

# Estabilidade de sistemas baseados em regras fuzzy e a função de Lyapunov

L. C. de Barros<sup>1</sup>,  
IMECC, UNICAMP, 13.083-970, Campinas/SP.

M. B. F. Leite<sup>2</sup>,  
CEATEC-PUC-Campinas, 13.086-900, Campinas/SP.

R. Z. G. Oliveira<sup>3</sup>,  
DM, UNESP, 13.500-230, Rio Claro/SP.

R. C. Bassanezi<sup>4</sup>,  
DM, UFABC, 09.210-170, Santo André/SP.

**Resumo.** Neste trabalho aplicamos a metodologia de controladores fuzzy, do tipo Mamdani, para descrever a dinâmica de sistemas evolutivos parcialmente conhecidos. Estados de equilíbrios são estudados a partir da base de regras e a estabilidade é investigada usando o método direto de Lyapunov. Finalmente, um modelo epidemiológico do tipo SIS é estudado a partir da metodologia proposta.

**Palavras-chave:** sistemas fuzzy, ponto de equilíbrio, função de Lyapunov.

---

<sup>1</sup>laeciob@ime.unicamp.br

<sup>2</sup>bialeite@puc-campinas.edu.br

<sup>3</sup>rzotin@rc.unesp.br

<sup>4</sup>rodney@ime.unicamp.br

## 1 Introdução

Modelos clássicos de Dinâmica Populacional e/ou Epidemiologia, em geral, são dados por um sistema de equações diferenciais. Neste caso, os parâmetros dos modelos são frequentemente tomados como valores médios obtidos a partir de um conjunto de dados, de tal maneira que o modelo passa a ser deterministicamente conhecido. No entanto, admitindo-se incerteza devido ao conhecimento parcial, o que é comum em fenômenos biológicos (Krivan e Colombo, 1998), uma alternativa é modelar tal conhecimento a partir de um conjunto de regras da forma *se-então*. Mais diretamente falando, o comum é adotar uma equação

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad (1)$$

para representar o sistema dinâmico, onde o campo  $f$  representa a variação, a partir da qual a evolução do sistema é estudada. A questão que se coloca é: como podemos analisar o sistema (1) se o mesmo for parcialmente conhecido? A idéia é adotar um modelo linguístico capaz de captar as informações disponíveis do modelo, via de regra, junto a um especialista. Em Barros e Bassanezi (2006) e Dias (2006) é proposta uma metodologia para estimar soluções de equações diferenciais utilizando controladores fuzzy (Klir e Yuan, 1995), na qual as variáveis de estado são as entradas e as saídas, são as variações do estado. Como estamos diante de um sistema dinâmico, ainda que parcialmente conhecido, é natural investigarmos a existência de equilíbrios bem como estabilidade dos mesmos.

## 2 Equilíbrio e estabilidade de sistemas baseados em regras

O conceito de equilíbrio de um sistema baseado em regras é o mesmo de equações diferenciais, isto é, estados cuja variação é nula. Porém, neste caso, a investigação de tal equilíbrio é realizada a partir da base de regras.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de pontos de equilíbrio é que haja mudança de sinal nos consequentes de uma base de regras ordenada, cujas funções de pertinência são contínuas (Silva, 2005).

O estudo de estabilidade do equilíbrio será realizado pelo método direto de Lyapunov, o qual se utiliza de uma função  $V(x)$  positiva definida, numa vizinhança  $U$  do equilíbrio  $\bar{x}$ . Tal método diz que, num equilíbrio  $\bar{x}$  devemos ter  $V(\bar{x}) = 0$ ,  $V(x) > 0$  para  $x$  em  $U - \{\bar{x}\}$  (Hale e Koçak, 1991). Assim,

- se  $V'(x) < 0$  em  $U - \{\bar{x}\}$ , então o equilíbrio é assintoticamente estável.
- se  $V'(x) > 0$  em  $U - \{\bar{x}\}$ , o equilíbrio será instável.

Em Margaliot e Langholz (1999) também é utilizada a função de Lyapunov no estudo de sistemas baseados em regras fuzzy. Porém, neste artigo citado, diferentemente do nosso, essa função é utilizada para ajudar a construir a base de regras e não para estudar a estabilidade de equilíbrios, como se faz tradicionalmente em sistemas dinâmicos. A nosso ver, a metodologia sugerida em Margaliot e Langholz (1999) torna-se um tanto limitada, já que o sistema fica “calibrado” por uma função de Lyapunov arbitrariamente escolhida. Ou seja, o modelo matemático deve se adequar a essa função, de tal forma que a adoção de outra função de Lyapunov possivelmente resultaria em um modelo diferente do primeiro. Isso, do ponto de vista de modelagem, poderia descaracterizar o fenômeno em questão.

Note que para um sistema baseado em regras fuzzy não temos em mãos o campo de direções  $f$  que aparece em (1). Dessa forma, o estudo de estabilidade por meio do sinal dos autovalores do sistema linearizado torna-se inviável. Esse foi o motivo que nos levou a explorar o método direto de Lyapunov, já que a função  $V(x)$ , mesmo nas equações diferenciais clássicas, pode ser escolhida independentemente do conhecimento do campo  $f$ .

### 3 Um exemplo

Para ilustrar nossa metodologia vamos estudar o sistema SIS (suscetível-infectado-suscetível) com dinâmica vital e população total constante. Essa hipótese faz com que  $S + I = N$  e, do ponto de vista de dinâmica, basta investigarmos a evolução de uma das classes, (suscetíveis, por exemplo) que a outra é obtida pelo complementar ( $I = N - S$ ). Assim, adotaremos  $S$  como variável de estado e entrada do sistema fuzzy enquanto a variação específica  $(1/S)dS/dt$  é a saída do sistema.

O modelo epidemiológico SIS pressupõe que indivíduos não adquirem imunidade, isto é, cada infectado que se recupera passa a ser suscetível imediatamente (Keshet, 1988). Essa hipótese faz com que as regras sejam norteadas pelo seguinte raciocínio: quando o número de suscetíveis é pequeno, surgem poucos casos novos de infectados, o que contribui para que a classe de suscetíveis não diminua. Além disso, como a população total é constante e todos os indivíduos nascem suscetíveis, a população de suscetíveis aumenta. Por outro lado, à medida que o número de suscetíveis vai crescendo, novos casos da doença vão surgindo, de forma que a variação na classe de suscetíveis (embora ainda positiva) diminua. Quando o número de suscetíveis é suficientemente grande (neste caso denominado como "alto"), o número de novos casos de infecção também cresce e isso faz com que a variação na classe dos indivíduos suscetíveis passe a ser negativa.

Resumidamente escolhemos as regras fuzzy abaixo para nosso sistema:

Se  $S$  for baixo ( $B$ ) então  $(1/S)dS/dt$  é altoPositivo ( $AP$ ).

Se  $S$  for médioBaixo ( $mB$ ) então  $(1/S)dS/dt$  é baixoPositivo ( $bP$ ).

Se  $S$  for médioAlto ( $mA$ ) então  $(1/S)dS/dt$  é baixoPositivo ( $bP$ ).

Se  $S$  for alto ( $A$ )  $(1/S)dS/dt$  é baixoNegativo ( $bN$ ).

Cada termo: baixo, médioBaixo, alto, ... é modelado por um conjunto fuzzy (Barros e Bassanezi, 2006) com as funções de pertinência ilustradas

nas Figuras 1 e 2.

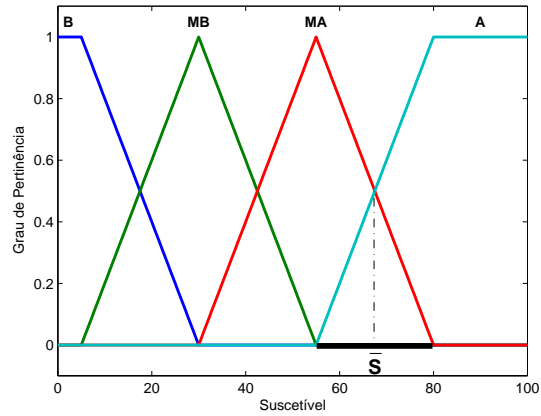


Figura 1: Funções de pertinência para  $S$ .

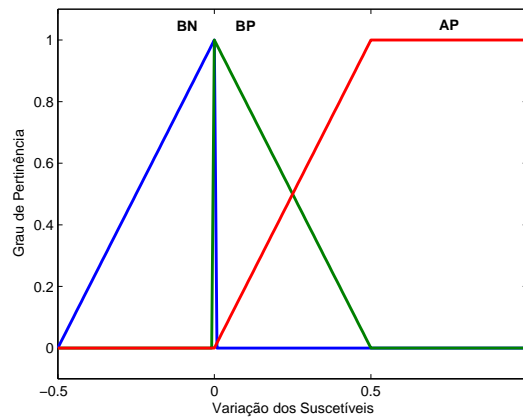


Figura 2: Funções de pertinência para  $(1/S)dS/dt$ .

Com as funções de pertinência escolhidas (contínuas) para os conjuntos fuzzy da base de regras, de acordo com Silva (2005), o estado de equilíbrio  $\bar{S}$  existe e é obtido pela intersecção entre os conjuntos fuzzy médioAlto e Alto, antecedentes das terceira e quarta regras. Isso é consequência da troca de

sinais nos consequentes dessas regras - baixoPositivo e baixoNegativo. Assim,  $\bar{S} = 67,5$  (veja Figura 1). Mais ainda, como esses consequentes passam de positivo para negativo (veja Figura 2), a saída  $F(s)$  do sistema fuzzy é tal que, para  $s$  numa vizinhança  $U - \{\bar{S}\}$ ,  $F(s) > 0$  se  $s < \bar{S}$  e  $F(s) < 0$  se  $s > \bar{S}$  (veja Figura 3).

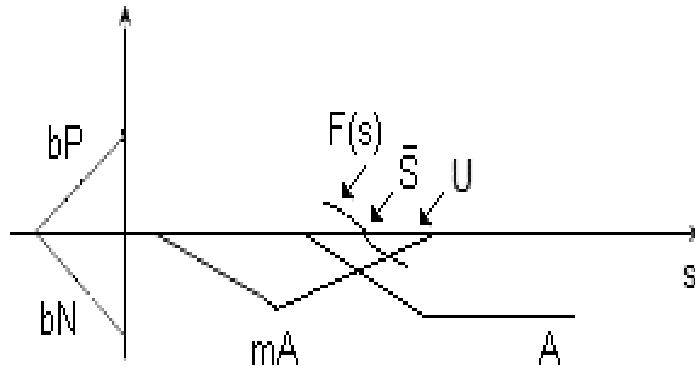


Figura 3: Vizinhança  $U$  em que a saída  $F(s)$  do sistema fuzzy troca de sinal.

Agora, claramente,  $V(s) = (1/2)(s - \bar{S})^2$  é uma função positiva definida e  $V'(s) = \nabla V(s) \cdot F(s) = (s - \bar{S})F(s) < 0$  para todo  $s$  em  $U - \{\bar{S}\}$ . Logo,  $V(s)$  é uma função de Lyapunov e  $\bar{S}$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Consequentemente, a doença tende a se estabilizar no equilíbrio  $(\bar{S}, N - \bar{S})$ .

Simulações numéricas foram realizadas para obtermos  $S$  e  $I$  como funções de  $t$ , usando software Matlab e o método de Euler. Usando o método de Runge-Kutta os resultados são similares. Podemos visualizar a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio na figura 4, considerando como condições iniciais  $S(0)=80$  e  $I(0)=20$ .

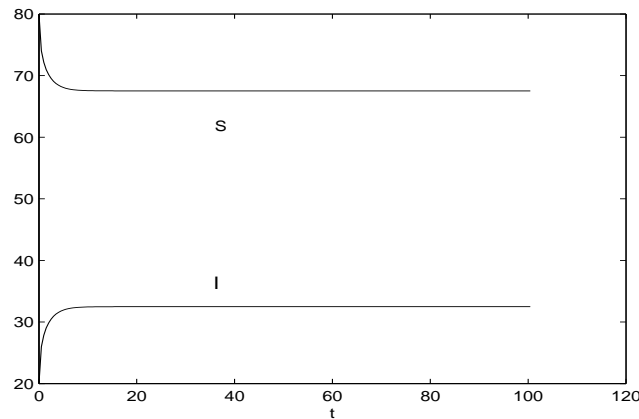


Figura 4: Evolução temporal dos suscetíveis e infectados com condições iniciais  $S(0)=80$  e  $I(0)=20$ .

## 4 Comentários finais

Aqui propomos uma metodologia para se estudar estabilidade de equilíbrios para sistemas cujo campo de direções é parcialmente conhecido e dado por uma base de regras fuzzy. O método de inferência fuzzy adotado foi aquele conhecido na literatura por inferência de Mamdani (Amendola et al., 2005). Queremos ressaltar que o método de inferência de Takagi-Sugeno (Massad et al., 2008) também poderia ser utilizado e, nesse caso, poder-se-ia ter explicitamente a saída do controlador, representando o campo de direções da equação diferencial, e aí a metodologia aqui proposta ficaria semelhante à que se encontra na literatura de equações diferenciais, com a observação que o equilíbrio seria obtido via base de regras. O estudo da estabilidade dos estados de equilíbrio poderia ser feito por meio da linearização da saída do sistema fuzzy, uma vez que o método de Takagi-Sugeno fornece explicitamente tal saída.

No caso do modelo SIS com população total constante e dinâmica vital, analisado acima, a metodologia utilizada pode facilitar a estimativa de im-

portantes parâmetros epidemiológicos, que determinam sob quais condições a doença se propaga na população. A obtenção desses parâmetros nos modelos determinísticos clássicos envolve o conhecimento de taxas nem sempre fáceis de serem medidas (como a taxa de contato, por exemplo). A partir de taxas demográficas e valores conhecidos para uma doença específica (como taxa de recuperação), podemos estimar o valor de reprodutibilidade basal a partir das funções de pertinência, que nos modelos determinísticos envolve o conhecimento das taxas de natalidade, recuperação e contato.

Essa mesma metodologia pode ser aplicada num sistema bidimensional, como os modelos SIR e SIRS.

## Agradecimentos

O primeiro autor agradece o suporte financeiro da FAPESP, processo no. 06/05920-7 e CNPq, processo no. 307890/2006-6.

## Referências

- Amendola, M., Souza, A. L., e L.C.Barros (2005). Manual do uso da teoria dos conjuntos fuzzy no matlab 6.5, versão 2005 do manual apresentado no ciclo de palestras/2004. Disponível em " <http://www.ime.unicamp.br/laeciob>, acesso em 17.8.2005.
- Barros, L. e Bassanezi, R. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5. Coleção IMECC-Textos Didáticos, Campinas-SP.
- Dias, M. (2006). Equações diferenciais ordinárias com campo de direções parcialmente conhecido. Dissertação de Mestrado.
- Hale, J. e Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer, New York.



- Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*. Random House New York, New York.
- Klir, G. e Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic - theory and applications*. Prentice Hall.
- Krivan, V. e Colombo, G. (1998). A non-stochastic approach for modeling uncertainty in population dynamics. *Bulletin of Mathematical Biology*, 60:721–751.
- Margaliot, M. e Langholz, G. (1999). Fuzzy lyapunov approach to the design of fuzzy controllers. *Fuzzy sets and systems*, 106:49–59.
- Massad, E., Ortega, N. S., Barros, L., e Struchiner, C. (2008). *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond (Studies in Fuziness and Soft Computing)*. Springer, New York.
- Silva, J. D. M. (2005). *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos p-fuzzy com aplicações em Biomatemática*. PhD thesis, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.

