

Sobre o Ponto de Inflexão em Modelos de Crescimento Inibido com Condição Inicial Fuzzy

M. Cecconello¹,

DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

A. J. V. Brandão²,

UFSCAR, Campus Sorocaba, 18.052-780, Sorocaba/SP.

R. C. Bassanezi³,

CMCC – UFABC, 09.210-170, Santo André/SP.

Resumo. Neste trabalho analisamos algumas propriedades dos fluxos fuzzy obtidos pela extensão se Zadeh dos fluxos determinísticos de equações com crescimento inibido. Damos também a definição do que seria um ponto de inflexão fuzzy para fluxos fuzzy. Além disso, apresentamos uma representação gráfica para fluxos fuzzy.

Palavras-chave: Conjuntos Fuzzy, Modelos de Crescimento Inibido, Fluxos Fuzzy.

1. Introdução

Após o artigo seminal de 1965 (Zadeh, 1965) em que Lofti Zadeh introduziu o conceito de conjunto fuzzy, muita pesquisa foi desenvolvida tanto do

¹moiscecc@ime.unicamp.br

²adilsonvb@ufscar.br

³rodney.bassanezi@ufabc.edu.br

ponto de vista teórico quanto prático (Barros e Bassanezi, 2006; Pedrycz e Gomide, 2007; Klir e Yuan, 1995; Nguyen e Walker, 2000; Diamond e Kloeden, 1994). Uma das áreas de grande interesse foi a modelagem de fenômenos incertos por meio de equações diferenciais. No caso em que a natureza da incerteza é aleatória, usa-se como ferramenta as equações diferenciais estocásticas. No entanto, os modelos variacionais fuzzy podem contemplar vários tipos de incertezas (subjetividades - *fuzziness*) além das estocásticas.

Dependendo da escolha da variável de estado e/ou dos parâmetros dos modelos temos, respectivamente, *fuzziness demográfica* quando as variáveis de estado são modeladas por meio de conjuntos fuzzy e/ou *fuzziness ambiental* quando somente os parâmetros são considerados fuzzy. Nos fenômenos biológicos em geral, ambos os tipos de fuzziness estão presentes Barros e Bassanezi (2006).

As equações variacionais fuzzy têm sido estudadas através de métodos distintos. A primeira tentativa de contemplar subjetividades do tipo não aleatório em sistemas variacionais foi com o uso da derivada de Hukuhara (Kandel e Byatt, 1981; Kaleva, 1987; Seikkala, 1987; Ouyang e Wu, 1989). Este processo no entanto não teve muito sucesso porque, num modelo simples como o de Malthus, com taxa de crescimento negativo, a solução fuzzy é instável, não se mostrando uma boa generalização do determinístico, o qual sabemos ser assintoticamente estável. Recentemente, Bede e Gal (2005) introduziram um novo conceito de derivada fuzzy para contornar alguns problemas inerentes à derivada de Hukuhara.

Outra maneira de se contemplar a subjetividade não aleatória é por meio das inclusões diferenciais (Hullemeier, 1997). Tal procedimento, no entanto, tem-se mostrado muito complicado, mesmo quando aplicado em situações simples.

Quando as variáveis de estado são incertas, um modo de se ter um tratamento mais adequado para os modelos variacionais é passar toda a incerteza para os parâmetros do modelo matemático. Neste caso, um método alternativo, que temos usado, é aquele que consiste em fuzzificar as soluções de

um modelo determinístico, usando o princípio da extensão de Zadeh (Oberuggenberger e Pittschmann, 1999; Mizukoshi et al., 2007).

Nosso objetivo neste trabalho é estudar um aspecto simples porém interessante de modelos variacionais com crescimento inibido quando a condição inicial é fuzzy. Neste caso, as soluções são obtidas via fuzzificação das soluções determinísticas.

Quando se aplica uma equação de crescimento inibido determinística como modelos de crescimento em peso de animais de corte, o tempo de abate ideal é exatamente o ponto de inflexão da solução. De fato, se o animal for abatido antes há uma perda, pois não foi atingido todo o potencial de ganho de peso. Se for abatido depois corre-se o risco de perder dinheiro na relação custo *versus* ganho de peso, pois a partir do ponto de inflexão ocorre uma diminuição no ritmo de crescimento. Na prática os criadores abatem o animal num tempo maior do que o tempo de inflexão.

Neste trabalho daremos uma interpretação para o *tempo de inflexão* de modelos fuzzy crescimento inibido, interpretação esta que corrobora o que se vê na prática.

2. Conceitos Básicos

Nesta seção apresentaremos os fundamentos básicos necessários para a aplicação da teoria dos conjuntos fuzzy nas seções adiante. Para maiores informações sobre o assunto o leitor pode consultar, por exemplo, Barros e Bassanezi (2006) ou Pedrycz e Gomide (2007).

Os subconjuntos fuzzy de um dado espaço X são caracterizados por funções desse espaço no intervalo unitário $[0, 1]$. Mais precisamente, temos

Definição 2.1. Seja X um conjunto não vazio. Um subconjunto fuzzy A de X é um subconjunto não vazio $\{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ de $X \times [0, 1]$ para alguma função $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$.

A função $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ é denominada *função de pertinência* de A e

o valor assumido para cada $x \in X$ é o *grau de pertinência* de x em A . O conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de um conjunto X será denotado por $\mathcal{F}(X)$.

Segue diretamente dessa definição que qualquer subconjunto de X é também um subconjunto fuzzy de X uma vez que esse conjunto é bem determinado pela sua função característica e portanto satisfaz a definição acima. Portanto, temos que se $A \subset X$ com função característica $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$, então o conjunto $\chi_A = \{(x, \chi_A(x)) : x \in X\}$ é um subconjunto de $X \times [0, 1]$ com função de pertinência $\mu_{\chi_A}(x) = \chi_A(x)$ para todo $x \in X$ e consequentemente $\chi_A \in \mathcal{F}(X)$. Para uma melhor distinção, o subconjunto fuzzy χ_A será denominado aqui como um subconjunto *crisp* de X .

Dado um subconjunto fuzzy A em $\mathcal{F}(X)$ definimos, para cada $\alpha \in (0, 1]$, o conjunto $[A]^\alpha \subset X$ como sendo o conjunto dos elementos de X tal que o grau de pertinência em A é ao menos α . O conjunto $[A]^\alpha \subset X$ é denominado α - *nível* de A e matematicamente é definido como

$$[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } \alpha \in (0, 1]$$

O nível zero de um subconjunto fuzzy A é definido por

$$[A]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [A]^\alpha} = \overline{\text{supp}(A)}$$

no qual $\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ é o suporte do subconjunto fuzzy A .

Dois conjuntos conjuntos fuzzy são iguais quando as funções características são iguais, isto é,

$$A = B \iff \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X.$$

A igualdade entre conjuntos fuzzy pode também ser caracterizada por meio dos α - níveis. Neste caso, os conjuntos são iguais quando os α - níveis coincidem para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Em muitos casos pode ser necessário estender o domínio de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ para os subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$. Notemos que para cada subconjunto $A \subset X$ a aplicação f define o subconjunto $f(A) \subset Y$. Supondo agora que A seja um subconjunto fuzzy X , isto é $A \in \mathcal{F}(X)$, então precisamos determinar como será a imagem induzida pela aplicação f sobre A . A forma como essa imagem é caracterizada pode ser feita através do *Princípio da Extensão* proposto por Zadeh conforme definição a seguir.

Definição 2.2. Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e A um subconjunto fuzzy de X . A *extensão de Zadeh* $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ é a aplicação cuja imagem é dada por:

$$\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{a \in f^{-1}(y)} \mu_A(a) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Vale observar que se $A \subset X$ e, portanto, $\chi_A \in \mathcal{F}(X)$, então o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ induzido pela aplicação \hat{f} coincide com o subconjunto fuzzy $\chi_{f(A)}$ induzido por f . De fato, pois sendo $\chi_A \in \mathcal{F}(X)$ tal que, $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \in X - A$ temos que, $\mu_{\hat{f}(A)}(y) = 1$ se $y \in f(A)$ e $\mu_{\hat{f}(A)}(y) = 0$ se $y \in Y - A$. Portanto, temos que $\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \mu_{\chi_{f(A)}}(y)$ e, conseqüentemente, $\hat{f}(A) = \chi_{f(A)}$.

Um tipo particular de conjunto fuzzy que nos será muito útil é o chamado *número fuzzy*, o qual é tentativa de generalizar números reais no contexto fuzzy.

Definição 2.3. Um subconjunto fuzzy $A \subset \mathbb{R}$ é chamado *número fuzzy* se satisfaz

- Seus níveis $[A]^\alpha$ são compactos e não vazios para todo $\alpha \in [0, 1]$;
- Existe um único x tal que $\mu_A(x) = 1$.

Nas figuras abaixo temos dois exemplos de números fuzzy bem conhecido, os números fuzzy triangulares e gaussianos.

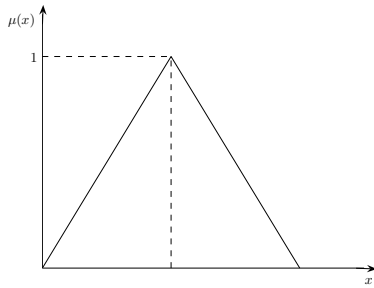


Figura 1: Número fuzzy triangular.

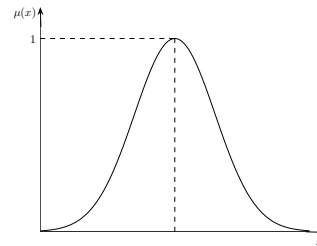


Figura 2: Número fuzzy gaussiano.

3. Equações Autônomas com Condição Inicial Fuzzy

Considere o seguinte problema de valor inicial determinado pela equação

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) \in X_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

no qual $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções numéricas, com $I \subset \mathbb{R}$, e X_0 um número fuzzy.

Em termos de modelos reais, podemos interpretar o problema acima da seguinte maneira: temos conhecimento da lei que rege o crescimento de uma certa variável através da equação diferencial, mas a condição inicial não é bem determinada, carregando consigo um grau de incerteza. Apesar da lei ser determinística, a solução deve carregar as incertezas da condição inicial ao longo do tempo.

Em termos matemáticos, Mizukoshi et al. (2007) apresentaram uma interpretação da solução de uma equação diferencial com condição inicial fuzzy baseada no princípio de extensão de Zadeh. Primeiramente, a idéia consiste em considerar o problema determinístico associado:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Sabemos que quando a função f é continuamente diferenciável, a solução do problema acima é única e depende continuamente da condição inicial, isto é, a solução $\varphi(t, x_0)$ do problema (3.2) é uma função contínua de x_0 . Logo, definimos a solução do problema (3.1) como a extensão de Zadeh da função $x_0 \rightarrow \varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$. Tal solução é denotada por $\hat{\varphi}_t(X_0)$

Por exemplo, considere a equação logística determinístico:

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Temos que $K = a/b$ é a capacidade suporte do meio. A solução de (3.3) é dada por:

$$x(t) = \frac{Kx_0}{(K - x_0)e^{-at} + x_0}.$$

Se $0 < x_0 < K/2$, então um esboço da solução é dado pela Figura 3.

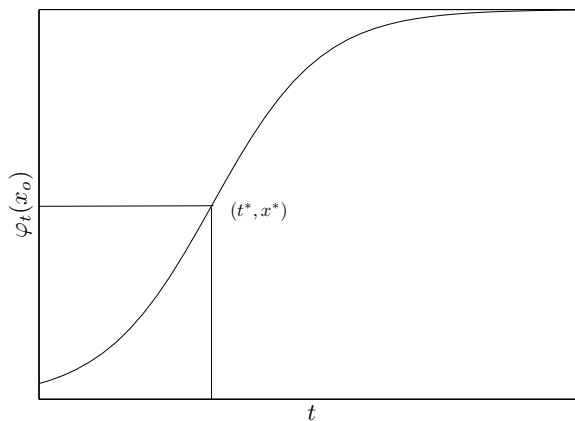


Figura 3: Solução da equação logística determinística.

O tempo t^* onde se dá a inflexão para a equação logística é determinado pela equação:

$$\frac{K - x_0}{x_0} = e^{at^*}. \quad (3.4)$$

Assim, t^* depende continuamente da condição inicial x_0

$$t^* = g(x_0) = \frac{1}{a} \ln \frac{K - x_0}{x_0}$$

e temos que $t^* \rightarrow 0$ quando $x_0 \rightarrow K/2$, e $t^* \rightarrow \infty$ quando $x_0 \rightarrow 0$.

Consideremos agora o modelo com condição inicial fuzzy associado:

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2, \\ x(0) \in X_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Aqui X_0 é um número fuzzy triangular centrado em x_0 e de raio $\varepsilon > 0$, satisfazendo $\text{supp}(X_0) \subset (0, K/2)$, isto é,

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (0, K/2). \quad (3.6)$$

A representação gráfica da solução de uma equação autônoma com condição inicial fuzzy pode ser feita por meio dos α - níveis, conforme proposto em Cecconello (2006). A Figura 4 é a representação gráfica para a equação logística.

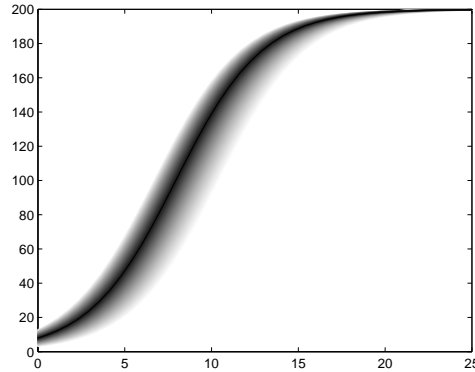


Figura 4: Representação gráfica da solução fuzzy logística.

A interpretação para a figura acima é baseada nas propriedades da solução estendida $\hat{\varphi}_t(X_0)$ e nas propriedades dos fluxos determinísticos unidimensionais.

Primeiramente, a unicidade da solução com relação à condição inicial implica que o grau de pertinência de $\varphi_t(x)$ no conjunto fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ é igual ao grau de pertinência de x em X_0 (Mizukoshi et al., 2007). Além disso, pela monotonicidade da solução determinística com relação à condição inicial, temos que $[X_0]^\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$ implica que $[\hat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = [\varphi_t(a_\alpha), \varphi_t(b_\alpha)]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t \geq 0$. Notemos ainda que, para todo $\beta > \alpha$ temos $[X_0]^\beta \subset [X_0]^\alpha$ e como consequência temos $[\hat{\varphi}_t(X_0)]^\beta \subset [\hat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha$.

A Figura 4 é portanto, a evolução dos α -níveis da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$. Quanto maior for o valor de α mais escuro é o sombreado, isto é, maior é o grau de pertinência de $\varphi_t(x)$ ao conjunto fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$.

4 Ponto de Inflexão Fuzzy

Vamos introduzir nesta seção o conceito de *tempo de inflexão* para fluxos fuzzy.

4.1 Equação Logística Fuzzy

Como vimos, para cada $t \geq 0$, a solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ da equação logística obtida pela extensão de Zadeh do fluxo determinístico $\varphi_t(x_0)$ possui como suporte o intervalo $[\varphi_t(x_0 - \varepsilon), \varphi_t(x_0 + \varepsilon)]$.

A questão que surge neste caso é saber em que instante $t_i \geq 0$ tem-se a amplitude máxima desse suporte. Em outras palavras, quando se tem a maior amplitude da incerteza acarretada por uma incerteza inicial X_0 . Denominaremos o tempo t_i de maior amplitude do suporte por tempo de *inflexão fuzzy*.

Os resultados a seguir respondem esse questionamento.

Teorema 4.1. *Sejam t^* o ponto de inflexão da solução determinística, t_i o tempo correspondente à maior amplitude da solução fuzzy da equação logística. Se $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (0, K/2)$ então $t^* < t_i$ e $t_i \rightarrow t^*$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Prova: Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ as respectivas soluções dos problemas determinísticos

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2, \\ x(0) = x_0 - \varepsilon, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = ax - bx^2, \\ x(0) = x_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Desde que $x_2(t) > x_1(t)$ para todo $t \geq 0$, para encontrarmos t_i basta acharmos o ponto de máximo da função $f(t) = x_2(t) - x_1(t)$. De fato,

$$f'(t) = [x_2(t) - x_1(t)][a - b(x_1(t) + x_2(t))].$$

Logo, os pontos críticos de f são os pontos t satisfazendo $x_1(t) + x_2(t) = a/b$. Resolvendo esta equação, verificamos que existe uma única solução t_i a qual é ponto de máximo de f e satisfaz a equação

$$\frac{(K - x_0)^2 - \varepsilon^2}{x_0^2 - \varepsilon^2} = e^{2at_i}. \quad (4.1)$$

As equações (3.4) e (4.1) mostram que $t_i \rightarrow t^*$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso, também implicam que

$$e^{2a(t^*-t_i)} = \frac{[x_0^2 - \varepsilon^2](K - x_0)^2}{[(K - x_0)^2 - \varepsilon^2]x_0^2} = \gamma \quad (4.2)$$

A condição (3.6) implica que $\varepsilon < x_0$ e daí concluímos que

$$0 < x_0^2 - \varepsilon^2. \quad (4.3)$$

Novamente a condição (3.6) garante que $\varepsilon < K/2 - x_0 < K - x_0$ e portanto

$$0 < (K - x_0)^2 - \varepsilon^2. \quad (4.4)$$

Segue de (4.2), (4.3) e (4.4) que $\gamma > 0$. Além disso, $x_0 < K/2$ implica que $\gamma < 1$.

Portanto, $e^{2a(t^*-t_i)} = \gamma$ com $0 < \gamma < 1$ de onde podemos concluir então que $2a(t^* - t_i) = \ln \gamma < 0$, isto é, $t^* < t_i$. ■

A expressão (4.1) nos permite relacionar o tempo de inflexão fuzzy com os tempos de inflexão das soluções determinísticas $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

Teorema 4.2. *Seja $t_{-\varepsilon}^*$ e t_{ε}^* os pontos de inflexão do modelo logístico com condições iniciais $x_0 - \varepsilon$ e $x_0 + \varepsilon$, respectivamente. Então o tempo de inflexão fuzzy é dado por*

$$t_i = \frac{t_{-\varepsilon}^* + t_{\varepsilon}^*}{2}$$

Prova: Da expressão (3.4), temos que:

$$t_{-\varepsilon}^* = \frac{1}{a} \ln \frac{K - x_0 + \varepsilon}{x_0 - \varepsilon}$$

$$t_{\varepsilon}^* = \frac{1}{a} \ln \frac{K - x_0 - \varepsilon}{x_0 + \varepsilon}.$$

Agora, por (4.1) temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
 t_i &= \frac{1}{2a} \ln \frac{(K - x_o)^2 - \varepsilon^2}{x_o^2 - \varepsilon^2} \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \left[\left(\frac{(K - x_o) + \varepsilon}{x_o - \varepsilon} \right) \left(\frac{(K - x_o) - \varepsilon}{x_o + \varepsilon} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \ln \frac{K - x_o + \varepsilon}{x_o - \varepsilon} + \frac{1}{a} \ln \frac{K - x_o - \varepsilon}{x_o + \varepsilon} \right] \\
 &= \frac{1}{2} (t_{-\varepsilon}^* + t_{\varepsilon}^*).
 \end{aligned}$$

Logo, está provado o teorema. ■

Vale notar que se $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [K/2, K]$ então a função $f(t) = x_2(t) - x_1(t)$ é decrescente. Neste caso, temos que a maior amplitude do suporte da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ ocorre em $t = 0$.

4.2 Outros Modelos de Crescimento Inibido

A discussão apresentada anteriormente para a equação logística, pode ser levada para modelos unidimensionais de crescimento inibido que apresentam ponto de inflexão, como por exemplo, o modelo de von Bertalanffy, modelode Gompertz, modelo de Montrol, etc.

De maneira geral, tais modelos são dados por uma equação autônoma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

com $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo: $f(0) = f(K) = 0$ e $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, K)$.

Se a função f é côncava, então o Teorema do Valor Médio garante a existência de um ponto de máximo $x^* \in (0, K)$ que é o valor onde ocorre a inflexão para o fluxo determinístico $\varphi_t(x_0)$ gerado por (4.5).

Como veremos a seguir, sob as condições aqui discutidas, as soluções das equações de crescimento inibido fuzzy associadas apresentam ponto de inflexão fuzzy quando a condição inicial é incerta.

Teorema 4.3. *Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ em (4.5) côncava, $f(0) = f(K) = 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, K)$ e x^* o ponto de inflexão para o fluxo $\varphi_t(x_0)$. Se a condição inicial fuzzy X_0 é tal que $[X_0]^0 = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (0, x^*)$ então existe um tempo único de inflexão fuzzy $t_i \in (t_\varepsilon^*, t_{-\varepsilon}^*)$ para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$.*

Prova: Tal como para a equação logística, definimos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ como as respectivas soluções dos problemas determinísticos

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_{01} = x_0 - \varepsilon; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_{02} = x_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Seja $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Desde que $g(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, então o tempo de inflexão fuzzy existe se a função g admitir um ponto de máximo. Para mostrar isso, provemos primeiramente que existe $t_i > 0$ tal que $g'(t_i) = 0$.

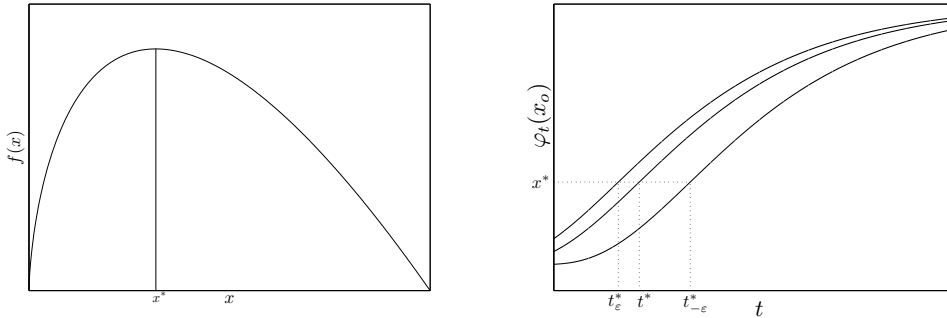


Figura 5: Solução de (4.5) para $f(x)$ côncava.

Com efeito, temos que $g'(0) = f(x_{02}) - f(x_{01}) > 0$ uma vez que f é côncava e $[X_0]^0 \subset (0, x^*)$. Por outro lado, desde que $x_1(t) \rightarrow K$ quando $t \rightarrow \infty$, existe $\tau > 0$ tal que $x_2(\tau) > x_1(\tau) \geq x^*$ e, novamente pela concavidade de f , temos que $g'(\tau) < 0$. Assim, a continuidade de $g'(t)$ garante que existe um

único $t_i > 0$ tal que $g'(t_i) = f(x_2(t_i)) - f(x_1(t_i)) = 0$, de onde concluímos que $x_2(t_i) > x^* > x_1(t_i)$. Como $\varphi_t(x)$ é crescente, isso implica que $t_i \in (t_{\varepsilon}^*, t_{-\varepsilon}^*)$.

Uma vez que $g(t_i)$ é crescente para $t < t_i$ e decrescente para $t > t_i$ então t_i é um ponto de máximo para $g(t)$ e portanto temos a existência de um tempo de inflexão fuzzy. ■

Vale notar que, como para equação logística, se $[X_0]^0 \subset [x^*, K]$ então a função $g(t) = x_2(t) - x_1(t)$ é decrescente. Neste caso, temos que a maior amplitude do suporte da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ ocorre em $t = 0$.

A determinação do tempo de inflexão fuzzy, cuja existência é garantida pelo teorema acima, depende de cada caso especificamente, isto é, depende da equação (4.5) considerada.

Exemplo 4.1. Consideremos o modelo de von Bertalanffy dado pela equação

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x^\gamma - \beta x, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.6)$$

De acordo com o Teorema 4.3 existe, $t_i > 0$ onde a amplitude do suporte da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ é máxima, isto é, o modelo de von Bertalanffy admite um tempo de inflexão fuzzy.

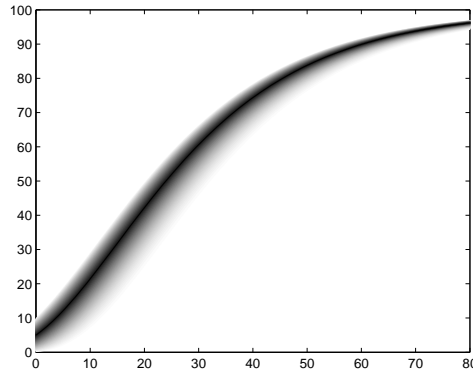


Figura 6: Representação gráfica da solução fuzzy para o modelo de von Bertalanffy.

Na Figura 6 acima temos a representação gráfica da solução $\hat{\varphi}_t(X_0)$ para $\alpha = 0.6325$, $\beta = 0.2$ e $\gamma = 0.75$. A condição inicial é o número triangular fuzzy $X_0 = (0.1/5/9.9)$.

A tempo de inflexão para a solução determinística $\varphi_t(x_0)$ com condição inicial $x_0 = 5$ é $t^* = 14.9197$ enquanto que o tempo onde ocorre a inflexão fuzzy é $t_i = 18.0760$. Como no caso da solução logística, temos $t^* < t_i$. No entanto, aqui não vale a igualdade do Teorema 4.2, uma vez que, $(t_{-\varepsilon}^* + t_{\varepsilon}^*)/2 = 17.5369$.

5. Conclusões

Além da questão puramente matemática, os Teoremas 4.1 e 4.2 corroboram com algumas questões práticas. Quando se usa modelos de crescimento inibido determinístico na modelagem do crescimento em peso de animais criados em cativeiro para a alimentação humana (peixes, aves e mamíferos de corte), procura-se fazer o abate num tempo próximo ao ponto de inflexão determinístico t^* para se obter um aproveitamento ótimo (máximo rendimento com menor custo). Na verdade, na prática, o abate é feito logo após o tempo de inflexão determinístico t^* . O modelo com condição inicial fuzzy nos diz que, numa situação de incerteza, a melhor escolha para o tempo de abate é de fato dada pelo modelo fuzzy conforme os resultados demonstrados. O tempo de abate deve ser t_i e este tempo é obtido conforme o grau de confiança que tenhamos nos dados iniciais. Quanto menor o valor de ε maior é o conhecimento dos dados iniciais, menor é a incerteza, mais próximo o modelo fica do determinístico e podemos tomar o tempo de abate muito próximo do ponto de inflexão da solução determinística. Por outro lado, se ε é grande, isto é, o desconhecimento dos dados iniciais é grande e o grau de incerteza é alto, então t_i nos dá uma segurança como tempo de abate diante da incerteza dos dados iniciais.

Agradecimentos

Agradecimentos ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Bio-matemática*, volume 5 da *Coleção IMECC - Textos Didáticos*. IMECC.
- Bede, B. e Gal, S. G. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 151:581–599.
- Cecconello, M. S. (2006). Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas dinâmicos fuzzy. Dissertação de Mestrado, IMECC - UNICAMP.
- Diamond, P. e Kloeden, P. (1994). *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*. World Scientific, Singapore.
- Hullemeier, E. (1997). An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Bases Systems*, 5:117–137.
- Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:301–317.
- Kandel, A. e Byatt, W. J. (1981). Fuzzy differential equations. in “Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society”, Tóquio.
- Klir, G. J. e Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application*. Prentice Hall PTR, New Jersey.

- Mizukoshi, M. T., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2007). Fuzzy differential equations and the extension principle. *Information Sciences*, 177:3627–3635.
- Nguyen, H. T. e Walker, E. A. (2000). *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2nd edition.
- Oberguggenberger, M. e Pittschmann, S. (1999). Differential equations with fuzzy parameters. *Math. Mod. Systems*, 5:181–202.
- Ouyang, H. e Wu, Y. (1989). On fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 32:321–325.
- Pedrycz, W. e Gomide, F. (2007). *Fuzzy Systems Engineering*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:319–330.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.

