

Dispersão de Poluentes em Sistema de Reservatório: Modelagem Matemática via Lógica Fuzzy e Aproximação Numérica

E. C. C. Poletti¹,

FEEC – UNICAMP e DDBC, CESET – UNICAMP, 13.484-332,
Limeira/SP.

J. F. C. A. Meyer²,

DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-970, Campinas/SP.

Resumo. Este trabalho relata um estudo da dispersão de poluente em um sistema de reservatório, cuja modelagem matemática se deu através do uso combinado de Lógica Fuzzy e métodos de aproximação numérica. Utilizando a equação diferencial parcial de difusão-advecção, condições iniciais e de contorno são propostas, além de uma possível leitura dos parâmetros da equação onde foram considerados aspectos de imprecisão ou incerteza.

Palavras-chave: *Dispersão de poluentes; lógica fuzzy; aproximação numérica e simulação computacional.*

1. Introdução

A variabilidade na precisão de parâmetros utilizados em estudos nas áreas de Biomatemática em geral, e de Ecologia Matemática em particular,

¹elainec@sceset.unicamp.br

²joni@ime.unicamp.br

é um fator de interesse e de preocupação por parte de pesquisadores, que buscam valores significativos para testes e simulações de cenários compatíveis com a realidade (Bassanezi, 2002).

De acordo com vários estudos, tais previsões estão sempre dependentes de informações que muitas vezes se caracterizam por certo grau de incerteza e imprecisão (Barros, 2001; Barros e Bassanezi, 2006).

Deste modo, este estudo foi realizado buscando nos conjuntos fuzzy uma alternativa a este tipo de problema.

Fornecendo uma resposta aproximada, foi possível modelar e manipular informações imprecisas, muitas vezes baseadas em informações incompletas, ou, ainda que numericamente confiáveis em termos da medida em si, não sejam totalmente confiáveis em termos de variabilidades múltiplas.

2. O Problema

Este estudo foi realizado considerando a situação evolutiva do reservatório de Salto Grande, localizado na cidade de Americana-SP, região que conta atualmente com um dos mais importantes e diversificados parques industriais do Brasil.

Abrangendo indústrias de papel e celulose, têxtil e de couro, alimentícias e metalúrgicas, químicas e de refino de petróleo. A região é tida como a segunda região mais rica do estado e a terceira do país (Espíndola et al., 2004).

O reservatório de Salto Grande é formado pelo represamento das águas do rio Atibaia e outros ribeirões de menor vazão. Está inserida na sub-bacia do rio Atibaia, um dos mananciais de abastecimento público mais importantes da região, pertencente à bacia hidrográfica do rio Piracicaba.

Desde 1977, quando as águas do reservatório podiam ser destinadas ao abastecimento doméstico (após tratamento convencional), recreação, irrigação, entre outros fins, se observa um processo acentuado de deterioração e conseqüente redução de seus usos múltiplos (Espíndola et al., 2004).

O grande aporte de matéria orgânica e inorgânica, transportados prin-

principalmente pelo rio Atibaia, tem levado à minimização de usos múltiplos, afetando a produção de energia, auxiliando no florescimento de algas e surgimento de bactérias, que produzem toxinas e alteram a comunidade aquática, causando problemas de saúde pública e para a biota local.

3. O Modelo Matemático

A equação utilizada neste estudo é conhecida por Equação de Difusão-Advecção, trata-se de uma equação diferencial parcial tradicional em diversos e diferentes estudos ligados a situações gerais e a análises em ecologia matemática (Marchuk, 1986; Meyer e Diniz, 2007).

Incorporando fatores microscópios e macroscópios a equação considera fenômenos de dispersão, na concepção de difusão “efetiva”, como citado e usado, por exemplo, em Marchuk (1986) e Okubo (1980), o transporte advectivo (Edelstein-Keshet, 1988), os fenômenos de decaimento (Bassanezi e Ferreira Jr, 1978) e possíveis fontes de material impactante que possam ocorrer.

Chamando de $c = c(x, y; t)$ a concentração do poluente como a quantidade de matéria existente em um determinado ponto do plano (x, y) no instante (t) com $(x, y; t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times (0, T]$, o modelo pode ser representado genericamente por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \text{div}[\alpha \nabla c] - \text{div}[\vec{V}c] - \sigma c + f, \quad (1)$$

para $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $t \in (0, T] \subset \mathbb{R}$, onde:

1. o termo $\text{div}[\alpha \nabla c]$ representa a difusão;
2. $\text{div}[\vec{V}c]$, modela o transporte advectivo, campo que indica direção e intensidade da velocidade de transporte e considerando $\text{div}[\vec{V}] = 0$;
3. o termo $\sigma(x, y; t)c(x, y; t)$ representa a degradação do poluente; e

4. $f = f(x, y; t)$ modela a fonte, que pode ser pontual.

A fonte de poluição no reservatório será considerada pontual, localizada na parte inferior da fronteira Γ_1 da figura 1.

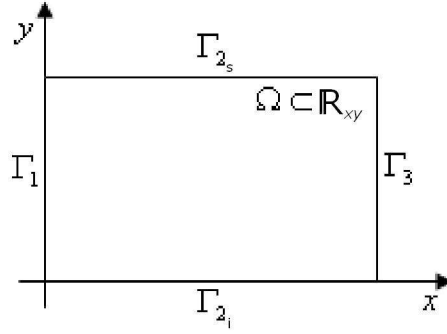


Figura 1: Domínio Ω .

Tomando como condições de contorno as condições de von Neumann homogêneas, tem-se:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_i} = 0, \forall t, (x, y) \in \Gamma_i, i = 1, 2i, 2s, 3, \quad (2)$$

entendendo que não há variação de poluente na fronteira.

As equações (1) e (2) representam o modelo bidimensional para o estudo da dispersão de poluente no reservatório em sua formulação clássica, também denominada formulação forte do problema.

4. Formulação variacional e discretização

Na formulação clássica do problema se exige que a solução seja, no mínimo, de classe C^2 , onde as funções, além de serem contínuas, devem ter também as derivadas segundas contínuas, o que é uma exigência forte para a função.

Deste modo, propõe-se a formulação variacional do problema, que “enfraquece” as condições de regularidade para a solução.

Neste sentido, considerando o espaço abaixo, necessário para a formulação variacional genérica, para uma separação de variáveis espaciais e temporal:

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in L^2 [J, H^1(\Omega)], \text{ com } \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Omega), \forall t \in J \right\}.$$

com $J=(0,T]$ e os produtos internos dados por:

$$\langle u|v \rangle_{0,\Gamma} = \int_{\partial\Omega} u(x,y).v(x,y)d\gamma; \text{ e } (\nabla u|\nabla v)_{0,\Omega} = \iint_{\Omega} \nabla u.\nabla v d\mu.$$

Usando estes produtos internos apropriadamente, se obtém a formulação fraca dada por:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} \middle| v \right)_{\Omega} + \alpha (\nabla c|\nabla v)_{\Omega} + V_1 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \middle| v \right)_{\Omega} + \sigma (c|v)_{\Omega} = (f|v)_{\Omega}, \forall v \in \mathcal{V}. \quad (3)$$

Para a discretização da equação, a escolha foi pelo Método de Elementos Finitos, via método de Garlekin, para a discretização espacial e Crank-Nicolson para a discretização temporal.

Deste modo, obtêm-se aproximações para a solução em variáveis separadas, $c(x,y;t) = \sum_j c_j(t).\varphi_j(x,y)$, onde o sub-índice j refere-se à discretização do domínio considerado e $\{\varphi_j\}$ é uma base para o subespaço $V_h \subset H^1(\Omega)$ de dimensão $N < \infty$.

As funções da base de V_h são escolhidas do tipo linear por partes, satisfazendo:

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

onde (x_j, y_j) são as coordenadas do j -ésimo nó da malha.

Assim, $\forall \varphi_i \in$ base de V_h , se obtém:

$$\begin{aligned} & \sum_j c_j^{n+1} \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\varphi_j|\varphi_i)_{\Omega} + \frac{\alpha}{2} (\nabla \varphi_j|\nabla \varphi_i)_{\Omega} + \frac{V_1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| \varphi_i \right)_{\Omega} + \frac{\sigma}{2} (\varphi_j|\varphi_i)_{\Omega} \right\} \\ & = \sum_j c_j^n \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\varphi_j|\varphi_i)_{\Omega} - \frac{\alpha}{2} (\nabla \varphi_j|\nabla \varphi_i)_{\Omega} - \frac{V_1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| \varphi_i \right)_{\Omega} - \frac{\sigma}{2} (\varphi_j|\varphi_i)_{\Omega} \right\} \\ & + \left(f^{n+\frac{1}{2}} \middle| \varphi_i \right)_{\Omega}. \end{aligned} \quad (5)$$

A ordem das aproximações temporais é, localmente, $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

5. Modelagem dos coeficientes de transporte, degradação e difusão

Propondo uma modelagem através do uso dos conjuntos fuzzy, via sistema de base de regras, para os coeficiente de difusão α , transporte V_1 e de degradação σ o propósito é o de incorporar ao modelo clássico, características intrínsecas de incerteza e imprecisão desses fenômenos.

Um sistema de base de regras possui basicamente quatro componentes: um processador de entrada, um conjunto de base de regras linguísticas, um método de inferência e um processador de saída.

Nesta modelagem são propostos três controladores: um para o coeficiente de transporte $-V_1$, dependente do vento; outro o coeficiente de degradação $-\sigma$, dependente do tipo de ambiente e da quantidade de matéria e, finalmente, o terceiro controlador responsável pela modelagem do coeficiente de difusão $-\alpha$, dependente do transporte e da degradação do poluente.

O sistema de regras linguísticas utilizadas para a modelagem do coeficiente de transporte foi: *vento fraco, moderado, forte e muito forte* resultando em *transporte pequeno, médio, forte e muito forte*.

Para o coeficiente de degradação se utilizou os termos: *ambiente favorável, mediano, desfavorável*; *quantidade de matéria: pouca, quantidade média, muita* resultando em *decaimento baixo, médio baixo, médio, médio alto, alto*.

Finalmente, para o coeficiente da difusão foram utilizadas como entradas as saídas dos dois controladores mencionados anteriormente, transporte e degradação, resultando em *difusão baixa, média baixa, média, média alta, alta*.

As variáveis de entrada e saída foram modeladas matematicamente por conjuntos fuzzy, através de funções de pertinência triangulares e trapezoidais.

Para inferência, foi adotado o método de Mamdani e, como método de defuzzificação, se utilizou o método de Centro de Gravidade.

Assim, a modelagem dos coeficientes foram representadas pelas figuras 2, 3 e 4:

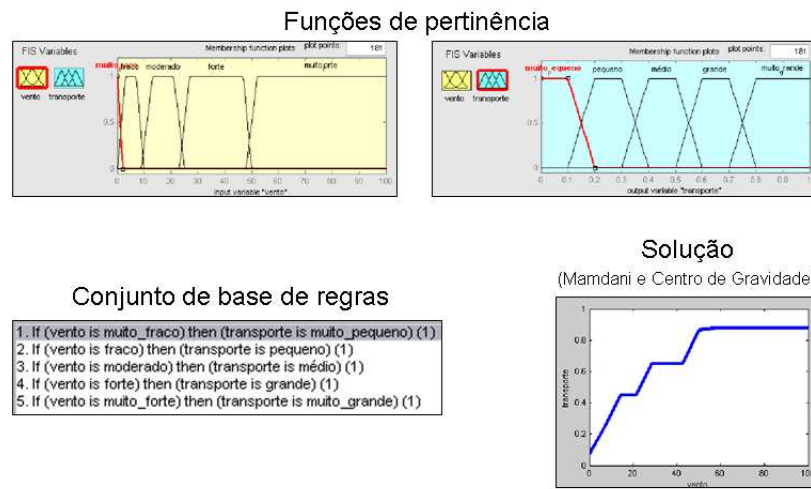


Figura 2: Modelagem do coeficiente de transporte.

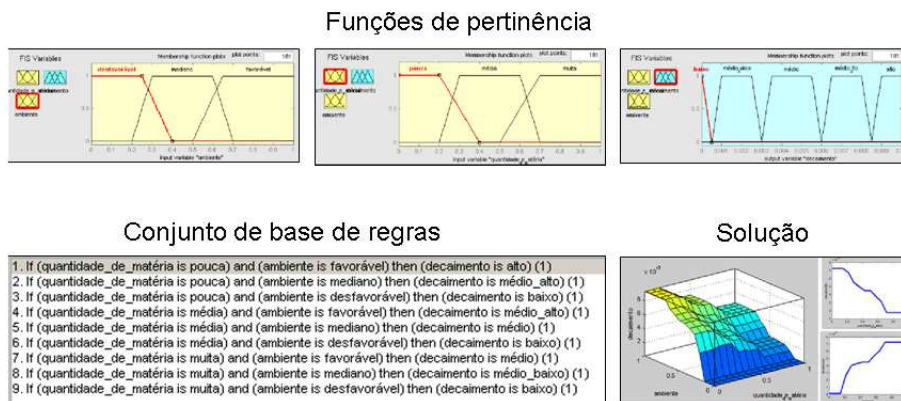


Figura 3: Modelagem do coeficiente de degradação.

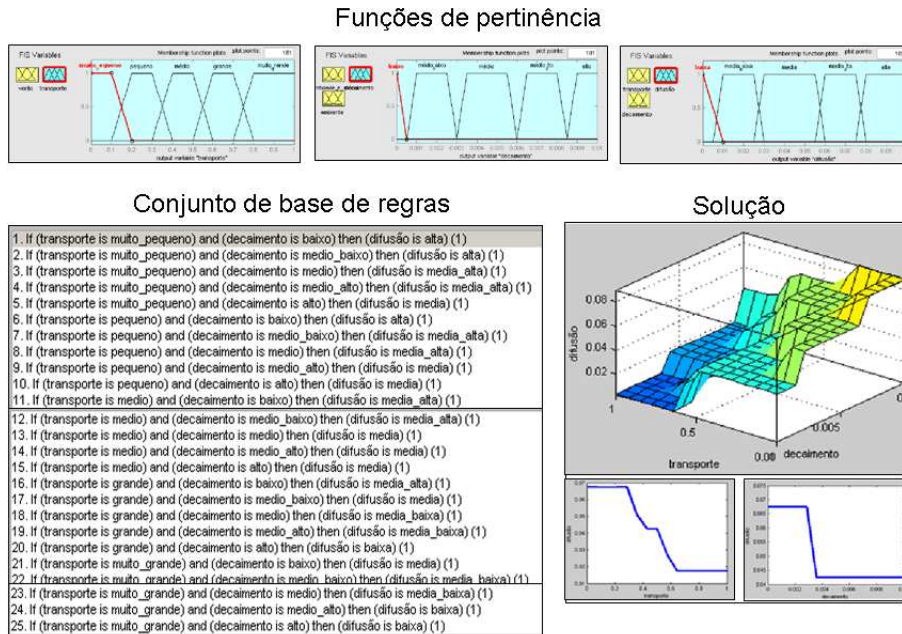


Figura 4: Modelagem do coeficiente de difusão.

6. Resultados

Nas simulações realizadas, foi considerada a dispersão do poluente no reservatório por uma fonte pontual, representando o ingresso de poluente no domínio, além de uma quantidade inicial $c_0 = c(x, y, 0)$ de poluente no reservatório.

Os valores utilizados foram: domínio genérico, retangular, de 12×1 km; $c_0 = 0,5$ unidades de poluente por unidade de área; $f = 0,0875$; $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,05$; vento moderado $V_1 = 0,325$.

A tabela abaixo indica os valores utilizados para a modelagem do coeficiente do decaimento.

Recorrendo a um algoritmo, em ambiente Matlab[®], foram realizadas as simulações computacionais para um período de 5 dias.

Foram gerados nove cenários, variando-se os valores atribuídos para o

Tipo de ambiente	Quantidade de Matéria	Degradação
desfavorável 0,25	pouca 0,2	0,00297
	mediana 0,6	0,00264
	muita 0,75	0,00143
mediano 0,6	pouca 0,2	0,00604
	mediana 0,6	0,00469
	muita 0,75	0,00303
favorável 0,87	pouca 0,2	0,00914
	mediana 0,6	0,00613
	muita 0,75	0,00450

tipo de ambiente e quantidade de matéria. Manteve-se nessas simulações o vento caracterizado por moderado.

A fonte pontual foi considerada no terceiro nó da malha.

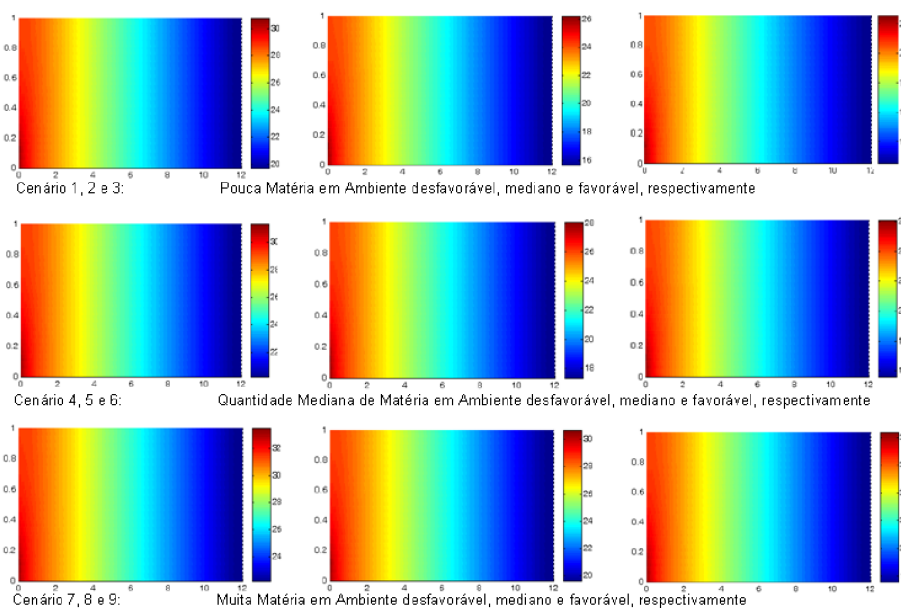


Figura 5: Simulações com condições de fronteira de von Neumann homogêneas.

Os cenários 1, 2 e 3 apresentam a dispersão do poluente, considerando-se vento moderado, pouco material impactante em ambiente desfavorável, mediano e favorável, respectivamente.

Nos cenários 4, 5 e 6, se observa o comportamento do poluente, ainda em situação de vento moderado, mas para uma quantidade mediana de material poluente no meio, em ambiente desfavorável, mediano e favorável, respectivamente.

Finalmente, os cenários 7, 8 e 9 retratam o comportamento do poluente, onde se considerou muito material impactante no meio, em ambiente desfavorável, mediano e favorável, respectivamente.

7. Conclusões

Nas simulações dos cenários apresentados na figura 5 se pode observar um comportamento qualitativamente semelhante, onde as condições do ambiente melhoram, de ambiente desfavorável passando por mediano e chegando a um ambiente favorável ao processo de degradação, em que são menores as concentrações de poluente no reservatório.

Também foi verificada a influência da quantidade de poluente no meio, pois quanto menor essa quantidade, melhores são as condições locais no tocante à poluição.

Conforme observado, as simulações realizadas buscaram investigar o comportamento do poluente num sistema de represamento, que traz por si só, características singulares, quando comparadas a um rio, por exemplo. Num sistema de reservatório a correnteza é praticamente nula, além de funcionar, muitas vezes, como um sistema de tratamento da água, pois muito do material impactante que ingressa num reservatório, acaba se sedimentando no fundo. Por isso, considerar as características do ambiente foi tão importante para esse tipo de sistema.

Referências

- Barros, L. C. (2001). Teoria fuzzy x biomatemática. Acesso à internet. <http://www.ime.usp.br/~tonelli/verao-fuzzy/laecio/minicurso3.pdf>.
- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Coleção Imecc, Textos Didáticos, Vol. 5, Campinas - SP: UNICAMP/IMECC.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino e aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. Contexto: São Paulo.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). *Equações diferenciais com aplicações*. Ed. Harbra, S. Paulo.
- Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical models in Biology*. Random-House, N. York.
- Espíndola, E. L. G., Leite, M. A., e Dornfeld, C. B. (2004). *Reservatório de Salto Grande (Americana, SP): Caracterização, Impactos e Propostas de Manejo*. RiMa: São Carlos.
- Marchuk, G. I. (1986). *Mathematical models in environmental problems: Studies in mathematical and its applications*. North-Holland, Amsterdam.
- Meyer, J. F. C. A. e Diniz, G. L. (2007). Pollutant dispersion in wetland systems: Mathematical modelling and numerical simulation. *Ecological Modelling*, 200(3-4):360–370.
- Okubo, A. (1980). *Diffusion and ecological problems: Mathematical models*. Springer, Berlin.

