

Dinâmica populacional com sistemas p-fuzzy: um estudo de caso para a cidade de Sorocaba

J. A. F. Roveda¹, S. R. M. M. Roveda², A. C. G. Martins³

Engenharia Ambiental - Campus Experimental de Sorocaba - Unesp,
18.087-180, Sorocaba/SP.

Resumo. Este trabalho apresenta uma aplicação dos sistemas p-fuzzy para o estudo da dinâmica populacional da cidade de Sorocaba. Alternativamente aos modelos determinísticos, os sistemas p-fuzzy são úteis na modelagem de fenômenos cujo comportamento é parcialmente conhecido, já que incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis. A dinâmica do processo é otida por meio de um controlador fuzzy to tipo Mamdani. Para este estudo foram elaboradas diferentes bases de regras, considerando a variação absoluta e relativa da população. Os resultados obtidos são comparados aos dados censitários e à projeção de um modelo determinístico.

Palavras-chave: *dinâmica populacional, modelagem fuzzy, sistemas p-fuzzy*

1. Introdução

Estudos recentes tem procurado estabelecer relações entre dinâmica populacional (como por exemplo, tamanho da população, crescimento, etc)

¹roveda@sorocaba.unesp.br

²sandra@sorocaba.unesp.br

³amartins@sorocaba.unesp.br

e mudanças ambientais. Muitas teorias, subscritas por demógrafos, afirmam que a população é uma de muitas variáveis que afetam o meio ambiente e que o rápido crescimento da população agrava outras condições como guerras, tecnologias poluentes, distorções políticas, entre outras. Pesquisadores têm procurado compreender as nuances da relação entre população e ambiente tentando responder questões que incluem como especificar mudanças populacionais relacionadas a mudanças específicas no meio-ambiente e como as condições e mudanças ambientais, por sua vez, afetam a dinâmica populacional (Sherbinin et al., 2007).

As relações entre a dinâmica populacional e o ambiente são, de fato, complexas e difíceis de separar. Embora o estudo da dinâmica populacional utilizando equações relacionais ou diferenciais venha sendo desenvolvido desde o século XIX, há uma dificuldade inerente a esses modelos em retratar a complexidade do fenômeno e fazer previsões precisas, já que os parâmetros envolvidos são obtidos de observações e experimentos estando, assim, sujeitos a imprecisões (Edelstein-Keshet, 1988).

Com o advento da lógica fuzzy, introduzida por Zadeh (Zadeh, 1965), há uma grande quebra de paradigma, quando o pensar em termos absolutos é substituído pelo pensar relativo. Essa mudança na forma de pensar, abre novas e refinadas formas de olhar antigas questões, particularmente constituiu-se uma nova abordagem para o estudo da dinâmica populacional.

A lógica fuzzy fornece um quadro conceitual no qual as fronteiras rígidas e as verdades ou negações absolutas são vistas, quando justificável, como casos particulares ao invés de únicas possibilidades. O processo de modelagem fuzzy permite expressar incertezas e subjetividades já que podem ser usadas informações qualitativas (linguísticas) e quantitativas. É caracterizado como um procedimento de fácil compreensão, apropriado para descrever sistemas com razoáveis quantidades de conhecimento, além de ser baseado em linguagem natural, o que permite maior facilidade na comunicação dos modelos (Gomide e Gudwin, 1994).

Uma ferramenta útil para modelagem de fenômenos cujo comporta-

mento é parcialmente conhecido são os sistemas p-fuzzy (Cecconelo, 2006).

Dentro desse contexto, é proposto neste trabalho um estudo da dinâmica populacional da cidade de Sorocaba através dos sistemas p-fuzzy.

Sorocaba é uma cidade situada no interior do estado de São Paulo, possuindo uma área de aproximadamente $450Km^2$. É considerada a terceira cidade mais populosa do interior paulista, com cerca de 560.157 habitantes e uma das 50 maiores cidades do Brasil (IBGE, 2007). Tendo sido precursora da industrialização paulista estabelece-se atualmente como um importante pólo de desenvolvimento industrial o que vislumbra um crescimento acentuado nas próximas décadas. Dessa forma, o estudo do crescimento populacional pode balizar as atividades de planejamento e definições de políticas públicas.

Este artigo está organizado da seguinte forma: a seção 2 apresenta os principais conceitos da teoria fuzzy necessários ao escopo deste trabalho; a seção 3 apresenta a metodologia de elaboração das bases de regras para dinâmica populacional dos sistemas p-fuzzy e sistemas iterativos e finalmente, a seção 4 mostra as projeções obtidas com os modelos gerados a partir das bases de regras construídas e analisa seus comportamentos comparando os resultados com os dados censitários e os do modelo de Verhulst.

2. Controladores e sistemas p-fuzzy

Nesta seção são apresentados brevemente alguns conceitos da teoria de conjuntos fuzzy, necessários para a compreensão do texto, uma descrição mais aprofundada pode ser encontrada em (Barros e Bassanezi, 2006).

Uma função de pertinência é uma curva que define o grau, de zero a um, com que cada ponto no espaço de saída é mapeado no conjunto fuzzy A. Usualmente é denotada por:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1], \quad (1)$$

onde X é dito conjunto universo, que é sempre um conjunto clássico. Para

cada $x \in X$, o valor $\mu_A(x)$ expressa o grau de pertinência do elemento x de X no conjunto fuzzy A , sendo que $\mu_A(x) = 0$ representa a não pertinência e $\mu_A(x) = 1$ representa a pertinência total de x ao conjunto fuzzy X .

Um subconjunto fuzzy é definido como um conjunto de pares ordenados

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\} \quad (2)$$

onde $\mu_A(x)$ é a função de pertinência de x em A . A forma da função de pertinência é definida convenientemente.

As operações padrões de conjuntos fuzzy são: intersecção (operador *and*), união (operador *or*) e complementar de subconjuntos fuzzy (operador *not*). Dados dois ou mais conjuntos fuzzy, estas operações conectam esses conjuntos de modo que produzem um único subconjunto fuzzy, isto é, um agregado dos subconjuntos dados. Essas operações são essenciais na natureza da lógica fuzzy e estão definidas a seguir.

Sejam A e B subconjuntos fuzzy de X .

Intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de X cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (3)$$

União entre A e B é o subconjunto fuzzy de X cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (4)$$

O Complementar de A é o subconjunto fuzzy \bar{A} de X cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x) \quad (5)$$

Esse conceitos são fundamentais para definir a metodologia dos controladores fuzzy ou sistemas baseados em regras fuzzy. A construção destes sistemas pode ser descrita em quatro etapas: fuzzificação, base de regras, inferência e defuzzificação.

A primeira etapa, fuzzificação, é o processo no qual as variáveis de entrada e saída são definidas em termos de conjuntos fuzzy. É neste momento, que são construídas as funções de pertinência das variáveis que transformam os valores numéricos de uma variável em uma pertinência gradual nos conjuntos fuzzy, que descreve a propriedade da variável.

Na etapa seguinte são elaboradas as bases de regras, que são um conjunto de regras linguísticas na forma: Se <antecedente> Então <consequente>, que descrevem a relação entre as variáveis de entrada e saída. Os termos linguísticos usados nas regras são vagos e imprecisos (por exemplo, muito baixo, médio), contudo podem ser definidos na forma de conjuntos fuzzy.

A etapa de inferência, é o mecanismo pelo qual as informações subjetivas definidas pela base de regras são avaliadas matematicamente. Neste trabalho utilizou-se o método de inferência de Mamdani (Barros e Bassanezi, 2006) que é baseado na regra de composição de inferência max-min, ou seja, as regras são conectadas pelo operador lógico *or* e então modeladas pelo operador máximo e, em cada regra, os operadores *and* e *then* são modeladas pelo operador mínimo.

Finalmente, a etapa de defuzzificação, consiste em transformar a variável de saída fuzzy em variável real. Neste trabalho usou-se o método do Centro de Gravidade e o método do máximo dos máximos.

Os controladores fuzzy são responsáveis pela dinâmica dos sistemas p-fuzzy como é mostrado a seguir.

Denominamos de sistema parcialmente fuzzy, ou sistema p-fuzzy, ao sistema iterativo

$$\begin{cases} x_{k+1} &= f(x_k) \\ x_0 &\in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (6)$$

onde $f(x_k)$ é quase linear, isto é, $f(x) = x + \Delta(x)$, $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta(x_k)$ é obtido por um sistema baseado em regras fuzzy.

Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis, sendo assim uma

ferramenta útil para modelar fenômenos cujo comportamento é parcialmente conhecido. São basicamente constituídos de variáveis linguísticas de entrada e saída, que são variáveis de estado que, quantitativamente, são expressas por conjuntos fuzzy e um controlador fuzzy (Barros e Bassanezi, 2006). A estrutura de um sistema p-fuzzy é mostrada na Figura 1.

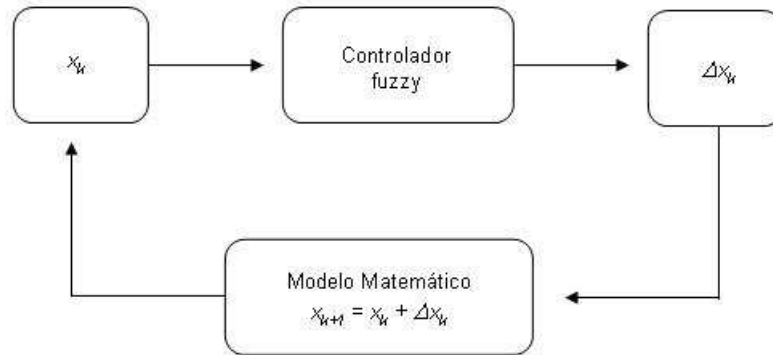


Figura 1: Arquitetura de um sistema p-fuzzy

3. Dinâmica populacional para Sorocaba através de sistemas p-fuzzy

Nesta seção são descritos os procedimentos para elaboração das bases de regras que serão utilizadas nos sistemas p-fuzzy e sistemas iterativos do tipo

$$x_{k+1} = (1 + \Delta(x_k)) x_k \quad (7)$$

para dinâmica populacional de espécies isoladas com crescimento inibido, utilizando como base o modelo de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = P \left(r - \frac{r}{P_\infty} P \right) \quad (8)$$

onde r é a taxa de crescimento da população e P_∞ é a capacidade de suporte da população estudada.

Tanto o sistema p-fuzzy quanto o sistema iterativo utilizam controladores fuzzy que são construídos a partir de um sistema baseado em regras fuzzy que têm como variáveis de entrada “População” (P) e de saída “Variação” (ΔP) (Cecconelo, 2006). Neste trabalho estudou-se duas formas de construir essa base de regras: utilizando a variação absoluta ($\frac{dP}{dt}$) da população e a sua variação relativa ($\frac{dP/dt}{P}$).

Para a variável População adotou-se o seguinte conjunto de termos lingüísticos, $P = \{\text{Baixa (B), Média Baixa (MB), Média (M), Média Alta (MA), Alta (A), Altíssima (AL)}\}$, tanto no estudo de variação absoluta quanto relativa.

Na criação da base de regras da variação absoluta, deve-se observar que o gráfico de $\frac{dP}{dt}$ em função de P é uma parábola e portanto, a variação da população foi baseada no comportamento da parábola conforme a Figura 2.

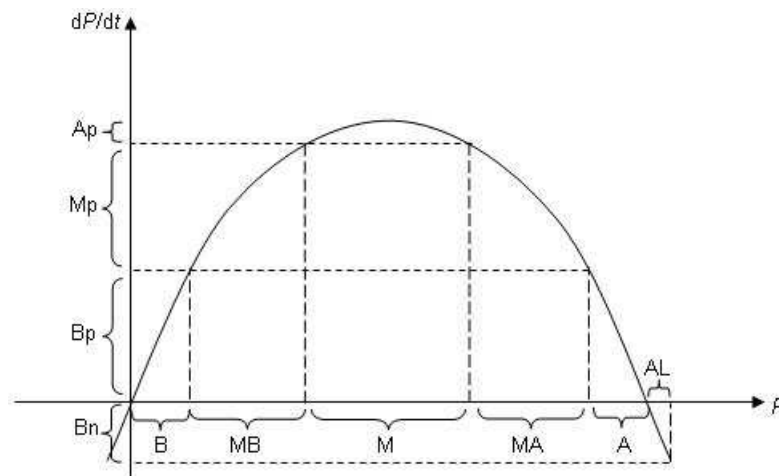


Figura 2: Parábola usada para balizamento da base de regras da variação absoluta

Sendo assim, através do conjunto de termos da População, a Variação absoluta foi dividida da seguinte forma: $\Delta P = \{\text{Baixa negativa (Bn), Baixa positiva (Bp), Média positiva (Mp), Alta positiva (Ap)}\}$.

Com base então nestes conjuntos de termos linguísticos e o gráfico apresentado na Figura 2, formou-se a seguinte base de regras (Cecconelo, 2006):

- 1 - se a população é baixa então a variação é baixa positiva;
- 2 - se a população é média baixa então a variação é média positiva;
- 3 - se a população é média então a variação é alta positiva;
- 4 - se a população é média alta então a variação é média positiva;
- 5 - se a população é alta então a variação é baixa positiva;
- 6 - se a população é altíssima então a variação é baixa negativa.

As funções de pertinência para as variáveis População e Variação absoluta são apresentadas nas Figuras 3 e 4.

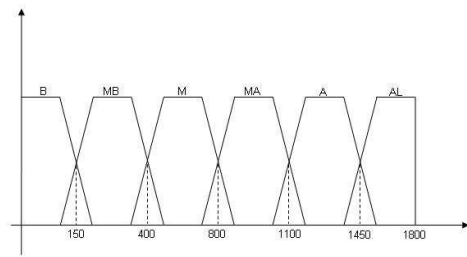


Figura 3: Funções de pertinência da variável População, em milhares de habitantes

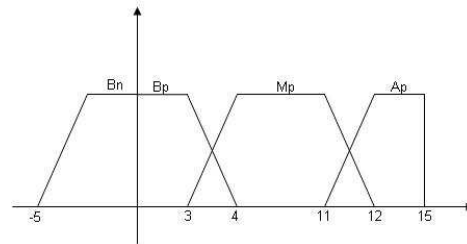


Figura 4: Funções de pertinência da variável Variação Absoluta

O método de inferência usado foi o de Mamdani e o de defuzzificação, o Centro de Gravidade.

No caso da variação relativa, pode-se observar que o gráfico de $\left(\frac{dP}{dt}/P\right)$ por P , é uma reta (Figura 5).

Em virtude disto, utilizou-se o conjunto $\Delta P_{rel} = \{\text{Baixa negativa (Bn)}, \text{Baixa positiva (Bp)}, \text{Média Baixa positiva (MBp)}, \text{Média positiva (Mp)}, \text{Alta negativa (An)}, \text{Alta positiva (Ap)}\}$.

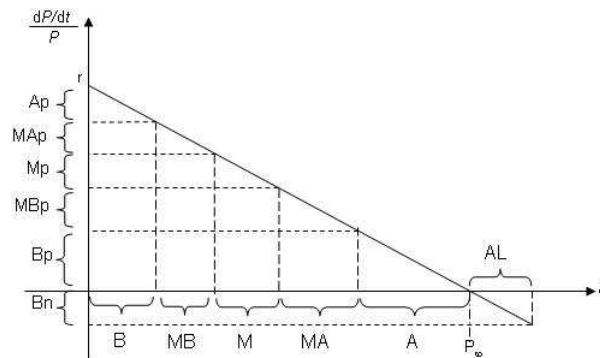


Figura 5: Reta usada para balizamento da base de regras da variação relativa

Média Alta positiva (MAp), Alta positiva (Ap)}, para que este pudesse se adaptar ao conjunto População. Nota-se ainda que a relação entre a população e a sua variação relativa é inversa, fornecendo então o seguinte conjunto de base de regras (Cecconelo, 2006):

- 1 - se a população é Baixa então a variação é Alta positiva;
- 2 - se a população é Média Baixa então a variação é Média Alta positiva;
- 3 - se a população é Média então a variação é Média positiva;
- 4 - se a população é Média Alta então a variação é Média Baixa positiva;
- 5 - se a população é Alta então a variação é Baixa positiva;
- 6 - se a população é Altíssima então a variação é Baixa negativa.

Porém, para o estudo de caso feito com a cidade de Sorocaba, observou-se que a base de regras deveria ser mudada para melhor se adaptar aos dados censitários. Sendo assim uma nova base de regras foi criada, simplesmente trocando as variações nos dois primeiros itens da base de regras anterior, obtendo:

- 1 - se a população é Baixa então a variação é Média Alta positiva;

2 - se a população é Média Baixa então a variação é Alta positiva ;

Os demais itens continuaram iguais aos anteriores. Na próxima seção será discutida a razão da mudança proposta.

As funções de pertinência neste caso são dadas pelas Figuras 6 e 7:

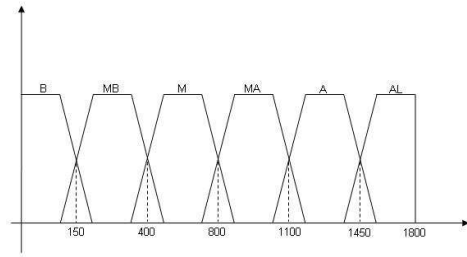


Figura 6: Funções de pertinência da variável População, em milhares de habitantes

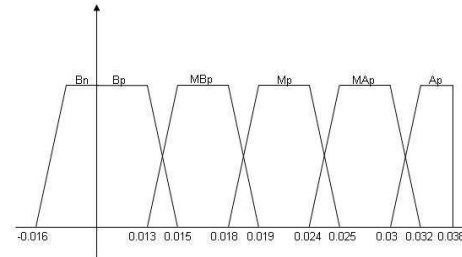


Figura 7: Funções de pertinência da variável Variação Relativa

Para o estudo de caso com variação relativa foram utilizados os métodos de inferência de Mamdani e o máximo dos máximos como método de defuzzificação.

4. Resultados e discussões

A metodologia descrita na seção anterior foi aplicada para a população de Sorocaba a fim de analisar sua evolução numérica. Foram construídos quatro modelos:

- Modelo 1: Sistema p-fuzzy com variação absoluta.
- Modelo 2: Sistema iterativo utilizando a primeira base de regras para variação relativa.
- Modelo 3: Sistema iterativo utilizando a base de regras modificada para variação relativa.

- Modelo 4: Utilizando a base de regras para variação absoluta com o sistema iterativo.

A Tabela 1 mostra os dados censitários, as projeções do modelo determinístico de Verhulst obtidos em Roveda et al. (2008) e as projeções para cada um dos modelos de 1 a 4.

Tabela 1: Dados obtidos para os modelos de 1 a 4. Valores em milhares de habitantes

Ano	Censo	Verhulst	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
1960	136	136	136	136	136	136
1970	175	192	199	185	188	172
1980	269	269	274	243	266	225
1991	379	376	356	322	390	320
1996	431	434	397	367	441	393
2000	493	483	436	408	483	471

Os valores censitários até 1996 foram utilizados para calibrar os modelos, enquanto a população de 2000 foi utilizada como teste.

Pode-se observar que o modelo 3 dentre os propostos é o mais razoável para projetar populações futuras já que o valor projetado é de 483 milhões, apresentando um erro relativo de 2,02%. Os demais apresentaram erros relativos superiores.

É interessante notar que o modelo mais razoável para fazer projeções advém do sistema cuja base de regras para variação relativa foi modificada para expressar uma característica da cidade em estudo. Desse modo, pode-se concluir que comportamentos específicos são facilmente traduzidos com pequenas variações na elaboração da base de regras.

Observe ainda que ao comparar a modelagem subjetiva do modelo 3 com a modelagem determinística de Verhulst, ambas apresentam resultados semelhantes, inclusive prevendo o mesmo valor para o ano de 2000. No entanto, cabe salientar que a modelagem subjetiva é mais simples do ponto

de vista matemático do que as equações diferenciais e o modelo pode ser melhorado aumentando o conjunto de base de regras.

Referências

- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de lógica fuzzy e bio-matemática*, volume 5 da *Coleção IMECC - Textos Didáticos*. IMECC–Unicamp, Campinas/SP.
- Cecconelo, M. S. (2006). Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy. Dissertação de Mestrado, IMECC–Unicamp.
- Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*. Random-House, N. York.
- Gomide, F. A. C. e Gudwin, R. R. (1994). Modelagem, Controle, Sistemas e Lógica Fuzzy. *SBA Controle & Automação*, 4:97–115.
- Roveda, S. R. M. M., Miyamura, D., Pedro, P. M., e Roveda, J. A. F. (2008). Modelagem Matemática para Dinâmica Populacional da Cidade de Sorocaba. In “Anais do VI Simpósio de Engenharia Ambiental”, Serra Negra/SP.
- Sherbinin, A., Carr, D., Cassels, S., e Jiang, L. (2007). Population and environment. *Annu. Rev. Environ. Resourc*, 32:345–373.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.