Biomatemática ***20*** *(2010), 103–116* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Modelo *fuzzy* para a chance de sucesso na quitação de um empréstimo

Geraldo L. Diniz[1], Ronaldo Baumgartner[2],
DMAT, ICET – UFMT, 78.060-900, Cuiabá/MT.

Resumo. Para que um agente financeiro tome a decisão de emprestar uma determinada quantia a uma pessoa física, o principal questionamento é: Qual a probabilidade para o sucesso da quitação do empréstimo? Fazendo uma análise superficial do candidato ao empréstimo, com relação à sua renda mensal, o comprometimento desta renda com os gastos mensais (entrevista com o gerente) e o quanto a prestação irá comprometer a renda (disponível). Neste artigo, é proposto um modelo, através do uso dos conjuntos *fuzzy* e da lógica *fuzzy*, para um controlador *fuzzy* que permita avaliar a possibilidade de sucesso para a quitação do empréstimo.

Palavras-chave: *Sucesso em empréstimo; Lógica fuzzy; Controlador fuzzy; Tomada de decisão.*

1. Introdução

Na esfera dos empréstimos pessoais de pequena monta para pessoas físicas, tem-se a preocupação com a inadimplência, cujo objetivo é minimizar os riscos da concessão, através de uma avaliação do 'perfil' do cliente. Ter perfil para um determinado tipo de empréstimo, não é uma "variável" muito simples de se definir. Como diz Nguyen e Walker (1997), existem situações que se torna muito difícil dizer 'é' ou 'não é', 'sim' ou 'não', 'pertence' ou 'não pertence', etc. Nestas situações, é possível e, geralmente é feito, 'forçar' um 'sim' ou 'não'. Neste sentido, o problema apresenta imprecisões que devem ser incorporadas no modelo para o controlador de tomada de decisão a ser desenvolvido (Chang e Zadeh, 1972).

Nos conjuntos *fuzzy*, situações como esta são tratadas com a imprecisão natural que lhe é inerente, i.é., se pode dizer que todas as pessoas pertencem a um determinado conjunto, com maior ou menor pertinência, ou seja, com maior ou menor grau de pertinência.

[1]geraldo@cpd.ufmt.br
[2]ronaldobaumgartner@gmail.com

O controlador *fuzzy* que será construído a seguir, não tem a pretenção de modelar uma situação real de empréstimo bancário ou de qualquer outra natureza, uma vez que não se utilizou de um especialista na construção da base de regras. O intuito é mostrar a facilidade com que esta ferramenta pode ser utilizada no tratamento de sistemas desta natureza.

Situações como a concessão de um empréstimo bancário, podem ser muito subjetivas, pois o especialista da área de empréstimos deve ter bastante experiência a respeito de classificar o cliente, quanto ao sucesso ou insucesso da quitação de um empréstimo. Entretanto, quando se faz necessária uma modelagem matemática para esta tomada de decisão, o especialista se sente, normalmente, inabilitado para tal, pois via de regra, as ferramentas disponíves para a representação, através de modelos matemáticos para este tipo de problema, passa por processos matemáticos não triviais.

Desta forma, através do uso dos conjuntos *fuzzy*, especialistas em outras áreas do conhecimento, podem resolver ou modelar problemas do cotidiano, em suas áreas de conhecimento, de maneira mais eficiente, conseguindo respostas para as tomadas de decisão (Chang e Zadeh, 1972; Kandel e Byatt, 1980).

A figura 1 (ver página 104) mostra o escopo do sistema de apoio à tomada de decisão proposto neste artigo.

Figura 1: Escopo do sistema de apoio à tomada de decisão

2. Objetivo

– Construir um sistema de apoio a tomada de decisão para a concessão (ou não) de um empréstimo, com base em informações imprecisas ou subjetivas.

3. Metodologia

3.1. Conceitos Básicos

Para a construção do controlador *fuzzy* que forneça as respostas para a tomada de decisão do sistema (figura 1) se tem o seguinte projeto:

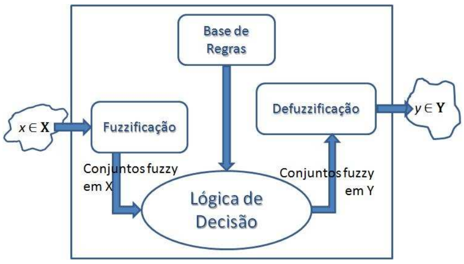


Figura 2: Controlador *fuzzy*

Como se pode observar na figura 2, ao lado, existem quatro processos:

- Fuzzificação
- Base de Regras
- Lógica de Decisão
- Defuzzificação

3.1.1 Fuzzificação

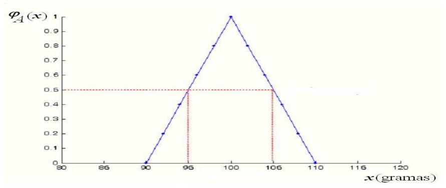
Seja A um subconjunto do universo $\boldsymbol{U}$. A função caracteréstica é definida como sendo

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \\ 0 \text{ se } x \notin A \end{cases}$$

e, desta forma, A fica bem definido, pois $\chi_A(x)$ define a pertinência de x em A e, então, se diz que A é um subconjunto simples ou *'crisp'* de $\boldsymbol{U}$. Assim, se define o subconjunto *crisp* A de $\boldsymbol{U}$ como sendo todos os pares ordenados $(x, \chi_A(x))$ onde $x \in \boldsymbol{U}$ e $\chi_A(x) = 1$.

Para definir um subconjunto *fuzzy* utiliza-se da mesma idéia, apenas a função característica ($\chi_A(x)$) é substituida pela função grau de pertinência $\varphi_A(x)$ que pode ser definida como, por exemplo, o conjunto *fuzzy* que representa "x está em torno de 100 gramas", dado por:

A figura 3 mostra graficamente a função $\varphi_A(x)$ deste exemplo.



$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-90}{10}, & \text{se } 90 \leq x \leq 100 \\ \frac{110-x}{10}, & \text{se } 100 < x \leq 110 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 3: Exemplo de um subconjunto *fuzzy*.

Com isso, se pode observar que todo elemento de $\boldsymbol{U}$ pertence a A com graus de pertinência $\varphi_A(x)$ variando de zero a um e, assim, se tem que $A = \{(x, \varphi_A(x))\,; x \in \boldsymbol{U}\}$, é o subconjunto *fuzzy* A.

A transformação dos elementos $(x, \chi_A(x))$ em $(x, \varphi_A(x))$ é um dos processos que se utiliza na construção do *Controlador Fuzzy*, ao qual se da o nome de **fuzzyficação** (ver figura 2). Se diz, então, que um subconjunto *fuzzy* A, ou simplesmente, um conjunto *fuzzy* A é definido através da função de pertinência $\varphi_A(x) : \boldsymbol{U} \to [0, 1]$, onde $\varphi_A(x)$ representa o grau de pertinência do elemento x de $\boldsymbol{U}$ ao conjunto *fuzzy* A.

Se pode notar que, depois de construído, é possível ir refinando os conjuntos *fuzzy*, de acordo com a necessidade, até que fiquem mais consistentes com a lógica que o sistema necessita.

Com a mesma estratégia, se deve construir os conjuntos *fuzzy* de saída.

3.1.2 Base de Regras

A partir dos conjuntos *fuzzy* de entrada e saída, se constrói a base de regras, na qual está embutida toda a experiência do especialista, com sua visão sobre o sistema (figura 1), os objetivos, as estratégias, as políticas da empresa, etc, através de um conjunto de regras lingüísticas. Essa base de regras proporciona respostas estimadas para controle e tomada de decisão, sem a necessidade de recorrer a modelos matemáticos sofisticados e complexos.

Nesta proposta, será utilizado o método de Mandani[1], que se utiliza dos conectivos lógicos ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$: **negação**, **e**, **ou** e **implicação**, respectivamente), construindo inferências que fazem a conexão lógica entre os conjuntos *fuzzy* de entrada e os de saída (Pedrycz e Gomide, 1998). Assim, as regras que compõem a base de regras do controlador em questão, são definidas na forma apresentada a seguir, a título de ilustração, e que serão apresentadas mais adiante.

[1]Pelas características do conjunto *fuzzy* de saída do controlador *fuzzy* que será desenvolvido, o método de Mandani é o que torna mais simples os procedimentos, para a construção da base de regras, ver Barros e Bassanezi (2006).

– R1 - Se Rendimento é *baixo* **e** Comprometimento de Renda é *baixo* **e** Prestação é *baixa* **então** Risco de Sucesso é *alto*.

– R2 - Se Rendimento é *baixo* **e** Comprometimento de Renda é *baixo* **e** Prestação é *média* **então** Risco de Sucesso é *médio*.

– $\vdots$

– R27 - Se Rendimento é *alto* **e** Comprometimento de Renda é *alto* **e** Prestação é *alta* **então** Risco de Sucesso é *baixo*.

3.1.3 Lógica de Decisão

Utilizando o método de Mandani para a construção da Base de Regras, utiliza-se a idéia do mínimo ($\wedge$) e do máximo ($\vee$), para que se possa inferir as condições de saída. Como será visto na construção do controlador, esse é um processo de pouca complexidade. A seguir, a figura 4 mostra a decisão tomada pelo uso do mínimo ($\wedge$), onde é escolhido para a saída (função Ri) o valor de $\frac{1}{3}$ por ser este o menor valor observado nos conjuntos *fuzzy* de entrada para as variáveis escolhidas na simulação, a saber: . Os valores obtidos $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right)$ nos conjuntos *fuzzy* de entrada, referem-se à simulação de um cliente com renda mensal de R$ 3 500,00; comprometimento de renda de 50% e prestação comprometendo 34% da renda disponível.

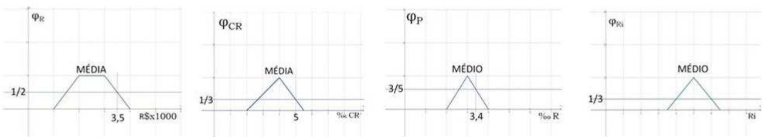


Figura 4: Inferência fuzzy do mínimo $\wedge$.

3.1.4 Defuzzificação

Na figura 4 pode ser observado que o gráfico da extrema direita é o conjunto *fuzzy* de saída que avalia o *risco de sucesso*, e a altura (corte feito pela linha horizontal) escolhida é a altura mínima entre as variáveis de entrada. Assim, se obtém pelo método de Mandani a região mostrada na figura 5 a seguir.

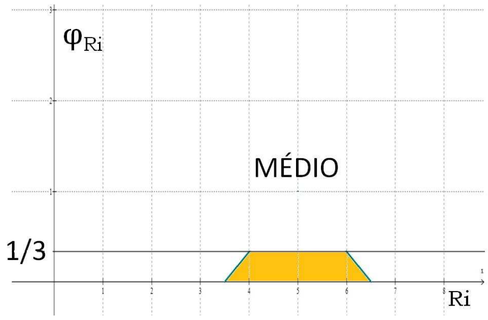


Figura 5: Região utilizada para o processo de defuzzificação

4. Construção do controlador fuzzy

Na construção do controlador *fuzzy* para a análise da chance de sucesso da quitação de um empréstimo, serão utilizadas as variáveis apresentadas a seguir.

4.1. Variáveis de entrada

- Função de pertinência do rendimento mensal(R)

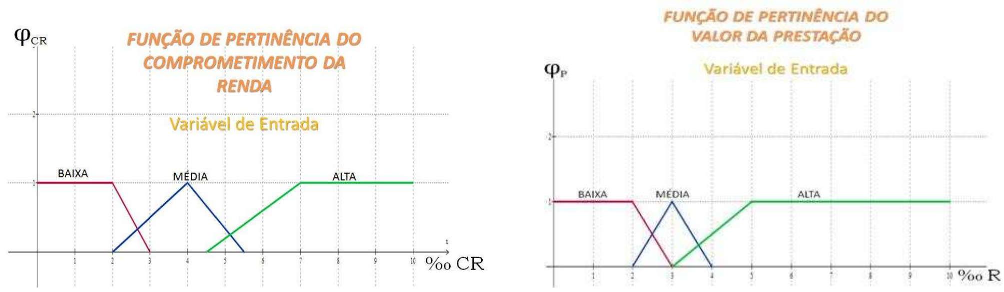
Figura 6: Função de pertinência do rendimento mensal

A construção de uma função de pertinência de um conjunto *fuzzy*, que acaba sendo usada como o próprio conjunto *fuzzy*, pode ser feita como na figura 6. Observe que neste caso, se utilizou de figuras trapezoidais, que foram definidas de forma análoga a $\varphi_A(x)$ da figura 3 na página 106, no qual o conjunto A é denominado R e, para cada trapézio construído, se tem uma $\varphi_R(x)$, sendo a da esquerda denominada φ_R baixa, a do centro φ_R média e a da direita φ_R alta.

Obviamente que a dificuldade de se construir uma função de pertinência não está na definição das funções das retas em cada um de seus domínios restritos, mas sim na *classificação* feita pelo *especialista* na definição dos domínios (intervalos) de cada função.

Observe que na definição desta função de pertinência do Rendimento Mensal (figura 6) o *especialista* poderia ter definido uma classificação diferente para os rendimentos mensais, como por exemplo, considerar um rendimento baixo até R$ 200,00 com grau de pertinência < 1 a partir de R$ 1.000,00 e não de 800,00 como considerado na figura 6.

- Função de Pertinência do Comprometimento da Renda Mensal(CR)
- Função de Pertinência do Comprometimento Mensal da Prestação(P)



(a) Função de Pertinência do Comprometimento da Renda Mensal

(b) Função de Pertinência do Comprometimento Mensal da Prestação

4.2. Variável de Saída

- Função de Pertinência do Risco de Sucesso da Quitação

Figura 7: Função de Pertinência do Risco de Sucesso da Quitação

Observe que a construção do conjunto *fuzzy* de saída 'Risco de Sucesso' contém 5 subconjuntos (mb=muito baixo, b=baixo, m=médio, a=alto e ma=muito alto), mostrando a necessidade de uma senssibilidade maior no conjunto que vai definir, após a defuzzificação, a resposta ao cliente.

A razão pela qual não foi mais detalhado os subconjuntos em cada conjunto *fuzzy* de entrada foi simplesmente para que a base de regras não se tornasse demasiadamente grande para apresentação neste trabalho, pois caso tivesse o detalhe do conjunto *fuzzy* de saída (Risco de Sucesso), teria-se 3^5 regras compondo a base de regras e isso nos traria um escesso de regras a serem consideradas na seção Lógica de Decisão.

4.3. Base de Regras

A regra um (R1) a seguir, deve ser lida da seguinte forma:

Se a Renda é baixa(Rb) e o Comprometimento de Renda é baixo(CRb) e a Prestação compromete a *'sobra'* da renda de forma baixa(Pb), então o Risco de Sucesso da Quitação do Empréstimo é alta(Ria).

R1:Se Rb e CRb e Pb então Ria
R2:Se Rb e CRb e Pm então Rim
R3:Se Rb e CRb e Pa então Rib
R4:Se Rb e CRm e Pb então Rim
R5:Se Rb e CRm e Pm então Rib
R6:Se Rb e CRm e Pa então Rimb
R7:Se Rb e CRa e Pb então Rib
R8:Se Rb e CRa e Pm então Rimb
R9:Se Rb e CRa e Pa então Rimb
R10:Se Rm e CRb e Pb então Ria
R11:Se Rm e CRb e Pm então Ria
R12:Se Rm e CRb e Pa então Rim
R13:Se Rm e CRm e Pb então Ria
R14:Se Rm e CRm e Pm então Rim
R15:Se Rm e CRm e Pa então Rib
R16:Se Rm e CRa e Pb então Rim
R17:Se Rm e CRa e Pm então Rib
R18:Se Rm e CRa e Pa então Rimb
R19:Se Ra e CRb e Pb então Rima
R20:Se Ra e CRb e Pm então Rima
R21:Se Ra e CRb e Pa então Ria

R22:Se Ra e CRm e Pb então Rima
R23:Se Ra e CRm e Pm então Ria
R24:Se Ra e CRm e Pa então Rim
R25:Se Ra e CRa e Pb então Ria
R26:Se Ra e CRa e Pm então Rim
R27:Se Ra e CRa e Pa então Rib

4.4. Lógica de Decisão

Nesta seção será apresentado o exemplo de um candidato com rendimento de R$ 3.500,00 com compromentimento mensal da renda de 50% e prestação compromentendo 35% da sobra mensal.

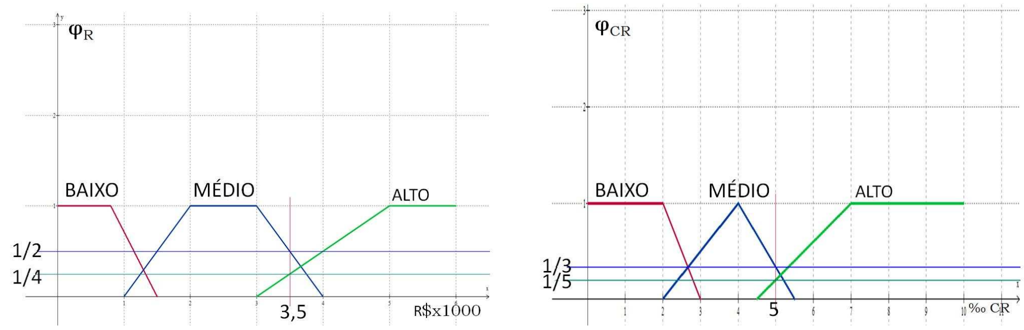
Analisando os valores de entrada em cada uma de suas funções de pertinência, se tem que:

1. Renda de R$ 3.500,00

   Observe que um comprometimento de renda de 50% classifica o cliente como Compr.Renda média(CRm) e $\varphi_{CRm}(x) = \dfrac{1}{3}$ e Compr.Renda alta(CRa) e $\varphi_{CRa}(x) = \dfrac{1}{5}$

2. Comprometimento de Renda de 50%

   Observe que a renda de R$ 3500,00 classifica o cliente como Renda média(Rm) e $\varphi_{Rm}(x) = \dfrac{1}{2}$ e Renda alta(Ra) e $\varphi_{Ra}(x) = \dfrac{1}{4}$



(a) Escolha do Subconjunto do Rendimento e seu grau de Pertinência

(b) Escolha do Subconjunto do Comp. Renda e seu grau de Pertinência

3. Prestação compromentendo 34% da renda disponível.

   Observe que a prestação comprometendo 34% da renda disponível, classifica o cliente como Prest.média(Pm) e $\varphi_{Pm}(x) = \dfrac{3}{5}$ e como Prest.alta(Pa) e $\varphi_{Pa}(x) = \dfrac{1}{5}$

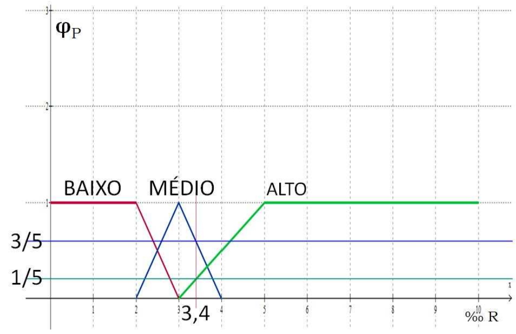


Figura 8: Escolha do Subconjunto da Prestação e seu grau de Pertinência

De posse desses dados, se pode encontrar as regras que se enquadram para este cliente. Fazendo as combinações com os subconjuntos *fuzzy* escolhidos através desta análise, se tem que:
Se Rm e CRm e Pm se pode notar que essa combinação se enquadra na regra R14 e nesta regra a inferência é para o subconjunto *fuzzy* de saída Rim e, assim,
Se Rm e CRm e Pm$\Rightarrow$ R14$\Rightarrow$ Rim
Se Rm e CRm e Pa$\Rightarrow$ R15$\Rightarrow$ Rib
Se Rm e CRa e Pm$\Rightarrow$ R17$\Rightarrow$ Rib
Se Rm e CRa e Pa$\Rightarrow$ R18$\Rightarrow$ Rimb
Se Ra e CRm e Pm$\Rightarrow$ R23$\Rightarrow$ Ria
Se Ra e CRm e Pa$\Rightarrow$ R24$\Rightarrow$ Rim
Se Ra e CRa e Pm$\Rightarrow$ R26$\Rightarrow$ Rim
Se Ra e CRa e Pa$\Rightarrow$ R27$\Rightarrow$ Rib

Lembrando que o método de inferência utilizado é o de Mandani, utiliza-se o mínimo valor das funções de inferência observadas nas figuras 8(a)(página 111), 8(b)(página 111) e 8(página 112) e, assim, se tem que:

$$
\begin{aligned}
R14 &: \min\{\varphi_{Rm}(3,5); \varphi_{CRm}(5); \varphi_{Pm}(3,4)\} \Rightarrow \\
&\quad \min\{1/2; 1/3; 3/5\} = 1/3 \Rightarrow \varphi_{Rim} \\
R15 &: min\{\varphi_{Rm}(3,5); \varphi_{CRm}(5); \varphi_{Pm}(3,4)\} \Rightarrow \\
&\quad min\{1/2; 1/3; 1/5\} = 1/5 \Rightarrow \varphi_{Rim} \\
R17 &: min\{\varphi_{Rm}(3,5); \varphi_{CRm}(5); \varphi_{Pm}(3,4)\} \Rightarrow \\
&\quad min\{1/2; 1/5; 3/5\} = 1/5 \Rightarrow \varphi_{Rib} \\
R18 &: min\{\varphi_{Rm}(3,5); \varphi_{CRm}(5); \varphi_{Pm}(3,4)\} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

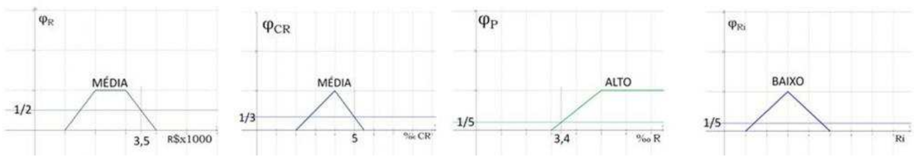


Figura 9: Inferência Fuzzy do Mínimo (t-norma $\wedge$) para a regra 14

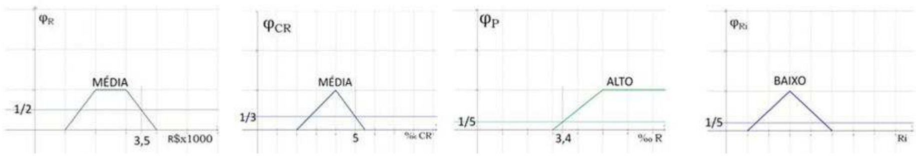


Figura 10: Inferência Fuzzy do Mínimo (t-norma $\wedge$) para a regra 15

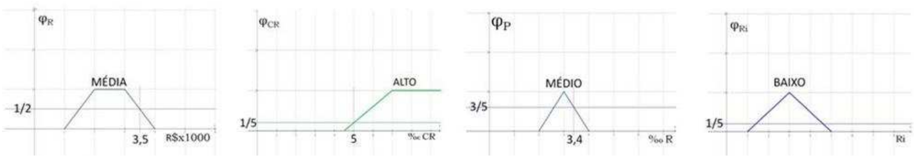


Figura 11: Inferência Fuzzy do Mínimo (t-norma $\wedge$) para a regra 17

$$min\{1/2; 1/5; 1/5\} = 1/5 \Rightarrow \varphi_{Rimb}$$

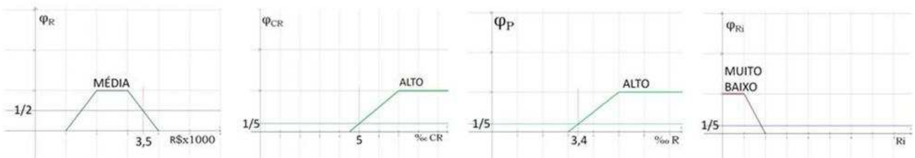


Figura 12: Inferência Fuzzy do Mínimo (t-norma $\wedge$) para a regra 18

$$R23 : min\{\varphi_{Rm}(3,5); \varphi_{CRm}(5); \varphi_{Pm}(3,4)\} \Rightarrow$$
$$min\{1/4; 1/3; 3/5\} = 1/4 \Rightarrow \varphi_{Ria}$$
$$R24 : min\{\varphi_{Rm}(3,5); \varphi_{CRm}(5); \varphi_{Pm}(3,4)\} \Rightarrow$$
$$min\{1/4; 1/3; 1/5\} = 1/5 \Rightarrow \varphi_{Rim}$$
$$R26 : min\{\varphi_{Rm}(3,5); \varphi_{CRm}(5); \varphi_{Pm}(3,4)\} \Rightarrow$$
$$min\{1/4; 1/5; 3/5\} = 1/5 \Rightarrow \varphi_{Rim}$$
$$R27 : min\{\varphi_{Rm}(3,5); \varphi_{CRm}(5); \varphi_{Pm}(3,4)\} \Rightarrow$$
$$min\{1/4; 1/5; 1/5\} = 1/5 \Rightarrow \varphi_{Rib}$$

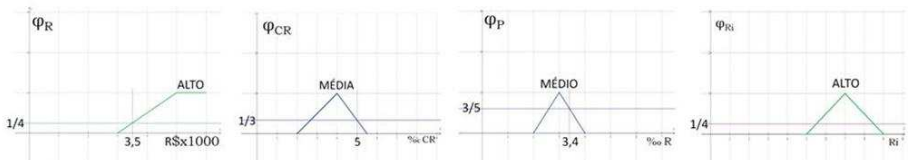


Figura 13: Inferência Fuzzy do Mínimo (t-norma $\wedge$) para a regra 23

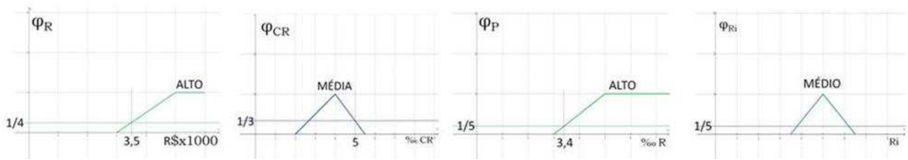


Figura 14: Inferência Fuzzy do Mínimo (t-norma $\wedge$) para a regra 24

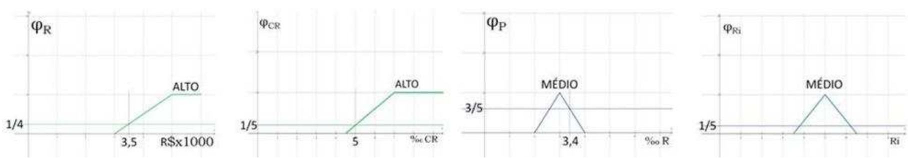


Figura 15: Inferência Fuzzy do Mínimo (t-norma $\wedge$) para a regra 26

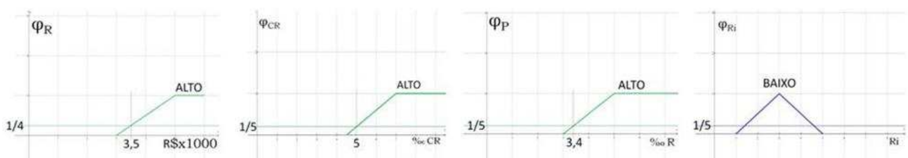


Figura 16: Inferência Fuzzy do Mínimo (t-norma $\wedge$) para a regra 27

Com as construções anteriores (usando a t-norma $'\wedge'$-mínimo), se pode observar como foram definidos os conjuntos *fuzzy* específicos de saída, com relação às entradas estudadas.

Para se construir graficamente o conjunto *fuzzy* de saída, segundo o método de Mandani, toma-se a t-conorma ($\vee$ – máximo), assim se obtém: $\varphi_{Ri}(u) = sup\{\varphi_{Rimb} = 1/5\} \cup sup\{\varphi_{Rib} = 1/5\} \cup sup\{\varphi_{Rim} = 1/3, \varphi_{Rim} = 1/5\} \cup sup\{\varphi_{Ria} = 1/4\} = \{\varphi_{Rimb} = 1/5\} \cup \{\varphi_{Rib} = 1/5\} \cup \{\varphi_{Rim} = 1/3\} \cup \{\varphi_{Ria} = 1/4\}$ e, assim, constroi-se o gráfico da função de pertinência do conjunto *fuzzy* de saída, conforme a seguir:

Fazendo os cálculos necessários, se obtém $x_c = 4,6438$, que é a resposta que procu-

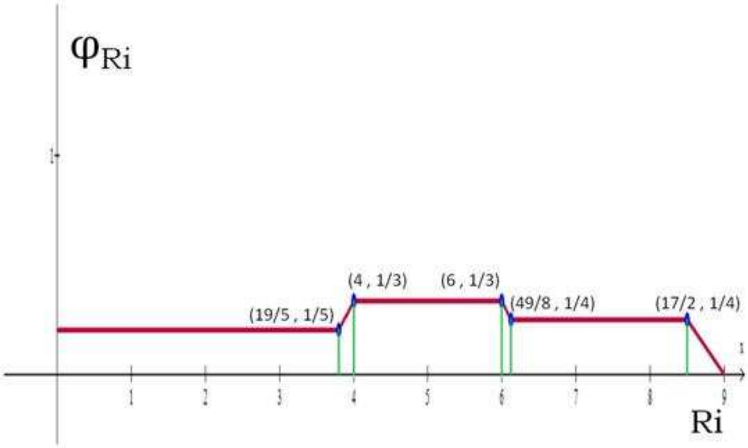


Figura 17: Definição da função de pertinência do conjunto *fuzzy* de saída com t-conorma.

rada para a tomada de decisão sobre conceder ou não o empréstimo ao candidato (cliente).

Implementando este algorítimo em uma ferramenta como o Matlab® em seu *toolbox fuzzy* haverá condições de mecanizar e sistematizar este procedimento para que se possa utilizá-lo de forma mais ágil na tomada de decisão.

Agradecimentos

O segundo autor agradece ao prof. Ms.André Krindges pela ajuda na compreenção da teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Referências

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 de *Textos Didáticos*. IMECC–UNICAMP.

Chang, S. L. e Zadeh, L. A. (1972). On fuzzy mapping and control. *IEEE Trans. Systems Man Cybernetics*, 2:30–34.

Kandel, A. e Byatt, W. J. (1980). Fuzzy process. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:117–152.

Nguyen, H. T. e Walker, E. A. (1997). *A First Course in Fuzzy Logic*. CRC Press, Inc.

Pedrycz, W. e Gomide, F. (1998). *An introduction to fuzzy sets: analysis and design.* Bradford. Imprenta, Cambridge.