, a condição inicial fuzzy e definindo condições para que a solução fuzzy seja única, além de garantir que essas soluções são estáveis. Esperamos que trabalhos futuros sejam feitos no sentido de melhorar essa teoria, ainda pequena, das equações de difusão fuzzy.

Referências

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 de *Coleção Textos Didáticos*. IMECC–UNICAMP.

Hüllermeier, E. (1997). An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical systems. *International Journal of Uncertainty, fuzziness knowledge-bases system*, 5:117–137.

Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:301–317.

Mizukoshi, M. T., Barros, L. C., Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H., e Bassanezi, R. C. (2007). Fuzzy differential equation and the extension principle. *Information Sciences*, 177:3627–3635.

Nguyen, H. T. e Walker, E. A. (2000). *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:319–330.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8:338–353.