

# Sistemas p-fuzzy unidimensionais com condição ambiental

L. R. dos Santos<sup>1</sup>,

DMA, IMECC – Unicamp, Campinas/SP.

R. C. Bassanezi<sup>2</sup>

CMCC – UFABC, Santo André/SP.

**Resumo.** O objetivo deste trabalho é propor um Sistema Dinâmico P-fuzzy para modelar a dinâmica populacional de uma espécie que leve em conta fatores extrínsecos da espécie envolvida. Estes fatores são representados por uma *Condição Ambiental*, que é definida e acoplada ao Sistema P-fuzzy unidimensional. Simulações e experimentos computacionais feitos com o auxílio da *Fuzzy Logic Toolbox* do software *Matlab* são realizados e seus resultados são comentados.

**Palavras-chave:** *Lógica Fuzzy, Sistemas P-fuzzy, Condição Ambiental.*

## 1 Introdução

Denominamos *Sistema Dinâmico P-fuzzy* ao sistema iterativo

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = F(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>lrsantos@ime.unicamp.br

<sup>2</sup>rodney.bassanezi@ufabc.edu.br, rodney@ime.unicamp.br

em que  $F(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k + \Delta(\mathbf{x}_k)$ . Aqui  $\Delta(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^n$  é chamado *variação* e é obtido através da saída defuzzificada de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) (Barros e Bassanezi, 2006). Um sistema p-fuzzy é nada mais do que uma equação de diferenças  $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = \Delta(\mathbf{x}_k)$  (veja: Silva, 2005; Cecconelo, 2006; Peixoto et al., 2007) e sua arquitetura pode ser vista na Figura 1.

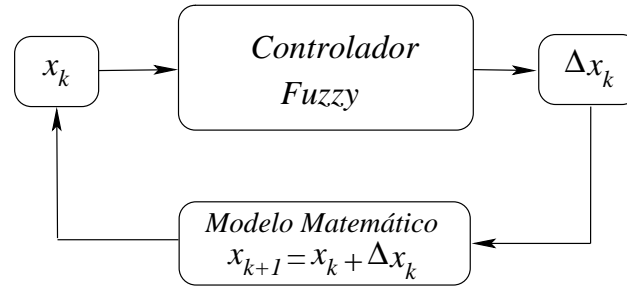


Figura 1: Arquitetura de um Sistema P-fuzzy.

Silva (2005) mostrou que é possível para estender para estes sistemas as noções de existência e equilíbrio de soluções mostrando as condições para elas. Cecconelo (2006) criou um algoritmo para procura de ponto de equilíbrio destes sistemas, quando há condições de existência de solução única.

## 2 Motivação para Condição Ambiental

Quando se está estudando a dinâmica de uma determinada população, muitos modelos, em particular os clássicos, levam em conta apenas fatores intrínsecos da espécie durante a formulação do modelo (Bassanezi e Ferreira Jr., 1988). Por fatores intrínsecos entendemos tamanho ou densidade da população (vide modelo de Malthus), mortalidade e natalidade, fatores genéticos, etc. Os próprios sistemas p-fuzzy levam em conta apenas estes mesmos fatores.

No entanto, devido a complexidade dos fenômenos biológicos, quase sempre, há fatores extrínsecos, ou externos, que são determinantes na dinâ-

mica de uma população e que não são constantes (veja Sæther et al., 2000). Chamaremos estes fatores genericamente de *Condição Ambiental*. Estão englobados fatores como temperatura do ambiente, chuva ou molhamento, seca, poluição, entre outros. Podemos considerar aqui também

É fato que, ao se trabalhar com os modelos clássicos de equações diferenciais ou de diferenças, os parâmetros são escolhidos de tal forma que melhor representem as condições ambientais. Isto nem sempre é feito de maneira satisfatória, em particular, quando os parâmetros são escolhidos como constantes, mesmo que estes parâmetros variem com o tempo. Isso quase sempre é feito por conta da ausência de dados ou no caso de existirem, da dificuldade de modelá-los e representá-los de forma correta.

Quase sempre este tipo de fenômeno requer uma abordagem não-autônoma, quando se utiliza de um modelo baseado em equações diferenciais. Isso pode ser deduzido a partir da constatação de que as condições ambientais são de certa forma, dependentes do tempo.

Tomemos como exemplo uma determinada espécie que tenha seu crescimento diferenciado de acordo com a época do ano. Suponha que este crescimento é maior na temporada de calor. Isso significa que uma condição ambiental (temperatura média), que por sua vez é sazonal, influencia na capacidade reprodutiva dos indivíduos e portanto, as taxas de crescimento serão diferenciadas de acordo com a época que se está observando.

Uma tentativa de modelar um fenômeno sazonal, porém de forma diferente desta descrita acima, foi feita por Solberg et al. (1999). Em seu trabalho, é modelada a variação populacional de uma população cuja densidade está relacionada com variações bruscas do clima, em regiões como o Ártico, e que estão sujeitas a condições extremas de variação. Estas variações, no entanto são consideradas estocásticas.

No modelo que propomos, ao invés de considerarmos essas variações constantes, ou ainda estocásticas, utilizaremos de uma SBRF para determiná-las. Serão apresentados dois modelos, um levando-se em conta apenas uma espécie e o segundo, modificando-se o modelo presa-predador de Kol-

mogorov (Edelstein-Keshet, 2005).

## 3 O modelo Unidimensional com Condição Ambiental

### 3.1 Modelagem

O modelo unidimensional, por ser mais simples, tem o objetivo de mostrar quão robusto é o sistema e além disso auxiliar no processo de entendimento da variação sazonal. Neste caso, utilizaremos um SBRF que não só nos dê a variação em função da própria população mas também leve em conta o período (tempo).

A base de regras deste controlador pode ser construída com auxílio de um especialista em uma aplicação do modelo. Este poderá ajudar na qualificação e quantificação da influência da condição ambiental no sistema. Como nossa modelagem será feita através de sistemas p-fuzzy discretos, iremos em cada interação atualizar os valores do fator ambiental. Isso ficará mais claro adiante.

Neste caso, estamos propondo um modelo teórico e para tal, utilizaremos as seguintes hipóteses:

- (i) A densidade populacional da espécie será representada pela variável *população* ( $x$ ), que utiliza-se dos termos lingüísticos  $\mathcal{T}_x = \{Baixa (B), Média Baixa (MB) e Média Alta (MA) e Alta (A)\}$  para representar subjetivamente seus estados enquanto a variável *variação populacional* ( $\Delta_x$ ) terá seus estados modelados pelos termos  $\mathcal{T}_{\Delta_x} = \{Baixa Negativa (BN), Baixa Positiva (BP), Média Positiva (MP) e Alta Positiva (AP)\}$
- (ii) A taxa de variação da espécie ( $\Delta_x$ ) depende, como nos modelos tradicionais, da densidade populacional da própria espécie porém, o crescimento (ou decréscimo) desta taxa também sofrerá influência da

*sazonalidade*. Explico melhor, a taxa de crescimento da espécie se modificará de acordo com o tempo (estação) em que se encontra;

- (iii) Haverá um crescimento maior nas estações mais quentes e chuvosas. Nas estações mais frias, a espécie diminui sua taxa de natalidade, chegando ao ponto de haver inclusive crescimento negativo (apenas mortalidade) com conseqüente diminuição da quantidade de indivíduos da espécie.
- (iv) As noções de frio, quente, seco e chuvoso, entre outras, são determinantes para o crescimento de muitas espécies. Neste sentido elas estarão neste modelo sendo apresentadas pela variável lingüística *Condição Ambiental* ( $\kappa$ ), cujos termos lingüísticos que as modelam serão  $\mathcal{T}_\kappa = \{Favorável (F), Pouco Favorável (PF), Desfavorável (DF)\}$ . Desta forma, a Condição Ambiental favorecerá em algum grau a taxa de crescimento da espécie em questão.
- (v) A variável  $\kappa$  dependerá do estágio do sistema iterativo ( $k$ ). Isso faz sentido, conforme exposto no item (i), já que  $\kappa$  influenciará na variação  $\Delta_x$  que será variável dependendo da época do ano em que estamos nos situando.
- (vi) De acordo com condição ambiental podemos considerar que mesmo que a população chegue a zero, ela poderão novamente aumentar, desde que o ambiente seja favorável. Em princípio esta hipótese pode parecer estranha, mas basta pensar que muitos tipos de pragas ficam no inverno em estado latente ou de hibernação, indicando que não há infestação por conta de um ambiente desfavorável, porém assim que as condições melhoram, esta latência desaparece, dando lugar a infestação ocorrendo novamente.

A partir de um sistema p-fuzzy unidimensional (veja Equação (1) com  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ ) e das hipóteses acima, vamos inserir a condição ambiental no sistema. Rearranjaremos nosso esquema, com base na Figura 1 que descreve a

arquitetura de um sistema p-fuzzy, de forma que comporte a variável  $\kappa$ . A arquitetura está representada na Figura 2.

Desta maneira nosso sistema terá agora duas entradas, a população ( $x$ ) e condição ambiental ( $\kappa$ ) em cada instante ( $k$ ), e uma saída, variação populacional ( $\Delta_x(x, \kappa)$ ). As funções de pertinência de cada uma das variáveis estão representadas na Figura 3.

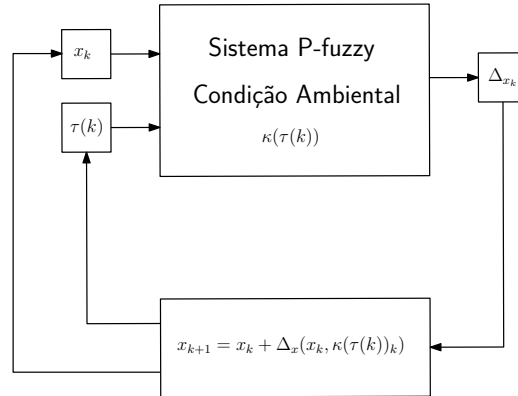


Figura 2: Arquitetura do Sistema P-fuzzy unidimensional com condição ambiental

As funções de pertinência para os termos lingüísticos das variáveis  $x$  (entrada) e  $\Delta_x$  (saída) estão colocadas nas Figuras 3(a) e 3(c).

As funções de pertinência que representam os termos lingüísticos da variável de entrada  $\kappa$ , conforme a Figura 3(b), representam as situações de favorecimento para o crescimento populacional da espécie em questão. É possível observar, através da que essas funções têm como domínio o conjunto  $\mathcal{D} = [0; 180]$ , i. e. ,  $\kappa : \{1, \dots, 180\} \rightarrow [0; 1]$ .

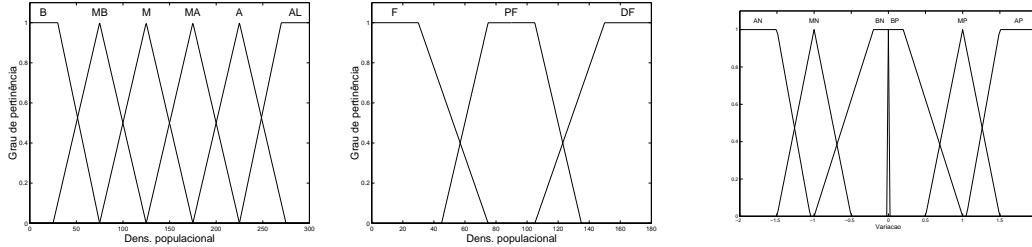
Conforme expusemos nas hipóteses (i) e (v),  $\kappa$  depende de  $k$ . Para nosso modelo estamos considerando um período de 180 iterações, no qual, nas primeiras 60 iterações temos  $\kappa$ , com grau de pertinência no conjunto *Favorável*. Com o passar do tempo, teremos pertinência no conjunto *Pouco Favorável* e a partir da iteração 120 teremos um ambiente desfavorável.

É claro que nosso sistema poderá ter mais do que 180 iterações. Como

estaremos saindo do domínio, consideraremos um ambiente cíclico, isto é, faremos para  $\kappa$  uma iteração correspondente  $k$ , que será uma função  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, 180\}$  definida por

$$\tau(k) = \begin{cases} q \mid q \equiv k \pmod{180}, & \text{se } k \in \{1, \dots, 180\} \\ 180 - q \mid q \equiv k \pmod{180}, & \text{se } k \in \{181, \dots, 360\} \\ \vdots \\ q \mid q \equiv k \pmod{180}, & \text{se } k \in \{N \equiv 180 \pmod{180}, \dots, K\} \end{cases} \quad (2)$$

em que  $k, q, N, K \in \mathbb{N}$  e  $K$  é a quantidade de iterações total desejadas para a simulação numérica.



(a) Função de pertinência da variável  $x$ . (b) Função de pertinência da variável  $\kappa$ . (c) Função de pertinência da variável  $\Delta_x$ .

Figura 3: Funções de pertinência das entradas e saídas do sistema p-fuzzy para dinâmica populacional com condição ambiental.

### 3.2 Construindo a Base de Regras

Para a construção da base de regras do nosso sistema p-fuzzy levamos em conta o que foi colocado nesta subseção hipóteses exaradas acima. A base é constituída de 18 regras que satisfarão a seguinte estrutura:

“Se  $x$  é  $A_r$  e  $\kappa$  é  $B_r$ , então  $\Delta_x$  é  $C_r$ ”.

em que  $A_r \in \mathcal{T}_x$ ,  $B_r \in \mathcal{T}_\kappa$  e  $C_r \in \mathcal{T}_{\Delta_x}$  e  $r \in \{1, \dots, 18\}$  representa a regra em questão. Para facilidade de notação, colocamos as 18 regras em forma

de tabela (veja Tabela 1). Basta então verificarmos qual o termo lingüístico de cada entrada e localizarmos o termo que representa a saída. Assim, se  $x$  é Média Baixa ( $MB$ ) e  $\kappa$  é Favorável ( $F$ ), então a variação  $\Delta_x$  será Alta Positiva ( $AP$ ).

| $x \backslash \kappa$ | Fav. ( $F$ ) | Pouco Fav. ( $PF$ ) | Desfav. ( $DF$ ) |
|-----------------------|--------------|---------------------|------------------|
| Baixa ( $B$ )         | $MP$         | $BP$                | $BN$             |
| Média Baixa ( $MB$ )  | $AP$         | $MP$                | $BN$             |
| Média ( $M$ )         | $AP$         | $AP$                | $MN$             |
| Média Alta ( $MA$ )   | $AP$         | $MP$                | $MN$             |
| Alta ( $A$ )          | $MP$         | $BP$                | $AN$             |
| Altíssima ( $AT$ )    | $BN$         | $MN$                | $AN$             |

Tabela 1: Base de regras para o sistema P-Fuzzy descrito na Equação (3)

Observando a base de regras da Tabela 1, podemos inferir que:

- Quanto mais favorável o ambiente, maior a taxa de crescimento populacional;
- Se o ambiente for favorável, independente da população, teremos sempre crescimento positivo;
- O ambiente desfavorável faz com que a taxa de variação da população seja negativo (mortalidade maior que natalidade);

Podemos assim, escrever o sistema p-fuzzy com condição ambiental da seguinte forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, \kappa(\tau(k))_k) \\ (x_0, \kappa(\tau(0))_0) \in \mathbb{R} \times [0; 180] \end{cases}, \quad (3)$$

em que  $\Delta_x(x_k, \kappa(\tau(k))_k)$  é dado por um SBRF e  $\tau(k)$  obedece a Equação (2). Observemos que nossa SBRF representa uma função  $\Delta : \mathbb{R} \times [0; 180] \rightarrow \mathbb{R}$ . Do ponto de vista variacional, temos uma função do tipo não-autônoma, isto é, variando conforme o tempo (iteração). Além disso temos a função  $\tau$  que



está implicitamente colocada mas que de fato apenas está fazendo com que o domínio de  $\kappa$  seja respeitado.

### 3.3 Experimentos Numéricos

Para que nosso sistema iterativo possa ser implementado, utilizaremos a *Fuzzy Logic Toolbox* do *software* Matlab<sup>®</sup> (Hanselman e Littlefield, 2003), que é um conjunto de funções para se lidar com modelagem Fuzzy.

Para melhor compreensão, mostramos abaixo os passos do algoritmo que foi implementado levando em conta as Equações (2) e (3) e considerando ainda:

- $x_k$  a população na iteração  $k$ ;
- $\kappa(\tau(k))$  a condição ambiental no instante  $\tau(k)$ ;
- $K$  o número final de iterações do sistema p-fuzzy;
- $k_0$  o instante inicial para a função  $\tau$ . Esta constante tem por objetivo determinar qual é a *Condição Ambiental* inicial ( $\kappa_0$ ) da simulação. Explico melhor, observando a Figura 3(b), veremos que para que o ambiente inicial seja por exemplo, exclusivamente *Desfavorável*, é necessário que  $k_0 \in [135; 180]$ ;
- $\tau(k)$  (Equação (2)) faz a transformação entre o instante da iteração e o correspondente para a condição ambiental;
- $\mathcal{F}$  função que representa o SBRF com a base de regras fuzzy da Tabela 1.

---

**Algoritmo 1** Passos para solução do sistema p-fuzzy unidimensional com condição ambiental.

---

**Entrada:**  $x_0, K, k_0, \tau(k_0)$

**Para**  $k$  de 1 até  $K$  **Faça**

$$\Delta_x \leftarrow \mathcal{F}(x_k, \kappa(\tau(k)_k))$$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_x$$

**Fim**

**Saída:**  $x_K$

---

As seções abaixo mostram os resultados de nossa modelagem. Observe-se que, conforme era de se esperar, temos um ambiente cíclico, que depende não só da dinâmica populacional, mas também, e principalmente da Condição Ambiental. Ressalte-se que através das simulações, foi possível também afinar a base de regras.

As simulações foram feitas variando-se 3 parâmetros na entrada do sistema: o ponto inicial  $x_0$ , a condição ambiental inicial  $k_0$  e a quantidade de iterações total  $K$ . Na legenda de cada figura estão exarados os valores de cada parâmetro.

### 3.3.1 Experimentos Parte I

No primeiro experimento, vamos utilizar como ponto inicial  $x_0 = 40$  e  $K = 300$ , ou seja, teremos 300 iterações. Em cada um dos gráficos representados na Figura 4 foram feitas variações apenas na condição ambiental inicial, conforme se encontra mostrado nas legendas. Neste experimento, observa-se que, por conta da quantidade de iterações, ao final delas, o sistema estará com praticamente a mesma densidade populacional. Isso vem ao encontro da idéia de que a sazonalidade é um fator importantíssimo na determinação da variação de uma população e representa bem este fenômeno. Além disso consegue-se verificar que em um ambiente desfavorável a densidade populacional quase fica nula, porém com a mudança de estação, a população cresce normalmente.

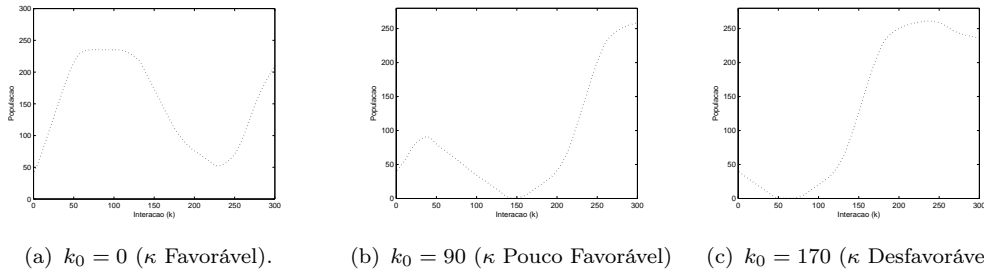


Figura 4: Soluções do sistema p-fuzzy com  $x_0 = 40$ ,  $K = 300$  e condição ambiental variando.

### 3.3.2 Experimentos Parte II

Neste segundo experimento, trocamos o ponto inicial para  $x_0 = 150$  (Figura 5) para  $x_0 = 250$  (Figura 6) e continuamos com  $K = 300$  (iterações). Novamente em cada um dos gráficos representados, foram feitas variações apenas na condição ambiental inicial. Aqui novamente a sazonalidade fica bem evidenciada e temos então um ambiente periódico como queríamos. Com a população inicial mais alta, vemos que mesmo nos períodos desfavoráveis, ainda temos uma densidade populacional considerável.

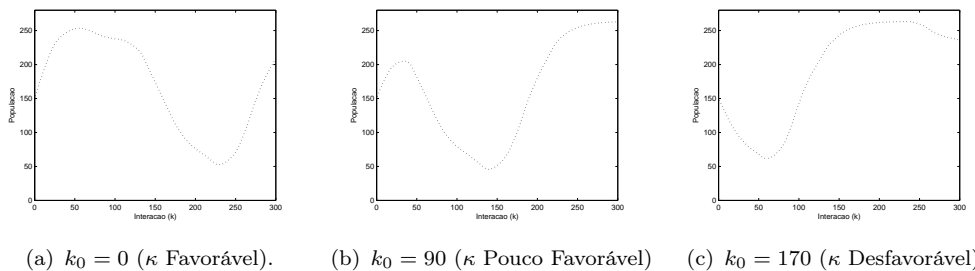


Figura 5: Soluções do sistema p-fuzzy com  $x_0 = 150$ ,  $K = 300$  e condição ambiental variando.

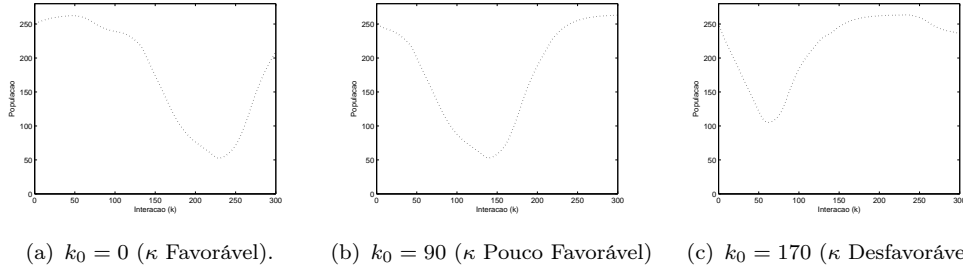


Figura 6: Soluções do sistema p-fuzzy com  $x_0 = 250$ ,  $K = 300$  e condição ambiental variando.

### 3.3.3 Experimentos Parte III

A idéia neste terceiro experimento é mostrar que com mais iterações, temos realmente uma modelagem periódica. A Figura 7 mostra uma periodicidade advinda da condição ambiental. Por conta disso, por exemplo, na Figura 7(a), temos que no final das interações a população está baixa, o que não ocorre nas outras duas simulações.

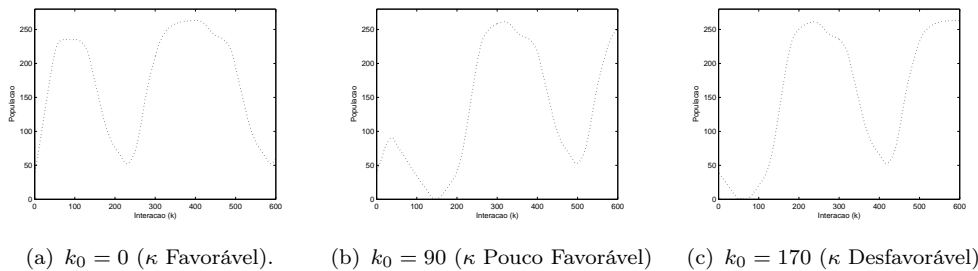


Figura 7: Soluções do sistema p-fuzzy com  $x_0 = 40$ ,  $K = 600$  e condição ambiental variando.

## 4 Conclusão

Neste trabalho mostramos que é possível utilizar uma SBRF para modelar o comportamento da densidade populacional de uma espécie quando

se que levar em conta as mudanças das condições ambientais que ocorrem quando se quer levar em conta o tempo como fator determinante da variação populacional desta espécie. Os experimentos mostram que as condições ambientais servem como instrumento para a construção de sistemas p-fuzzy periódicos.

## Referências

- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de lógica fuzzy e bio-matemática*, volume 5 of *Coleção IMECC - Textos Didáticos*. IMECC–Unicamp, Campinas/SP.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais com aplicações*. Habra, São Paulo.
- Cecconelo, M. S. (2006). *Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. Dissertação de Mestrado, IMECC–Unicamp, Campinas.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical Models in Biology*. SIAM – Society for Industrial & Applied.
- Hanselman, D. e Littlefield, B. (2003). *MATLAB 6: curso completo*. Prentice-Hall, São Paulo.
- Peixoto, M. S., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2007). Uma Abordagem Fuzzy para um Modelo Presa-predador Acoplado ao Parasitismo. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, 8(1):119–128.
- Sæther, B.-E., Tufto, J., Engen, S., Jerstad, K., Røstad, O. W., e Skåtán, J. E. (2000). Population dynamical consequences of climate change for a small temperate songbird. *Science*, 287(5454):854–856.

Silva, J. D. M. (2005). *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos p-Fuzzy com Aplicações em Biomatemática*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas.

Solberg, E., Sæther, B.-E., Strand, O., e Loison, A. (January 1999). Dynamics of a harvested moose population in a variable environment. *Journal of Animal Ecology*, 68:186–204(19).