Bio Matemática

19

IMECC – UNICAMP
Campinas
2009
ISSN 1679-365X

Dança nupcial – *Dryas iulia* (Julia)– Foto: G.L. Diniz

Conselho Editorial

- Rodney C. Bassanezi (Coordenador) –UFABC.
- João Frederico C. A. Meyer – UNICAMP.
- Laécio C. Barros – UNICAMP.
- Laércio L. Vendite – UNICAMP.
- Sílvio A. Pregnolatto – UNICAMP.
- Wilson C. Ferreira Jr. – UNICAMP.
- Geraldo L. Diniz– UFMT.

Acesso on-line:
http://www.ime.unicamp.br/∼biomat/revistas.htm

Prefácio:

"*...Conforme a complexidade de um sistema aumenta, nossa habilidade de fazer afirmações precisas e significativas sobre seu comportamento diminui, até um limiar em que a precisão e relevância tornam-se praticamente características mutuamente exclusivas.*"

Princípio da Incompatibilidade L. Zadeh.

"Quando as leis da matemática se referem à realidade, elas não são certas. E se são certas, não se referem à realidade".

Einstein.

Comissão Editorial. Campinas, 19 de agosto de 2009

Índice

Estabilidade de sistemas baseados em regras fuzzy e a função de Lyapunov, L. C. Barros, M. B. F. Leite, R. Z. G. Oliveira & R. C. Bassanezi ____ 1

Sistemas p-fuzzy unidimiensionais com condição ambiental, L. R. dos Santos & R. C. Bassanezi ____ 15

Modelo probabilístico para uma variável fuzzy, M. Missio & L. C. Barros ____ 25

Um modelo evolutivo para a dengue em domínio bidimensional considerando fatores ambientais, L. T. Gomes & L. C. Barros ____ 39

Dispersão de poluentes em sistema de reservatório: modelagem matemática via lógica fuzzy e aproximação numérica, E. C. C. Poletti & J. F. C. A. Meyer ____ 57

Dinâmica populacional com sistemas p-fuzzy: um estudo de caso para a cidade de Sorocaba, J. A. F. Roveda, S. R. M. M. Roveda & A. C. G. Martins ____ 69

Sobre o ponto de inflexão em modelos de crescimento inibido com condição inicial fuzzy, M. Cecconello, A. J. V. Brandão & R. C. Bassanezi ____ 81

Modelagem matemática e computacional para a ação das células-tronco na manutenção e regeneração de tecidos vivos, N. M. Gualberto & C. H. C. Moreira ____ 99

A Sobrevivência do vírus varicela-zoster, A. L. Vieira & L. T. Takahashi ____ 109

Biomatemática ***19*** *(2009), 1–10* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Estabilidade de sistemas baseados em regras fuzzy e a função de Lyapunov

L. C. de Barros[1],
IMECC, UNICAMP, 13.083-970, Campinas/SP.

M. B. F. Leite[2],
CEATEC-PUC-Campinas, 13.086-900, Campinas/SP.

R. Z. G. Oliveira[3],
DM, UNESP, 13.500-230, Rio Claro/SP.

R. C. Bassanezi[4],
DM, UFABC, 09.210-170, Santo André/SP.

Resumo. Neste trabalho aplicamos a metodologia de controladores fuzzy, do tipo Mamdani, para descrever a dinâmica de sistemas evolutivos parcialmente conhecidos. Estados de equilíbrios são estudados a partir da base de regras e a estabilidade é investigada usando o método direto de Lyapunov. Finalmente, um modelo epidemiológico do tipo SIS é estudado a partir da metodologia proposta.

Palavras-chave: *sistemas fuzzy, ponto de equilíbrio, função de Lyapunov.*

[1]laeciocb@ime.unicamp.br
[2]bialeite@puc-campinas.edu.br
[3]rzotin@rc.unesp.br
[4]rodney@ime.unicamp.br

1 Introdução

Modelos clássicos de Dinâmica Populacional e/ou Epidemiologia, em geral, são dados por um sistema de equações diferenciais. Neste caso, os parâmetros dos modelos são frequentemente tomados como valores médios obtidos a partir de um conjunto de dados, de tal maneira que o modelo passa a ser deterministicamente conhecido. No entanto, admitindo-se incerteza devido ao conhecimento parcial, o que é comum em fenômenos biológicos (Krivan e Colombo, 1998), uma alternativa é modelar tal conhecimento a partir de um conjunto de regras da forma *se-então*. Mais diretamente falando, o comum é adotar uma equação

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{1}$$

para representar o sistema dinâmico, onde o campo f representa a variação, a partir da qual a evolução do sistema é estudada. A questão que se coloca é: como podemos analisar o sistema (1) se o mesmo for parcialmente conhecido? A idéia é adotar um modelo linguístico capaz de captar as informações disponíveis do modelo, via de regra, junto a um especialista. Em Barros e Bassanezi (2006) e Dias (2006) é proposta uma metodologia para estimar soluções de equações diferenciais utilizando controladores fuzzy (Klir e Yuan, 1995), na qual as variáveis de estado são as entradas e as saídas, são as variações do estado. Como estamos diante de um sistema dinâmico, ainda que parcialmente conhecido, é natural investigarmos a existência de equilíbrios bem como estabilidade dos mesmos.

2 Equilíbrio e estabilidade de sistemas baseados em regras

O conceito de equilíbrio de um sistema baseado em regras é o mesmo de equações diferenciais, isto é, estados cuja variação é nula. Porém, neste caso, a investigação de tal equilíbrio é realizada a partir da base de regras.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de pontos de equilíbrio é que haja mudança de sinal nos consequentes de uma base de regras ordenada, cujas funções de pertinência são contínuas (Silva, 2005).

O estudo de estabilidade do equilíbrio será realizado pelo método direto de Lyapunov, o qual se utiliza de uma função $V(x)$ positiva definida, numa vizinhança U do equilíbrio $\overline{x}$. Tal método diz que, num equilíbrio $\overline{x}$ devemos ter $V(\overline{x}) = 0$, $V(x) > 0$ para x em $U - \{\overline{x}\}$ (Hale e Koçak, 1991). Assim,

- se $V'(x) < 0$ em $U - \{\overline{x}\}$, então o equilíbrio é assintoticamente estável.
- se $V'(x) > 0$ em $U - \{\overline{x}\}$, o equilíbrio será instável.

Em Margaliot e Langholz (1999) também é utilizada a função de Lyapunov no estudo de sistemas baseados em regras fuzzy. Porém, neste artigo citado, diferentemente do nosso, essa função é utilizada para ajudar a construir a base de regras e não para estudar a estabilidade de equilíbrios, como se faz tradicionalmente em sistemas dinâmicos. A nosso ver, a metodologia sugerida em Margaliot e Langholz (1999) torna-se um tanto limitada, já que o sistema fica "calibrado" por uma função de Lyapunov arbitrariamente escolhida. Ou seja, o modelo matemático deve se adequar a essa função, de tal forma que a adoção de outra função de Lyapunov possivelmente resultaria em um modelo diferente do primeiro. Isso, do ponto de vista de modelagem, poderia descaracterizar o fenômeno em questão.

Note que para um sistema baseado em regras fuzzy não temos em mãos o campo de direções f que aparece em (1). Dessa forma, o estudo de estabilidade por meio do sinal dos autovalores do sistema linearizado torna-se inviável. Esse foi o motivo que nos levou a explorar o método direto de Lyapunov, já que a função $V(x)$, mesmo nas equações diferenciais clássicas, pode ser escolhida independentemente do conhecimento do campo f.

3 Um exemplo

Para ilustrar nossa metodologia vamos estudar o sistema SIS (suscetível-infectado-suscetível) com dinâmica vital e população total constante . Essa hipótese faz com que $S+I=N$ e, do ponto de vista de dinâmica, basta investigarmos a evolução de uma das classes, (suscetíveis, por exemplo) que a outra é obtida pelo complementar ($I=N-S$). Assim, adotaremos S como variável de estado e entrada do sistema fuzzy enquanto a variação específica $(1/S)dS/dt$ é a saída do sistema.

O modelo epidemiológico SIS pressupõe que indivíduos não adquirem imunidade, isto é, cada infectado que se recupera passa a ser suscetível imediatamente (Keshet, 1988). Essa hipótese faz com que as regras sejam norteadas pelo seguinte raciocínio: quando o número de suscetíveis é pequeno, surgem poucos casos novos de infectados, o que contribui para que a classe de suscetíveis não diminua. Além disso, como a população total é constante e todos os indivíduos nascem suscetíveis, a população de suscetíveis aumenta. Por outro lado, à medida que o número de suscetíveis vai crescendo, novos casos da doença vão surgindo, de forma que a variação na classe de suscetíveis (embora ainda positiva) diminua. Quando o número de suscetíveis é suficientemente grande (neste caso denominado como "alto"), o número de novos casos de infecção também cresce e isso faz com que a variação na classe dos indivíduos suscetíveis passe a ser negativa.

Resumidamente escolhemos as regras fuzzy abaixo para nosso sistema:

Se S for baixo (B) então $(1/S)dS/dt$ é altoPositivo (AP).
Se S for médioBaixo (mB) então $(1/S)dS/dt$ é baixoPositivo (bP).
Se S for médioAlto (mA) então $(1/S)dS/dt$ é baixoPositivo (bP).
Se S for alto (A) $(1/S)dS/dt$ é baixoNegativo (bN).

Cada termo: baixo, médioBaixo, alto, ... é modelado por um conjunto fuzzy (Barros e Bassanezi, 2006) com as funções de pertinência ilustradas

nas Figuras 1 e 2.

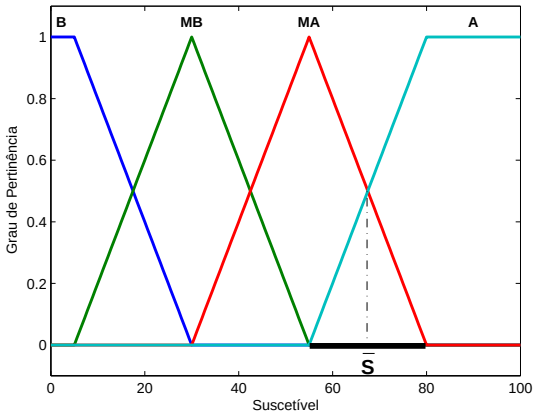


Figura 1: Funções de pertinência para S.

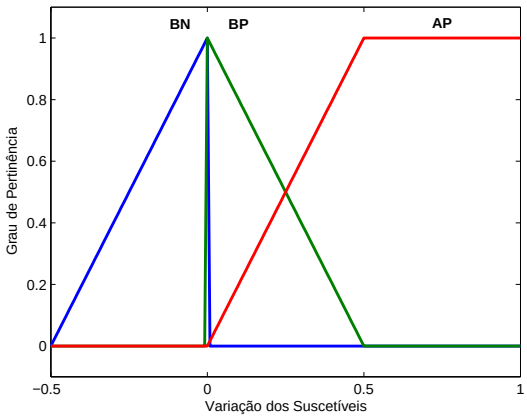


Figura 2: Funções de pertinência para (1/S)dS/dt.

Com as funções de pertinência escolhidas (contínuas) para os conjuntos fuzzy da base de regras, de acordo com Silva (2005), o estado de equilíbrio $\overline{S}$ existe e é obtido pela intersecção entre os conjuntos fuzzy médioAlto e Alto, antecedentes das terceira e quarta regras. Isso é consequência da troca de

sinais nos consequentes dessas regras - baixoPositivo e baixoNegativo. Assim, $\overline{S} = 67,5$ (veja Figura 1). Mais ainda, como esses consequentes passam de positivo para negativo (veja Figura 2), a saída $F(s)$ do sistema fuzzy é tal que, para s numa vizinhança $U - \{\overline{S}\}$, $F(s) > 0$ se $s < \overline{S}$ e $F(s) < 0$ se $s > \overline{S}$ (veja Figura 3).

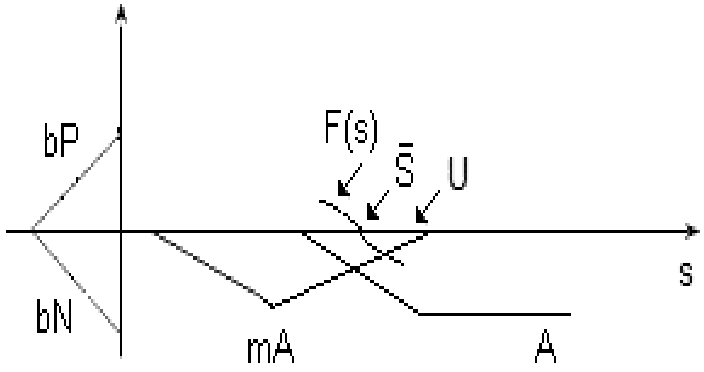


Figura 3: Vizinhança U em que a saída $F(s)$ do sistema fuzzy troca de sinal.

Agora, claramente, $V(s) = (1/2)(s - \overline{S})^2$ é uma função positiva definida e $V'(s) = \nabla V(s).F(s) = (s - \overline{S})F(s) < 0$ para todo s em $U - \{\overline{S}\}$. Logo, $V(s)$ é uma função de Lyapunov e $\overline{S}$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Consequentemente, a doença tende a se estabilizar no equilíbrio ($\overline{S}$, N-$\overline{S}$).

Simulações numéricas foram realizadas para obtermos S e I como funções de t, usando software Matlab e o método de Euler. Usando o método de Runge-Kutta os resultados são similares. Podemos visualizar a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio na figura 4, considerando como condições iniciais S(0)=80 e I(0)=20.

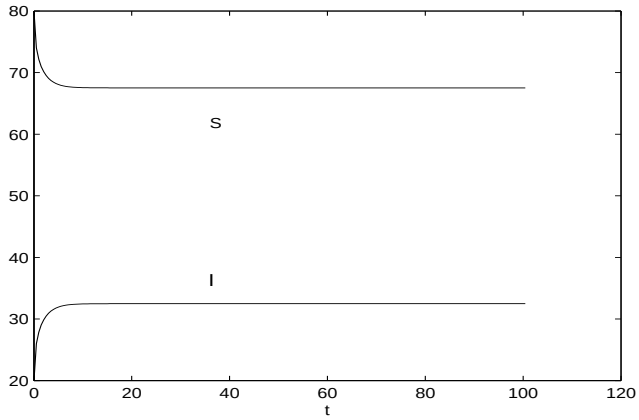


Figura 4: Evolução temporal dos suscetíveis e infectados com condições iniciais S(0)=80 e I(0)= 20.

4 Comentários finais

Aqui propomos uma metodologia para se estudar estabilidade de equilíbrios para sistemas cujo campo de direções é parcialmente conhecido e dado por uma base de regras fuzzy. O método de inferência fuzzy adotado foi aquele conhecido na literatura por inferência de Mamdani (Amendola et al., 2005). Queremos ressaltar que o método de inferência de Takagi-Sugeno (Massad et al., 2008) também poderia ser utilizado e, nesse caso, poder-se-ia ter explicitamente a saída do controlador, representando o campo de direções da equação diferencial, e aí a metodologia aqui proposta ficaria semelhante à que se encontra na literatura de equações diferenciais, com a observação que o equilíbrio seria obtido via base de regras. O estudo da estabilidade dos estados de equilíbrio poderia ser feito por meio da linearização da saída do sistema fuzzy, uma vez que o método de Takagi-Sugeno fornece explicitamente tal saída.

No caso do modelo SIS com população total constante e dinâmica vital, analisado acima, a metodologia utilizada pode facilitar a estimativa de im-

portantes parâmetros epidemiológicos, que determinam sob quais condições a doença se propaga na população. A obtenção desses parâmetros nos modelos determinísticos clássicos envolve o conhecimento de taxas nem sempre fáceis de serem medidas (como a taxa de contato, por exemplo). A partir de taxas demográficas e valores conhecidos para uma doença específica (como taxa de recuperação), podemos estimar o valor de reprodutibilidade basal a partir das funções de pertinência, que nos modelos determinísticos envolve o conhecimento das taxas de natalidade, recuperação e contato.

Essa mesma metodologia pode ser aplicada num sistema bidimensional, como os modelos SIR e SIRS.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o suporte financeiro da FAPESP, processo no. 06/05920-7 e CNPq, processo no. 307890/2006-6.

Referências

Amendola, M., Souza, A. L., e L.C.Barros (2005). Manual do uso da teoria dos conjuntos fuzzy no matlab 6.5, versão 2005 do manual apresentado no ciclo de palestras/2004. Disponível em " http://www.ime.unicamp.br/ laeciocb, acesso em 17.8.2005.

Barros, L. e Bassanezi, R. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5. Coleção IMECC-Textos Didáticos, Campinas-SP.

Dias, M. (2006). Equações diferenciais ordinárias com campo de direções parcialmente conhecido. Dissertação de Mestrado.

Hale, J. e Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer, New York.

Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology.* Random HouseNew York, New York.

Klir, G. e Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic - theory and applications.* Prentice Hall.

Krivan, V. e Colombo, G. (1998). A non-stochastic approach for modeling uncertainty in population dynamics. *Bulletin of Mathematical Biology*, 60:721–751.

Margaliot, M. e Langholz, G. (1999). Fuzzy lyapunov apporach to the design of fuzzy controllers. *Fuzzy sets and systems*, 106:49–59.

Massad, E., Ortega, N. S., Barros, L., e Struchiner, C. (2008). *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond (Studies in Fuziness and Soft Computing).* Springer, New York.

Silva, J. D. M. (2005). *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos p-fuzzy com aplicações em Biomatemática.* PhD thesis, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.

Biomatemática ***19*** *(2009), 11–24* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Sistemas P-fuzzy Unidimiensionais com Condição Ambiental

L. R. dos Santos[1],
DMA, IMECC – Unicamp, Campinas/SP.

R. C. Bassanezi[2],
CMCC – UFABC, Santo André/SP.

Resumo. O objetivo deste trabalho é propor um Sistema Dinâmico P-fuzzy para modelar a dinâmica populacional de uma espécie que leve em conta fatores extrínsecos da espécie envolvida. Estes fatores são representados por uma *Condição Ambiental*, que é definida e acoplada ao Sistema P-fuzzy unidimensional. Simulações e experimentos computacionais feitos com o auxílio da *Fuzzy Logic Toolbox* do software *Matlab* são realizados e seus resultados são comentados.

Palavras-chave: *Lógica Fuzzy, Sistemas P-fuzzy, Condição Ambiental.*

1 Introdução

Denominamos *Sistema Dinâmico P-fuzzy* ao sistema iterativo

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = F(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

[1]lrsantos@ime.unicamp.br
[2]rodney.bassanezi@ufabc.edu.br, rodney@ime.unicamp.br

em que $F(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k + \Delta(\mathbf{x}_k)$. Aqui $\Delta(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^n$ é chamado *variação* e é obtido através da saída defuzzificada de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) (Barros e Bassanezi, 2006). Um sistema p-fuzzy é nada mais do que uma equação de diferenças $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = \Delta(\mathbf{x}_k)]$ (veja: Silva, 2005; Cecconelo, 2006; Peixoto et al., 2007) e sua arquitetura pode ser vista na Figura 1.

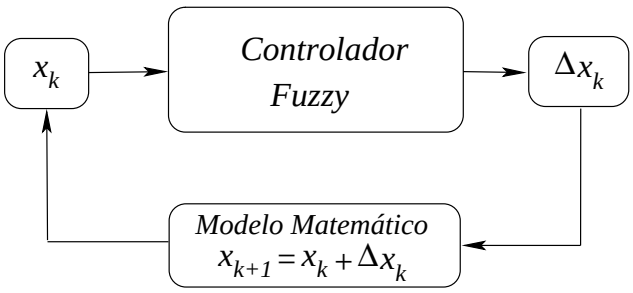


Figura 1: Arquitetura de um Sistema P-fuzzy.

Silva (2005) mostrou que é possível para extender para estes sistemas as noções de existência e equilíbrio de soluções mostrando as condições para elas. Cecconelo (2006) criou um algoritmo para procura de ponto de equilíbrio destes sistemas, quando há condições de existência de soluação única.

2 Motivação para Condição Ambiental

Quando se está estudando a dinâmica de uma determinada população, muitos modelos, em particular os clássicos, levam em conta apenas fatores intrínsecos da espécie durante a formulação do modelo (Bassanezi e Ferreira Jr., 1988). Por fatores intrínsecos entendemos tamanho ou densidade da população (vide modelo de Malthus), mortalidade e natalidade, fatores genéticos, etc. Os próprios sistemas p-fuzzy levam em conta apenas estes mesmos fatores.

No entanto, devido a complexidade dos fenômenos biológicos, quase sempre, há fatores extrínsecos, ou externos, que são determinantes na dinâ-

mica de uma população e que não são constantes (veja Sæther et al., 2000). Chamaremos estes fatores genericamente de *Condição Ambiental*. Estão englobados fatores como temperatura do ambiente, chuva ou molhamento, seca, poluição, entre outros. Podemos considerar aqui também

É fato que, ao se trabalhar com os modelos clássicos de equações diferenciais ou de diferenças, os parâmetros são escolhidos de tal forma que melhor representem as condições ambientais. Isto nem sempre é feito de maneira satisfatória, em particular, quando os parâmetros são escolhidos como constantes, mesmo que estes parâmetros variem com o tempo. Isso quase sempre é feito por conta da ausência de dados ou no caso de existirem, da dificuldade de modelá-los e representá-los de forma correta.

Quase sempre este tipo de fenômeno requer uma abordagem não-autônoma, quando se utiliza de um modelo baseado em equações diferenciais. Isso pode ser deduzido a partir da constatação de que as condições ambientais são de certa forma, dependentes do tempo.

Tomemos como exemplo uma determinada espécie que tenha seu crescimento diferenciado de acordo com a época do ano. Suponha que este crescimento é maior na temporada de calor. Isso significa que uma condição ambiental (temperatura média), que por sua vez é sazonal, influencia na capacidade reprodutiva dos indivíduos e portanto, as taxas de crescimento serão diferenciadas de acordo com a época que se está observando.

Uma tentativa de modelar um fenômeno sazonal, porém de forma diferente desta descrita acima, foi feita por Solberg et al. (1999). Em seu trabalho, é modelada a variação populacional de uma população cuja densidade está relacionada com variações bruscas do clima, em regiões como o Ártico, e que estão sujeitas a condições extremas de variação. Estas variações, no entanto são consideradas estocásticas.

No modelo que propomos, ao invés de considerarmos essas variações constantes, ou ainda estocásticas, utilizaremo-nos de uma SBRF para determiná-las. Serão apresentados dois modelos, um levando-se em conta apenas uma espécie e o segundo, modificando-se o modelo presa-predador de Kol-

mogorov (Edelstein-Keshet, 2005).

3 O modelo Unidemensional com Condição Ambiental

3.1 Modelagem

O modelo unidimensional, por ser mais simples, tem o objetivo de mostrar quão robusto é o sistema e além disso auxiliar no processo de entendimento da variação sazonal. Neste caso, utilzaremos um SBRF que não só nos dê a variação em função da própria população mas também leve em conta o período (tempo).

A base de regras deste controlador pode ser construida com auxílio de um especialista em uma aplicação do modelo. Este poderá ajudar na qualificação e quantificação da influência da condição ambiental no sistema. Como nossa modelagem será feita através de sistemas p-fuzzy discretos, iremos em cada interação atualizar os valores do fator ambiental. Isso ficará mais claro adiante.

Neste caso, estamos propondo um modelo teórico e para tal, utilizaremos as seguintes hipóteses:

(i) A densidade populacional da espécie será representada pela variável *população* (x), que utiliza-se dos termos lingüísticos $\mathcal{T}_x = \{$*Baixa* (B), *Média Baixa* (MB) e *Média Alta* (MA) e *Alta* (A)$\}$ para representar subjetivamente seus estados enquanto a variável *variação populacional* (Δ_x) terá seus estados modelados pelos termos $\mathcal{T}_{\Delta_x} = \{$*Baixa Negativa* ($BN$), *Baixa Positiva* ($BP$), *Média Positiva* ($MP$) e *Alta Positiva* ($AP$)$\}$

(ii) A taxa de variação da espécie (Δ_x) depende, como nos modelos tradicionais, da densidade populacional da própria espécie porém, o crescimento (ou decrescimento) desta taxa também sofrerá influência da

sazonalidade. Explico melhor, a taxa de crescimento da espécie se modificará de acordo com o tempo (estação) em que se encontra;

(*iii*) Haverá um crescimento maior nas estações mais quentes e chuvosas. Nas estações mais frias, a espécie diminui sua taxa de natalidade, chegando ao ponto de haver inclusive crescimento negativo (apenas mortalidade) com conseqüente diminuição da quantidade de indivíduos da espécie.

(*iv*) As noções de frio, quente, seco e chuvoso, entre outras, são determinantes para o crescimento de muitas espécies. Neste sentido elas estarão neste modelo sendo apresentadas pela variável lingüística *Condição Ambiental* (κ), cujos termos lingüísticos que as modelam serão $\mathcal{T}_\kappa = \{$*Favorável* (F), *Pouco Favorável* (PF), *Desfavorável* (DF)$\}$. Desta forma, a Condição Ambiental favorecerá em algum grau a taxa de crescimento da espécie em questão.

(*v*) A variável κ dependerá do estágio do sistema interativo (k). Isso faz sentido, conforme exposto no item (i), já que κ influenciará na variação Δ_x que será variável dependendo da época do ano em que estamos nos situando.

(*vi*) De acordo com condição ambiental podemos considerar que mesmo que a população chegue a zero, ela poderão novamente aumentar, desde que o ambiente seja favorável. Em princípio esta hipótese pode parecer estranha, mas basta pensar que muitos tipos de pragas ficam no inverno em estado latente ou de hibernação, indicando que não há infestação por conta de um ambiente desfavorável, porém assim que as condições melhoram, esta latência desaparece, dando lugar a infestação ocorrendo novamente.

A partir de um sistema p-fuzzy unidimensional (veja Equação (1) com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$) e das hipóteses acima, vamos inserir a condição ambiental no sistema. Rearranjaremos nosso esquema, com base na Figura 1 que descreve a

arquitetura de um sistema p-fuzzy, de forma que comporte a variável κ. A arquitetura está representada na Figura 2.

Desta maneira nosso sistema terá agora duas entradas , a população (x) e condição ambiental (κ) em cada instante (k), e uma saída, variação populacional $(\Delta_x(x, \kappa))$. As funções de pertinência de cada uma das variáveis estão representadas na Figura 3.

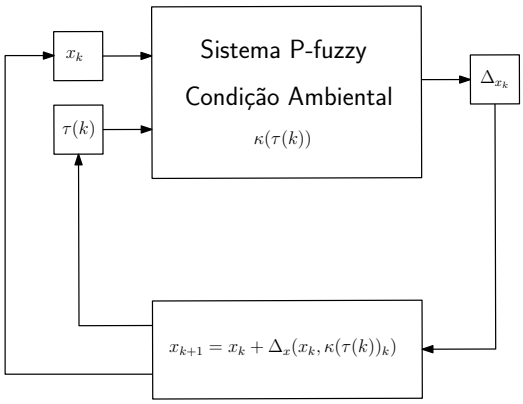


Figura 2: Arquitetura do Sistema P-fuzzy unidmensional com condição ambiental

As funções de pertinência para os termos lingüísticos das variáveis x (entrada) e Δ_x (saída) estão colocadas nas Figuras 3(a) e 3(c).

As funções de pertinência que representam os termos lingüísticos da variável de entrada κ, conforme a Figura 3(b), representam as situações de favorecimento para o crescimento populacional da espécie em questão. É possível observar, através da que essas funções têm como domínio o conjunto $\mathcal{D} = [0; 180]$, i. e. , $\kappa : \{1, \ldots, 180\} \to [0; 1]$.

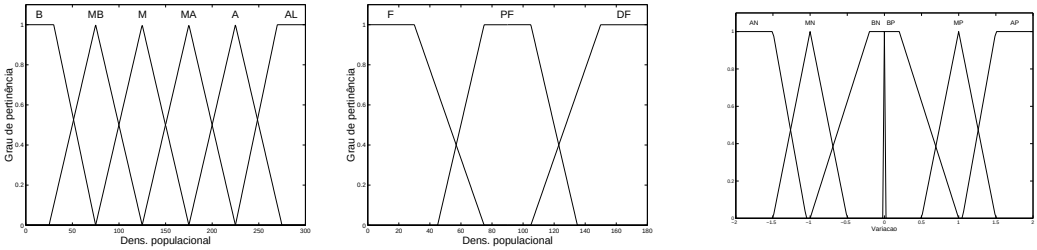
Conforme expusemos nas hipóteses (i) e (v), κ depende de k. Para nosso modelo estamos considerando um período de 180 iterações, no qual, nas primeiras 60 iterações temos κ, com grau de pertinência no conjunto *Favorável*. Com o passar do tempo, teremos pertinência no conjunto *Pouco Favorável* e a partir da iteração 120 teremos um ambente desfavorável.

É claro que nosso sistema poderá ter mais do que 180 iterações. Como

estaremos saindo do domínio, consideraremos um ambiente cíclico, isto é, faremos para κ uma iteração correspondente k, que será uma função $\tau : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, 180\}$ definida por

$$\tau(k) = \begin{cases} q \mid q \equiv k \pmod{180}, & \text{se } k \in \{1, \ldots, 180\} \\ 180 - q \mid q \equiv k \pmod{180}, & \text{se } k \in \{181, \ldots, 360\} \\ \vdots & \\ q \mid q \equiv k \pmod{180}, & \text{se } k \in \{N \equiv 180 \pmod{180}, \ldots, K\} \end{cases} \tag{2}$$

em que $k, q, N, K \in \mathbb{N}$ e K é a quantidade de iterações total desejadas para a simulação numérica.



(a) Função de pertinência da variável x.

(b) Função de pertinência da variável κ.

(c) Função de pertinência da variável Δ_x.

Figura 3: Funções de pertinência das entradas e saídas do sistema p-fuzzy para dinâmica populacional com condição ambiental.

3.2 Contruindo a Base de Regras

Para a construção da base de regras do nosso sistema p-fuzzy levamos em conta o que foi colocado nesta subseção hipóteses exaradas acima. A base é constituida de 18 regras que satisfarão a seguinte estrutura:

"Se x é A_r e κ é B_r, então Δ_x é C_r".

em que $A_r \in \mathcal{T}_x$, $B_r \in \mathcal{T}_\kappa$ e $C_r \in \mathcal{T}_{\Delta_x}$ e $r \in \{1, \ldots, 18\}$ representa a regra em questão. Para facilidade de notação, colocamos as 18 regras em forma

de tabela (veja Tabela 1). Basta então verificarmos qual o termo lingüístico de cada entrada e localizarmos o termo que representa a saída. Assim, se x é Média Baixa (MB) e κ é Favorável (F), então a variação Δ_x será Alta Positiva (AP).

$x\backslash\kappa$	Fav. (F)	Pouco Fav. (PF)	Desfav. (DF)
Baixa (B)	MP	BP	BN
Média Baixa (MB)	AP	MP	BN
Média (M)	AP	AP	MN
Média Alta (MA)	AP	MP	MN
Alta (A)	MP	BP	AN
Altíssima (AT)	BN	MN	AN

Tabela 1: Base de regras para o sistema P-Fuzzy descrito na Equação (3)

Observando a base de regras da Tabela 1, podemos inferir que:

- Quanto mais favorável o ambiente, maior a taxa de crescimento populacional;
- Se o ambiente for favorável, independente da população, teremos sempre crescimento positivo;
- O ambiente desfavorável faz com que a taxa de variação da população seja negativo (mortalidade maior que natalidade);

Podemos assim, escrever o sistema p-fuzzy com condição ambiental da seguinte forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, \kappa(\tau(k))_k) \\ (x_0, \kappa(\tau(0))_0 \in \mathbb{R} \times [0; 180] \end{cases}, \tag{3}$$

em que $\Delta_x(x_k, \kappa(\tau(k)_k)$ é dado por um SBRF e $\tau(k)$ obedece a Equação (2). Observemos que nossa SBRF representa uma função $\Delta : \mathbb{R} \times [0; 180] \to \mathbb{R}$. Do ponto de vista variacional, temos uma função do tipo não-autônoma, isto é, variando conforme o tempo (iteração). Além disso temos a função τ que

está implicitamente colocada mas que de fato apenas está fazendo com que o domínio de κ seja respeitado.

3.3 Experimentos Numéricos

Para que nosso sistema iterativo possa ser implementado, utilizaremos a *Fuzzy Logic Toolbox* do *software* Matlab® (Hanselman e Littlefield, 2003), que é um conjunto de funções para se lidar com modelagem Fuzzy.

Para melhor compreensão, mostramos abaixo os passos do algoritmo que foi implementado levando em conta as Equações (2) e (3) e considerando ainda:

- x_k a população na iteração k;
- $\kappa(\tau(k))$ a condição ambiental no instante $\tau(k)$;
- K o número final de iterações do sistema p-fuzzy;
- k_0 o instante inicial para a função τ. Esta constante tem por objetivo determinar qual é a *Condição Ambiental* inicial (κ_0) da simulação. Explico melhor, observando a Figura 3(b), veremos que para que o ambiente inicial seja por exemplo, exclusivamente *Desfavorável*, é necessário que $k_0 \in [135; 180]$;
- $\tau(k)$ (Equação (2)) faz a transformação entre o instante da iteração e o correspondente para a condição ambiental;
- $\mathcal{F}$ função que representa o SBRF com a base de regras fuzzy da Tabela 1.

Algoritmo 1 Passos para solução do sistema p-fuzzy unidimensional com condição ambiental.

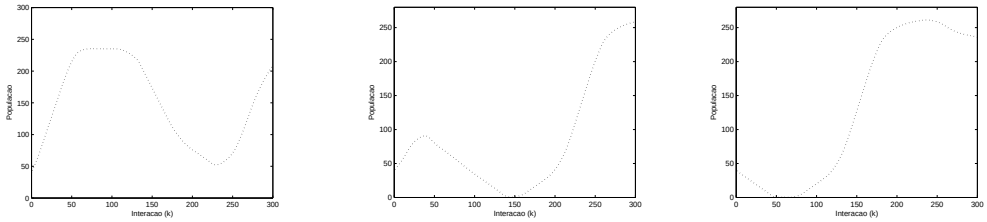
Entrada: x_0, K, k_0, $\tau(k_0)$
  Para k de 1 até K **Faça**
    $\Delta_x \leftarrow \mathcal{F}(x_k, \kappa(\tau(k)_k))$
    $x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_x$
  Fim
  Saída: x_K

As seções abaixo mostram os resultados de nossa modelagem. Observe-se que, conforme era de se esperar, temos um ambiente cíclico, que depende não só da dinâmica populacional, mas também, e principalmente da Condição Ambiental. Ressalte-se que através das simulações, foi possível também afinar a base de regras.

As simulações foram feitas variando-se 3 parâmetros na entrada do sistema: o ponto inicial x_0, a condição ambiental inicial k_0 e a quantidade de iterações total K. Na legenda de cada figura estão exarados os valores de cada parâmetro.

3.3.1 Experimentos Parte I

No primeiro experimento, vamos utilizar como ponto inicial $x_0 = 40$ e $K = 300$, ou seja, teremos 300 iterações. Em cada um dos gráficos representados na Figura 4 foram feitas variações apenas na condição ambiental incial, conforme se encontra mostrado nas legendas. Neste experimento, observa-se que, por conta da quantidade de iterações, ao final delas, o sistema estará com praticamente a mesma densidade populacional. Isso vem ao encontro da idéia de que a sazonalidade é um fator importantíssimo na determinação da variação de uma população e representa bem este fenômeno. Além disso consegue-se verificar que em um ambiente desfavorável a densidade populacional quase fica nula, porém com a mudança de estação, a população cresce normalmente.

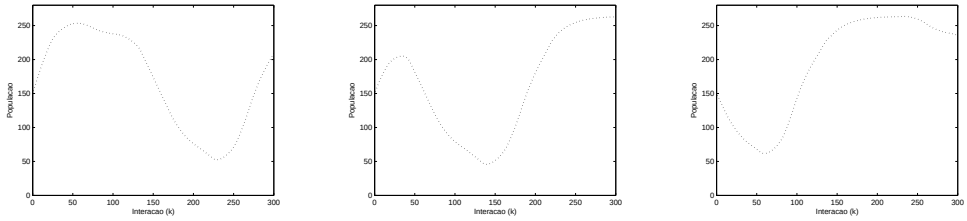


(a) $k_0 = 0$ (κ Favorável). (b) $k_0 = 90$ (κ Pouco Favorável) (c) $k_0 = 170$ (κ Desfavorável)

Figura 4: Soluções do sistema p-fuzzy com $x_0 = 40$, $K = 300$ e condição ambiental variando.

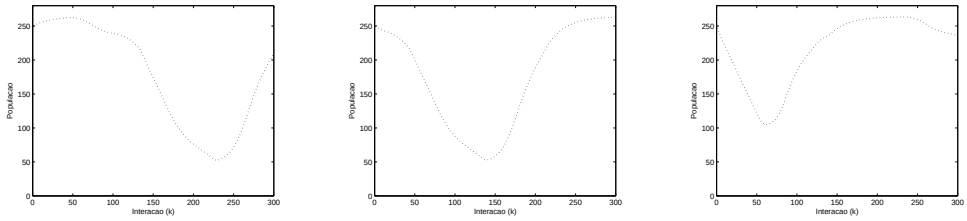
3.3.2 Experimentos Parte II

Neste segundo experimento, trocamos o ponto inicial para $x_0 = 150$ (Figura 5) para $x_0 = 250$ (Figura 6) e continuamos com $K = 300$ (iterações). Novamente em cada um dos gráficos representados, foram feitas variações apenas na condição ambiental inicial. Aqui novamente a sazonalidade fica bem evidenciada e temos então um ambiente periódico como queríamos. Com a população inicial mais alta, vemos que mesmo nos perídos desfavoráveis, ainda temos uma densidade populacional considerável.



(a) $k_0 = 0$ (κ Favorável). (b) $k_0 = 90$ (κ Pouco Favorável) (c) $k_0 = 170$ (κ Desfavorável)

Figura 5: Soluções do sistema p-fuzzy com $x_0 = 150$, $K = 300$ e condição ambiental variando.

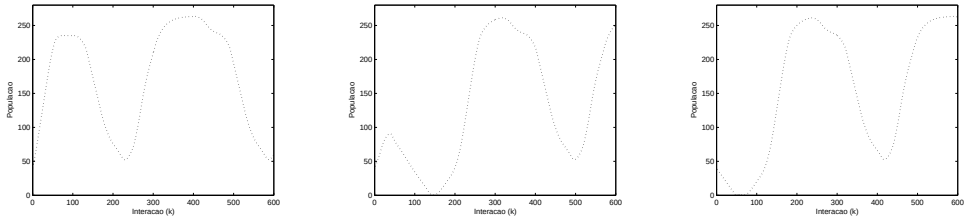


(a) $k_0 = 0$ (κ Favorável). (b) $k_0 = 90$ (κ Pouco Favorável) (c) $k_0 = 170$ (κ Desfavorável)

Figura 6: Soluções do sistema p-fuzzy com $x_0 = 250$, $K = 300$ e condição ambiental variando.

3.3.3 Experimentos Parte III

A idéia neste teceiro experimento é mostrar que com mais iterações, temos realmente uma modelagem periódica. A Figura 7 mostra uma periodicidade advinda da condição ambiental. Por conta disso, por exemplo, na Figura 7(a), temos que no final das interações a população está baixa, o que não ocorre nas outras duas simulações.



(a) $k_0 = 0$ (κ Favorável). (b) $k_0 = 90$ (κ Pouco Favorável) (c) $k_0 = 170$ (κ Desfavorável)

Figura 7: Soluções do sistema p-fuzzy com $x_0 = 40$, $K = 600$ e condição ambiental variando.

4 Conclusão

Neste trabalho mostramos que é possível utilizar uma SBRF para modelar o comportamento da densidade populacional de uma espécie quando

se que levar em conta as mudanças das condições ambientais que ocorrem quando se quer levar em conta o tempo como fator determinante da variação populacional desta espécie. Os experimentos mostram que as condições ambientais servem como instrumento para a construção de sistemas p-fuzzy periódicos.

Referências

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*, volume 5 of *Coleção IMECC - Textos Didáticos*. IMECC–Unicamp, Campinas/SP.

Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais com aplicações*. Habra, São Paulo.

Cecconelo, M. S. (2006). *Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. Dissertação de Mestrado, IMECC–Unicamp, Campinas.

Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical Models in Biology*. SIAM – Society for Industrial & Applied.

Hanselman, D. e Littlefield, B. (2003). *MATLAB 6: curso completo*. Prentice-Hall, São Paulo.

Peixoto, M. S., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2007). Uma Abordagem Fuzzy para um Modelo Presa-predador Acoplado ao Parasitismo. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, 8(1):119–128.

Sæther, B.-E., Tufto, J., Engen, S., Jerstad, K., Røstad, O. W., e Skåtan, J. E. (2000). Population dynamical consequences of climate change for a small temperate songbird. *Science*, 287(5454):854–856.

Silva, J. D. M. (2005). *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos p-Fuzzy com Aplicações em Biomatemática.* Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas.

Solberg, E., Sæther, B.-E., Strand, O., e Loison, A. (January 1999). Dynamics of a harvested moose population in a variable environment. *Journal of Animal Ecology*, 68:186–204(19).

Biomatemática ***19*** *(2009), 25–38* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Modelo probabilístico para uma variável fuzzy

M. Missio[1],
Matemática-Unidade de Dourados – UEMS, 78.060-900, Dourados, MS.

L. C. Barros[2],
Depto. de Matemática Aplicada, IMECC, – UNICAMP,
13.083-970, Campinas, SP.

Resumo. Neste trabalho, propomos a integração de duas ferramentas matemáticas - a Teoria de Probabilidades e a Teoria de Conjuntos Fuzzy - no tratamento de incertezas. A integração entre as duas teorias é realizada por meio de um modelo probabilístico, elaborado para tratar incertezas de variabilidade presentes no domínio das funções de pertinência da variável de entrada de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy. Para o modelo probabilístico, fazemos uso do Método de Monte Carlo associado à distribuição Weibull.

Palavras-chave: *Modelo Fuzzy; Modelo Probabilístico; Método de Monte Carlo; Distribuição Weibull.*

1. Introdução

Em epidemiologia, as incertezas podem ser agrupadas segundo duas classes: *a variabilidade*, originada da heterogeneidade da população ou da estocasticidade e a do *conhecimento parcial*, que resulta de erros sistemáticos de

[1]maristela@uems.br
[2]laeciocb@ime.inicamp.br

medida ou do desconhecimento de parte do processo considerado, conforme Massad et al. (2008). Portanto, ainda segundo os autores, as duas classes de incertezas devem ser tratadas por métodos diferentes e mais apropriados a cada uma. Segundo Barros e Bassanezi (2006), a incerteza proveniente da aleatoriedade de eventos está bem desenvolvida, ocupando um lugar de destaque na galeria da Matemática por meio da Teoria da Probabilidade. Porém, Massad et al. (2008) reportam que essa teoria não consegue, na maioria das vezes, abordar o problema da ignorância e da subjetividade. Nesses casos, a lógica fuzzy pode ser considerada como uma das ferramentas matemáticas mais poderosas para lidar com tais incertezas, imprecisões e verdades parciais.

Em geral, os modelos matemáticos que tratam de fenômenos epidemiológicos, incorporando incertezas em suas variáveis, utilizam a teoria da Probabilidade ou a Teoria de Conjuntos Fuzzy, a depender do tipo de incerteza. No entanto, ao desenvolver um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF), a variável de entrada do sistema pode apresentar, além da incerteza proveniente de conhecimentos parciais, tratada pela lógica fuzzy, a incerteza de variabilidade no domínio das suas funções de pertinência. A primeira está presente na definição do "evento", e a segunda na chance de ocorrência de "seus elementos". Ou seja, cada termo (ou evento fuzzy) tem fronteira não clara. Por outro lado, "seus elementos" (suporte) não são equiprováveis segundo uma distribuição aleatória, de acordo com Missio (2008).

Nesse sentido, uma vez detectadas características de incertezas de variabilidade em uma variável fuzzy, faz-se necessário integrar ao modelo fuzzy um modelo estocástico, para tratar esse tipo de incerteza.

O uso integrado de modelos fuzzy e estocásticos no tratamento das duas classes de incertezas pode ser encontrado em Missio (2008). Nesse trabalho, realizou-se um estudo da evolução espaço-temporal da febre aftosa em bovinos por meio de um modelo compartimental tipo SIR (Suscetível, Infectado, Recuperado), envolvendo o sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDP) (1). As variáveis de estado do sistema são representadas por

$S = S(x, y; t)$, $I = I(x, y; t)$ e $R = R(x, y; t)$, com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in (0, T)$ para algum $T > 0$ fixo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div}(D_S(\mathcal{C}, \mathcal{P}).\nabla S) - \lambda(\beta, I)S \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div}(D_I(\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{FD}).\nabla I) + \lambda(\beta, I)S - \mu I \\ \dfrac{\partial R}{\partial t} = \operatorname{div}(D_R(\mathcal{C}, \mathcal{P}).\nabla R) + \mu I, \end{cases} \tag{1}$$

satisfazendo as condições iniciais $S(x, y; 0) = S_0$, $I(x, y; 0) = I_0(x, y)$ e $R(x, y; 0) = 0$.

Os parâmetros $D_S = D_S(\mathcal{C}; \mathcal{P})$, $D_I = D_I(\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{FD})$ e $D_R = D_R(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ representam, respectivamente, os coeficientes de difusão das populações de suscetíveis, infectados e recuperados. São dependentes da população ($\mathcal{P}$), das características ambientais ($\mathcal{C}$) e da fase da doença ($\mathcal{FD}$), sendo as duas últimas consideradas variáveis incertas. A força de infecção da febre aftosa é representada pelo parâmetro $\lambda = \beta I$, com β indicando a taxa de transmissão da doença. O parâmetro constante μ representa a taxa de passagem de infectado para recuperado.

No modelo, foram consideradas incertezas do ponto de vista epidemiológico, socioeconômico e ambiental, incorporadas pelos parâmetros de dispersão e de transmissão do sistema de EDP. Os parâmetros incertos foram estimados fazendo-se uso de modelos fuzzy, mais especificamente, SBRF. O acoplamento de modelos fuzzy e probabilísticos foi necessário, uma vez que, as incertezas eram oriundas da subjetividade e da aleatoriedade.

Neste estudo, com base em Missio (2008), propomos um modelo estocástico para tratar aspectos de incertezas probabilísticas presentes no domínio das funções de pertinência da variável de entrada de um SBRF.

Para o modelo probabilístico, fazemos uso de uma distribuição de probabilidade e do método de Monte Carlo, a fim de se escolher um valor de entrada da variável fuzzy para alimentar o SBRF. Este método gera uma amostra de valores aleatórios por meio de uma distribuição de probabilidade

devidamente escolhida. A média amostral obtida é utilizada como entrada no SBRF. Adotamos esse método por ser uma técnica simples e confiável quanto à geração de números aleatórios, com a possibilidade de repetir o experimento em um número considerável de vezes, visando minimizar o erro na estimativa.

2. Objetivos

2.1 Desenvolver um modelo probabilístico para tratar incertezas de variabilidade presentes em uma variável fuzzy.

2.2 Fazer a integração entre SBRF e modelos probabilísticos, envolvendo o Método de Monte Carlo associado à função de distribuição Weibull.

3. Metodologia

Como motivação para realizar a integração da Teoria da Probabilidade com a Teoria de Conjuntos Fuzzy, utilizamos a variável fuzzy *tempo de infecção da população*, denotada por τ. Essa é a variável de entrada do SBRF elaborado por Missio (2008) para modelar a variável fuzzy *fase da doença*, denotada por $\mathcal{FD}$, de forma que $\mathcal{FD} = \mathcal{FD}(\tau)$.

A variável τ, conforme definida em Missio (2008), indica o período da infecção em que a população infectada pela febre aftosa se encontra. Esta variável divide o tempo máximo de aproximadamente 15 dias em que o indivíduo fica doente em pequenos intervalos, tornando possível determinar os diversos momentos que podem acontecer alterações dos sinais clínicos da população infectada. Ou seja, com relação aos sinais clínicos, a doença pode ser classificada qualitativamente em diferentes fases, dependendo do tempo de infecção. Por exemplo, no período entre 5 e 6 dias de infecção as lesões são bastantes severas, podendo-se dizer que a doença se apresenta numa fase aguda.

Neste sentido, Missio (2008) classificou qualitativamente a variável τ pelos termos lingüísticos *tempo0* ($\tau 0$)*, tempo1* ($\tau 1$)*, tempo2* ($\tau 2$)*, tempo3* ($\tau 3$)*, ..., tempo14* ($\tau 14$) *e tempo15* ($\tau 15$)*.* A variável de saída $\mathcal{FD}$ do SBRF é representada pelos conjuntos fuzzy *inicial, moderada leve, moderada, moderada aguda e aguda.* As funções de pertinência dos conjuntos fuzzy assumidos pelas variáveis τ e $\mathcal{FD}$ estão ilustradas nas respectivas Figuras 1 e 2. O eixo horizontal das funções de τ varia entre 0 e 15 dias, tendo em vista que nesse intervalo de tempo ocorre a recuperação da população de infectados.

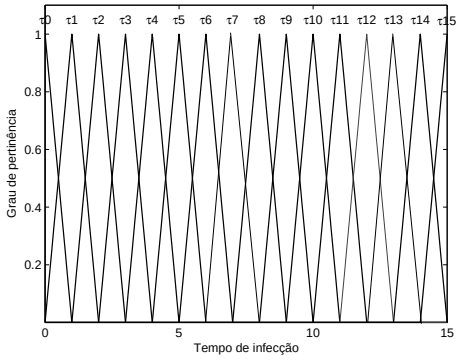


Figura 1: Funções de pertinência dos conjuntos fuzzy assumidos pela variável τ.

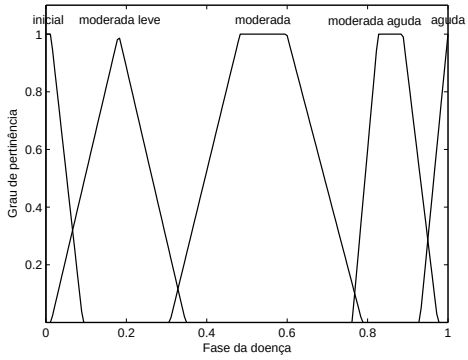


Figura 2: Função de pertinência dos conjuntos fuzzy assumidos pela variável $\mathcal{FD}$

Para compor a base de regras do SBRF, Missio (2008) fez a associação entre os termos subjetivos das variáveis τ e $\mathcal{FD}$, estabelecendo regras do tipo: **Se** $\tau = \tau 3$ **então** $\mathcal{FD}$ é *moderada leve.* O SBRF utilizado para modelar a variável $\mathcal{FD}$ é estruturado pelo esquema da Figura 3.

Ao realizarmos a leitura da variável lingüística τ, quando posto em ação o SBRF $\mathcal{FD} = \mathcal{FD}(\tau)$, temos a nítida característica de incertezas de natureza fuzzy e probabilística. O conjunto fuzzy *tempo5* da população de infectados exemplifica mais precisamente um evento fuzzy, onde a incerteza fuzzy está presente na definição do evento (ver Figura 4). E para dar entrada ao SBRF é necessário obter a chance desses "eventos" ocorrerem, caracterizando uma incerteza de variabilidade (probabilística). Ou seja, os "eventos" não são

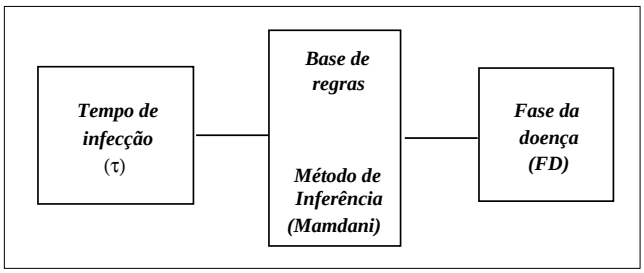


Figura 3: Estrutura do Sistema Baseados em Regras Fuzzy para modelar a variável $\mathcal{FD}$.

equiprováveis segundo uma distribuição aleatória.

Sendo assim, considerando o experimento "tempo de infecção da população", a chance de ocorrência de um dos eventos deste está intrinsecamente associada à probabilidade de que tal evento ocorra. Isto remete à idéia de que o tempo de infecção da população τ pode ser definido como uma variável aleatória. A Figura 4 ilustra o SBRF para modelar a variável $\mathcal{FD}$, destacando o experimento "tempo de infecção da população" e seus eventos *"tempo0, tempo1, [...], tempo15"*, os quais envolvem incertezas que são tratadas por meio de ferramentas fuzzy e probabilísticas, respectivamente.

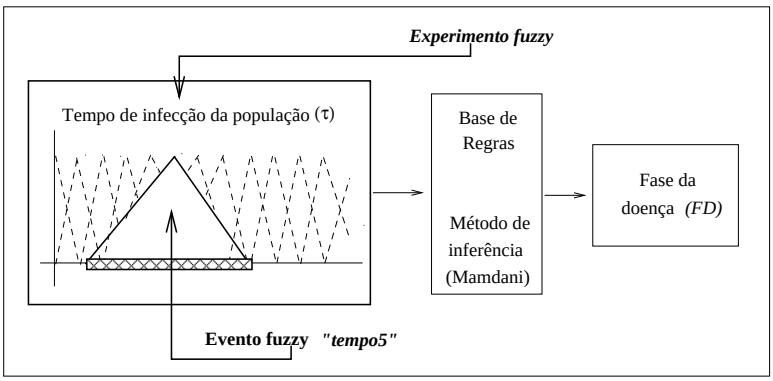


Figura 4: Esquema ilustrativo de um **experimento fuzzy** e seus **eventos**. Em destaque o evento fuzzy "*tempo5*".

Para qualquer simulação computacional de um sistema físico que envolva aleatoriedade, deve ser incluído um método para geração de sequências de números aleatórios. Um destes métodos amplamente utilizado em procedimentos de seleção amostral (para gerar aleatoriamente valores para variáveis incertas) é a simulação de Monte Carlo. Assim, no contexto desse artigo, o método consiste basicamente em gerar sucessivas amostras de valores aleatórios, de acordo com uma distribuição de probabilidade.

Levando-se em conta o fato relevante de que o tempo de infecção da população τ é limitado pelo intervalo $[0, 15]$, optou-se por uma função de distribuição de probabilidade específica que é usada extensivamente na análise de dados de vida: a distribuição Weibull truncada.

A distribuição Weibull, nomeada em 1939 pelo seu criador, o físico sueco Ernest Hjalmar Wallodi Weibull, é uma distribuição de probabilidade contínua e limitada, muito versátil para aplicações práticas e elimina os inconvenientes que outras distribuições podem provocar, dado que nunca ocorrem valores negativos para os tempos de vida. É uma generalização da distribuição exponencial usada em estudos de tempo de vida de equipamentos, análise de sobrevivência e em outras áreas, devido à sua versatilidade e simplicidade, segundo Dantas (2004).

Uma variável aleatória tem distribuição Weibull com parâmetros $\alpha > 0$ e $\eta > 0$ se sua densidade de probabilidade é descrita por:

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\eta}\left(\dfrac{v}{\eta}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\dfrac{v}{\eta}\right)^{\alpha}\right\}, & v \geq 0 \\ 0, \quad \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2}$$

onde $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma, conhecido também como inclinação da distribuição Weibull, e $\eta > 0$ é o parâmetro de escala da distribuição, e controla as dimensões que a curva assume. A função de distribuição é representada por

$$F(v) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{v}{\eta}\right)^{\alpha}\right\}. \tag{3}$$

O valor esperado do tempo de infecção da população τ, pela distribuição Weibull, é dado pela expressão:

$$E(\tau) = \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \tag{4}$$

com $\Gamma(y) = \int_0^\infty v^{y-1}\exp\{-v\}dv$ representando a função gama.

A taxa de falha de um sistema cujo tempo de vida tem função de distribuição $F(v)$, com densidade de probabilidade $f(v)$, é dada por

$$h(v) = \frac{f(v)}{1 - F(v)}.$$

Essa taxa, que é uma função do tempo, é aproximadamente igual à probabilidade de que ocorra falha num intervalo de tempo $\triangle v$, após o instante v, dado que não houve falha até esse instante, conforme Dantas (2004).

No contexto aqui tratado, a expressão "taxa de falha" é vista de maneira positiva, indicando a taxa de sucesso em relação ao tempo em que o indivíduo deixa de ser doente. Assim, a partir de $f(v)$ e de $F(v)$, obtém-se a taxa de falha da distribuição Weibull:

$$h(v) = \frac{f(v)}{1 - F(v)} = \frac{\frac{\alpha}{\eta}\left(\frac{v}{\eta}\right)^{\alpha-1}\exp\left\{-\left(\frac{v}{\eta}\right)^{\alpha}\right\}}{\exp\left\{-\left(\frac{v}{\eta}\right)^{\alpha}\right\}}.$$

Simplificando, tem-se

$$h(v) = \frac{\alpha}{\eta}\left(\frac{v}{\eta}\right)^{\alpha-1}. \tag{5}$$

A fim de estimar um valor razoável para o parâmetro de forma α, observa-se a partir do modelo (1), que $\frac{\partial R}{\partial t} \cong \mu I$. Como no início a população de infectados I cresce com o tempo t ($t \in [0, T]$), é de se esperar que $\frac{\partial R}{\partial t}$ também cresça com t. Consequentemente, a taxa de falha (em que há recuperação da doença) cresce com o tempo. Ou seja, $h(t) = \frac{\alpha}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\alpha-1}$ é crescente. Portanto $\alpha \geq 1$.

Considerando que no início do processo da epidemia a população de recuperados, mensurada pela função $R(t)$, apresenta uma pequena concavidade para cima (ver Capítulo 7 em Missio (2008)), adotamos $\dfrac{\partial R}{\partial t} \cong t$. Assim, partindo do pressuposto de que a taxa de falha deve ter um comportamento semelhante à curva dos recuperados, que cresce com o tempo t no início do processo de evolução da epidemia, admite-se que a taxa de falha pode ser aproximada por uma função linear da forma $h(t) = lt$. Então, de (5) tem-se $\alpha - 1 = 1$ e, portanto, $\alpha = 2$.

Com isso, o parâmetro de forma, indicando a inclinação da distribuição Weibull, é estimado em $\alpha = 1$ quando $t = 1$, e $\alpha = 2$ quando $t > 1$. Desta forma, tem-se que a geração de valores aleatórios segue uma distribuição exponencial no primeiro dia de evolução do sistema, ou seja, existe uma probabilidade maior de ocorrer valores aleatórios mais próximos de zero. Por outro lado, quando $t > 1$, há maior probabilidade de ocorrer a geração de valores aleatórios mais próximos do limite superior de τ.

Lembrando que a variável tempo de infecção da população τ é definida no intervalo de 0 a 15 dias, τ assume um conjunto limitado. Desta forma, utilizando-se o Método de Monte Carlo, faz-se a geração de valores aleatórios v, por meio da distribuição uniforme e, em seguida, ocorre a geração de valores τ por meio de uma Weibull truncada, com base na seguinte transformação:

$$\tau = \eta \left(-log \left((1-v)e^{-\left(\frac{a}{\eta}\right)^{\alpha}} + ve^{-\left(\frac{b}{\eta}\right)^{\alpha}} \right) \right)^{1/\alpha}. \tag{6}$$

Os parâmetros a e b indicam, respectivamente, os limites inferior e superior da variação de $\tau \in [0, 15]$. Assim, estimamos $a = 0$, pois 0 é o limite inferior de τ. Por outro lado, considerando o tempo (em dias) de evolução do sistema representado por $t \in [0, 15]$, ao estimar o parâmetro b é natural ter a variável tempo de infecção da população $\tau < 1$ no primeiro dia ($t = 1$); $\tau < 2$ no segundo dia ($t = 2$) e, assim sucessivamente até $\tau \leq 15$ no décimo quinto dia ($t = 15$). O tempo de infecção de cada individuo é sempre limitado superiormente por $\tau = 15$, tendo em vista que os animais se recuperam da

doença nesse período. Face a isso, τ pode assumir qualquer valor inferior ou igual a 15. Assim, adotamos o parâmetro $b = t$, para $t \in [0, 15]$.

Considerando que o tempo médio de doença é em torno de 10 dias e que η cresce com b, sendo b o valor máximo a ser assumido por τ, o valor esperado do tempo de infecção da população τ é estimado em $E(\tau) = 10\left(\frac{b}{15}\right)$. Então

$$\eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 10\left(\frac{b}{15}\right).$$

Essa expressão possibilita estimar o parâmetro de escala de maneira que a distribuição esteja truncada em b. Ou seja, adotando-se η dessa forma, tem-se a probabilidade nula de estimar $\tau > t$.

4. Resultados

A fim de aferir a proposta de interligação da Teoria de Conjuntos Fuzzy e Teoria de Probabilidade realizamos, o acoplamento dos modelos probabilístico e fuzzy. Para tal, construímos um algoritmo, utilizando o *Matlab* - versão 7.0, que possibilita simular o Método de Monte Carlo, conectando-o com o Sistema Baseado em Regras Fuzzy, modelado no *Fuzzy Logic Toolbox* contido no ambiente *Matlab*.

Considerando que o tempo de infecção da população τ é limitado pelo intervalo $[0, 15]$ dias, o valor de entrada da variável τ para o SBRF é estimado diariamente a partir de $t = 0$ $(t \in [0, 15])$ de evolução da epidemia, pelo Método de Monte Carlo, por meio do seguinte algoritmo.

1. Gera-se uma amostra de m valores aleatórios, através da distribuição uniforme;

2. Faz-se uma transformação desta amostra, por meio da função de distribuição Weibull truncada (6), para se obter uma nova amostra de τ no intervalo $[0, t]$, considerando os valores dos parâmetros a, b, α e η, a cada unidade de tempo t, conforme descrição anterior;

3. Finalmente, o valor de entrada para alimentar o SBRF é dado pela média amostral $\overline{\tau}$ da nova amostra obtida em 2.

O tamanho da amostra (m) gerada tem grande importância na determinação da qualidade dos resultados, uma vez que, quanto maior for a amostra, mais a distribuição amostral se aproxima das funções originais. Porém, se o processo requerer um tempo elevado de execução, poderemos fazer uso do Teorema Central do Limite, aproximando a distribuição amostral média pela distribuição normal.

Cada valor $\overline{\tau}$ representando o *tempo de infecção da população*, que é a média dos valores aleatórios simulados, obtido pelo Método de Monte Carlo, é enviado para o controlador fuzzy. Desta forma, a variável *fase da doença* $\mathcal{FD}$ é inferida a partir da base de regras estabelecidas em Missio (2008). Utilizamos o método de inferência de Mamdani; este associa a t-norma *min* para o conectivo lógico "e" e a t-conorma *max* para o conectivo "ou", segundo Barros e Bassanezi (2006). A resposta clássica (não fuzzy) é obtida através da defuzzificação, utilizando-se o Método do Centro de Massa, que é o método mais utilizado, de acordo com Missio (2008). A Figura 5 apresenta a curva obtida pelo mapeamento realizado pelo modelo fuzzy, mais especificamente pelo SBRF, integrado ao modelo probabilístico.

Ao observar a curva que descreve a variável $\mathcal{FD}$, obtida pelo SBRF integrado ao modelo probabilístico e ilustrada na Figura 5, pode-se intuir que existe uma aproximação dessa com a curva que representa a evolução teórica da febre aftosa em um indivíduo infectado, representada pela curva do virus na Figura 6.

É sabido que para comparar duas curvas, deve-se conhecê-las em todos os pontos, e aqui está se supondo que a função que representa a curva da evolução teórica da febre aftosa em um indivíduo infectado não é conhecida. Todavia, Dias (2006) mostra que um SBRF tem a capacidade de aproximar funções contínuas, ou seja, que toda função contínua definida em um intervalo fechado pode ser aproximada por um sistema baseado em regras fuzzy à medida que o número de regras aumente indefinidamente.

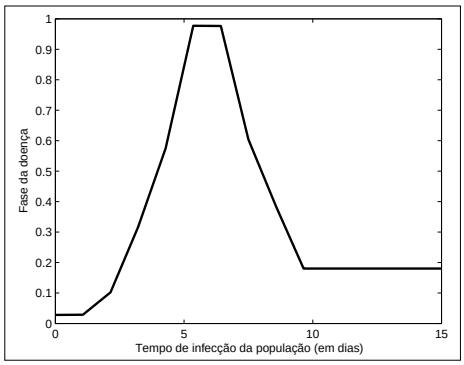


Figura 5: Curva obtida pelo mapeamento do modelo fuzzy integrado ao modelo probabilístico para a variável $\mathcal{FD}$.

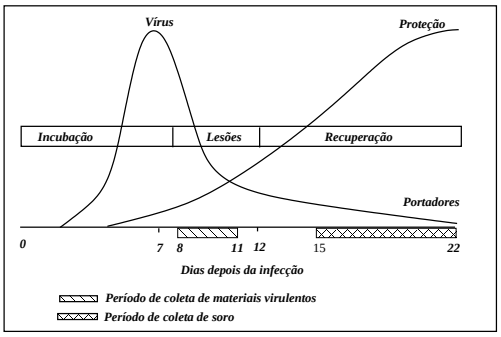


Figura 6: Evolução teórica da febre aftosa em um indivíduo infectado, extraída de Fernãndez e Söndahl (1978).

5. Conclusões

Considerando a aproximação entre as curvas, ilustradas nas Figuras 5 e 6, suficientemente satisfatória, conclui-se que o SBRF integrado ao modelo probabilístico, por meio do Método de Monte Carlo via função de distribuição Weibull, demonstrou possuir boa capacidade para determinar a variável *fase da doença* dos indivíduos infectados, com base em características de evolução do vírus e das alterações dos sinais clínicos dos animais infectados.

Adotamos o Método de Monte Carlo no modelo probabilístico, por se caracterizar como uma técnica simples e confiável em gerar números aleatórios, com a possibilidade de repetir o experimento em um número considerável de vezes para minimizar o erro na estimativa. Para cada variável incerta do modelo (isto é, que tem uma faixa de valores possíveis), foi preciso optar por uma distribuição de probabilidade, e esta foi a principal dificuldade de utilização desta técnica. No entanto, ao selecionar aleatoriamente valores de forma independente, o Método de Monte Carlo contribui para uma visão também probabilística de uma variável de entrada fuzzy para um SBRF.

Portanto, mesmo percebendo diferenças significativas entre as teorias fuzzy e probabilística, pode-se comprovar a existência de grandes possibi-

lidades delas se complementarem. Esta junção resulta em uma ferramenta realmente útil a ser aplicada em modelos similares ao utilizado nesse trabalho.

Referências

Barros, L. C. e Bassanezi, R. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5. Coleção IMECC - Textos didáticos, Campinas. UNICAMP - IMECC.

Dantas, C. A. B. (2004). *Probabilidade: Um Curso Introdutório.*, volume 5 of *2.ed.* Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Dias, M. (2006). *Equações diferenciais ordinárias com campo de direções parcialmente conhecido.* Dissertação de Mestrado, IMECC, Unicamp, Campinas, SP.

Fernãndez, A. A. e Söndahl, M. (1978). *Diagnóstico das enfermidades vesiculares e classificação do vírus da febre aftosa*, volume 5. Centro Pan-Americano de Febre Aftosa, Rio de Janeiro, RJ.

Massad, E., Ortega, N., Barros, L., e Struchiner, C. (2008). *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond.* Ed. Springer, Berlin, Heidelberg,.

Missio, M. (2008). *Modelos de EDP integrados à Lógica Fuzzy e Métodos Probabilísticos no tratamento de incertezas: uma aplicação à febre aftosa em bovinos.* Tese de Doutorado, IMECC, Unicamp, Campinas, SP.

Biomatemática ***19*** *(2009), 39–56* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Um modelo evolutivo para a dengue em domínio bidimensional considerando fatores ambientais

L. T. Gomes[1],
DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

L. C. Barros[2],
DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.

Resumo. Com o intuito de se estudar o espalhamento da dengue no distrito sul da cidade de Campinas, é realizada uma modelagem matemática baseada em modelos epidemiológicos compartimentais, que resulta em um sistema de equações diferenciais parciais. Através do estudo das populações envolvidas (humanos e mosquitos *Aedes aegypti*), opta-se por considerar fatores ambientais que interferem na proliferação e reprodução do vetor e, consequentemente, na dinâmica da doença. Tais fatores possuem natureza incerta, tanto devido a conhecimento parcial quanto a aleatoriedade. Como determinam coeficientes do sistema de equações, faz-se necessário o uso de ferramentas que sejam capazes de manipular tais tipos de informação, como Sistemas Baseados em Regras Fuzzy. Para a resolução do sistema são utilizados os métodos numéricos de Elementos Finitos e de Crank-Nicolson. Utilizando as ferramentas matemáticas citadas, é elaborado um programa em ambiente MATLAB, o qual simula a evolução das populações em questão.

Palavras-chave*: Dengue; Simulação de Variável Aleatória; Conjuntos Fuzzy; Equação Diferencial Parcial; Elementos Finitos.*

[1]lucianatakata@gmail.com
[2]laeciocb@ime.unicamp.br

1. Introdução

Considerada pelo Ministério da Saúde (2008) como um dos principais problemas de saúde pública no mundo, a dengue é uma doença infecciosa aguda de curta duração, causada por um arbovírus, do gênero Flavivírus (Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, 2008). Pode se apresentar através de quatro diferentes sorotipos, os quais geram as mesmas manifestações (ibidem).

Os vetores da dengue são os mosquitos do gênero *Aedes*. No Brasil, o principal é o *Aedes aegypti*, um artrópode essencialmente urbano, que necessita de sangue para realizar a reprodução e que apresenta grande atividade em ambientes de clima quente e úmido. Como o humano, em geral, propicia condições para a reprodução do mosquito (disponibilizando recipientes que podem acumular água e se tornarem criadouros), acaba por ser o animal mais próximo do seu habitat, se tornando a maior vítima de suas picadas (Consoli e Oliveira, 1994).

A dengue já atingiu todas as regiões do Brasil, de maneira que medidas de controle de seu vetor precisam ser tomadas para a contenção de epidemias. Para tanto, estudos sobre o espalhamento da doença se mostram de grande relevância, auxiliando no planejamento de tais esforços.

Estudos de epidemiologia matemática envolvendo modelagem compartimental já foram realizados (Maidana e Yang, 2007; Takahashi, 2004; Thomé, 2007). O presente trabalho também apresenta um modelo compartimental, proposto por Gomes (2009), destacando-se pela escolha de domínio real bidimensional, influência de fatores ambientais variáveis (tratados como incertos) e resolução através de método que permite a visualização gráfica do espalhamento da doença.

O domínio espacial sobre o qual se realiza o estudo é o distrito sul da cidade de Campinas. Por anos, seus índices de incidência de dengue foram os mais elevados do município. Tal fato despertou a atenção de pesquisadores da Faculdade de Ciências Médicas da UNICAMP, que, com o auxílio da

FAPESP, realizam estudos segundo projeto desenvolvido (Cordeiro, 2006). Dados já coletados servem de entrada para o modelo aqui proposto, definindo diversos parâmetros do problema.

2. Objetivos

- Criar um modelo matemático que represente a evolução da dengue, com aplicação no distrito sul da cidade de Campinas, levando em consideração as populações envolvidas (humanos e *Aedes aegypti*);
- Empregar ferramentas matemáticas que permitam:

  (i) agregar ao modelo informações de natureza imprecisa (inerente a fenômenos biológicos), de maneira tratável matematicamente (através da Teoria dos Conjuntos Fuzzy) e

  (ii) solucionar o modelo proposto – no caso, numericamente, através dos métodos dos Elementos Finitos e de Crank-Nicolson;
- Construir um programa em ambiente MATLAB para a resolução do modelo, utilizando os métodos citados;
- Visualizar a evolução da doença em ambiente MATLAB;
- Analisar diferentes cenários a partir de diferentes parâmetros (condições iniciais ou coeficientes).

3. Metodologia

3.1 Modelagem matemática

As populações envolvidas no fenômeno dengue na região de estudo são, essencialmente, os humanos e o mosquito *Aedes aegypti*. Como o vírus só é transmitido para uma pessoa através da picada do artrópode contaminado,

é necessária a existência do mosquito vetor para a perpetuação da doença entre os humanos. Portanto, é essencial o estudo do vetor.

O modelo compartimental criado divide as populações de humanos em suscetíveis (S), infectantes (I) e recuperados (R) e a de *Ae. aegypti* em aquáticos (A), adultos suscetíveis (M_S) e adultos infectantes (M_I). O compartimento de mosquitos aquáticos compreende a população do artrópode em sua fase aquática, englobando os estados de ovo, larva e pupa. A fase alada corresponde à fase adulta. A cada instante, cada indivíduo pertence a exatamente um compartimento, não podendo assumir mais de um ou nenhum estado. O termo infectante, para humanos, significa que o indivíduo está infectado (doente) e ao mesmo tempo apto a transmitir o vírus. Para os artrópodes, significa simplesmente que carrega o vírus e que pode contaminar outros seres pela picada.

A passagem do compartimento de suscetíveis para o de infectantes obedece o princípio de ação das massas (Hamer, 1906), de acordo com o qual a propagação de uma epidemia depende da taxa de contato entre indivíduos suscetíveis e infectantes. Portanto, depende da quantidade existente dessas duas populações.

O modelo é formulado para a simulação do espalhamento da dengue no início do período de chuvas em Campinas, correspondendo aos meses de dezembro, janeiro e fevereiro. Como é um período relativamente curto de tempo, não se leva em conta a reprodução da população humana. Entretanto, como o ciclo de vida dos mosquitos é bem menor, de cerca de um mês, admite-se crescimento malthusiano, influenciado por fatores ambientais a serem comentados adiante. Mais algumas hipóteses do modelo formulado se apresentam a seguir:

- Uma vez que tenha adquirido o vírus da dengue, um mosquito o carrega pelo resto de sua vida;

- Mosquitos suscetíveis e infectantes geram mosquitos suscetíveis (a transmissão transovariana é desprezada), não havendo outra maneira de

adquirir o vírus além da picada em um humano infectante;

– O tempo é insuficiente para se considerar a perda de imunidade dos humanos recuperados;

O modelo proposto se apresenta através do sistema de equações diferenciais parciais (1).

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M_S}{\partial t} - div(\alpha_M \nabla M_S) &= \gamma A - \mu_S M_S - \beta_1 I M_S \\
\frac{\partial M_I}{\partial t} - div(\alpha_M \nabla M_I) &= \beta_1 I M_S - \mu_I M_I \\
\frac{\partial A}{\partial t} &= \kappa M - \gamma A - \mu_A A \\
\frac{\partial S}{\partial t} - div(\alpha_H \nabla S) &= -\beta_2 S M_I \\
\frac{\partial I}{\partial t} - div(\alpha_H \nabla I) &= \beta_2 S M_I - \sigma I \\
\frac{\partial R}{\partial t} - div(\alpha_H \nabla R) &= \sigma I
\end{aligned}
\tag{1}
$$

As variáveis M_S, M_I, A, S, I e R correspondem aos valores das densidades de cada compartimento em cada ponto dos domínios espacial e temporal. β_1 e β_2 são os coeficientes correspondentes às taxas, respectivamente, de contato efetivo entre humanos infectantes e mosquitos suscetíveis e de contato efetivo entre humanos suscetíveis e mosquitos infectante, gerando contaminação. μ_1, μ_2 e μ_A são as taxas de mortalidade específicas nas populações de mosquitos alados suscetíveis, mosquitos alados infectantes e mosquitos aquáticos, nesta mesma ordem. κ está relacionado à oviposição do mosquito e γ à sua passagem da fase aquática para a alada. $1/\sigma$ é o tempo que um humano passa no compartimento de infectantes após adquirir o vírus. Os

termos na forma $-div(\alpha_P \nabla P)$ do lado esquerdo das equações correspondem à dispersão de cada população P. Os coeficientes de dispersão (α_M para os mosquitos e α_H para os humanos) são maiores para os artrópodes, indicando que estes se locomovem mais em busca de recursos (sangue e recipientes com água para a reprodução, alimentos, etc.), enquanto que os humanos têm suas moradias fixas (embora se locomovam diariamente por causa de trabalho, escola, lazer, etc, gerando contatos não-locais, não considerados neste trabalho).

3.2 Fatores ambientais

Variáveis ambientais como temperatura, precipitação pluviométrica, oferta de alimentos, predadores e locais propícios à reprodução são fatores que influenciam na dinâmica do *Aedes aegypti*. Como o humano, em geral, propicia condições para a reprodução do mosquito (disponibilizando recipientes que podem acumular água e se tornarem criadouros), acaba por ser o animal mais próximo do habitat do mosquito, se tornando a maior vítima de suas picadas (Consoli e Oliveira, 1994).

A temperatura ideal para a proliferação do *Aedes aegypti* estaria em torno de 30 a 32 °C de acordo com Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental (2008). Como o período a ser considerado para as simulações é em torno do verão em Campinas, considera-se que a temperatura é ótima para o mosquito durante todo o período.

A chuva, entretanto, não é fixa. Dessa maneira, é considerado que ela pode variar, influenciando coeficientes do sistema de equações, relacionados à oviposição (mais chuva em geral significa mais ovos), à transformação de aquáticos em alados (se há pouca água, os ovos não eclodem, de maneira que os mosquitos podem ficar semanas neste estado, até que chova e ele possam se desenvolver e se transformar em alados), à mortalidade de aquáticos (se o mosquito se apresentar na forma de larva ou pupa, a falta de água é fatal) e à dispersão do mosquito (se há chuva e não há animais para picar ou recipi-

entes por perto, o mosquito se locomove mais para suprir as necessidades da reprodução).

A disponibilidade de recipientes é outro fator importante na reprodução dos mosquitos, influenciando a oviposição (se há poucos recipientes para a reprodução, a oviposição é baixa) e a dispersão (a falta de recipientes em período de chuvas faz com que os mosquitos se locomovam mais em busca desse recurso).

A quantidade de humanos também é considerada influente na atividade do *Ae. aegypti*, uma vez que, em geral, são os animais mais pertos do seu habitat. São, portanto, importantes para o suprimento de sangue para a maturação dos ovos e, consequentemente, influenciam na oviposição e na dispersão.

Outros fatores ambientais (predadores, alimentos, etc) são considerados favoráveis à reprodução do mosquito, de maneira que, para o problema, são utilizadas as seguintes variáveis ambientais: densidade de recipientes Q, densidade de humanos H e precipitação pluviométrica C.

Apesar de poderem ser representadas numericamente, neste trabalho escolhe-se tratá-las como variáveis fuzzy, uma vez que nenhuma delas é conhecida com exatidão. Seus valores são previsões ou estimativas e ainda costumam ser rotuladas linguisticamente com adjetivos como "alta", "médio-alta" ou "baixa". E, além da propriedade de conhecimento parcial, a variável referente à precipitação pluviométrica é aqui considerada de natureza aleatória. Portanto, para a escolha do valor de C, são realizados sorteios através do Método da Transformação Integral (Bussab e Morettin, 2007), em que a função de distribuição acumulada de C são os dados de precipitação pluviométrica dos últimos 21 anos.

Para o tratamento dessas variáveis consideradas fuzzy, recorre-se à Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Constrói-se um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (Barros e Bassanezi, 2006; Massad et al., 2008), com premissas do tipo "se a precipitação pluviométrica C é alta, a densidade de humanos H é alta e a densidade de recipientes Q é alta então o coeficiente de oviposição κ é alto, o

coeficiente de dispersão α_M é baixo, o coeficiente de transformação γ é alto e a mortalidade μ_A de aquáticos é baixa". Utilizando-se, como entradas, dados de chuva e de densidade de recipientes e de humanos, através do método de inferência de Mamdani são obtidos valores determinísticos para κ, α_M, γ e μ_A.

3.3 Método numérico

Embora se possa demonstrar a existência de solução para o sistema de equações diferenciais parciais (1), esta não é conhecida, de maneira que faz-se necessária a utilização de métodos numéricos para a obtenção de valores de M_S, M_I, A, S, I e R.

São empregados os métodos dos Elementos Finitos e o de Crank-Nicolson. O método dos Elementos Finitos, de acordo com a abordagem de Galerkin (Fairweather, 1978), consiste em procurar soluções da equação integral obtida a partir do produto interno de $L^2(\Omega)$ realizado nos termos da equação com uma função de teste v de um espaço apropriado $\mathcal{M}$. Este espaço possui dimensão finita e o novo problema passa a ser encontrar as aproximações das variáveis do sistema, escritas como combinação linear dos termos da base – funções lineares, neste trabalho. Tais termos são definidos pela malha irregular de triângulos que aproxima o domínio espacial, gerada pelo *software* livre Gmsh. As condições de contorno utilizadas são de von Neumann homogêneas.

O método de Crank-Nicolson trata a variável temporal, resolvendo o problema a cada passo no tempo, dividido em nt intervalos de igual tamanho.

3.4 Acoplamento das ferramentas

Após a discretização do domínio espacial através do *software* Gmsh (resultando em uma malha de 1221 pontos e 2227 triângulos), é realizado o acoplamento das ferramentas. O processo resulta em um programa implementado em ambiente MATLAB 7.0, que realiza 900 iterações (passos no

tempo), equivalente à simulação da evolução da dengue em 90 dias.

O acoplamento das ferramentas utilizadas obedece o esquema da Figura 3.4. É realizado, inicialmente, o sorteio da variável C (precipitação pluviométrica), através do Método da Transformação Inversa. O valor obtido, em conjunto com as variáveis Q e H definidas de acordo com dados fornecidos por especialista, servem de entrada para o SBRF. Como saída, são obtidos os valores para os coeficientes κ, α_M, γ e μ_A, do sistema de equações. Fornecendo as condições iniciais M_{S0}, M_{I0}, A_0, S_0, I_0 e R_0, através dos métodos numéricos são obtidos os valores atualizados M_S, M_I, A, S, I e R. No passo seguinte, os valores de saída para as densidades populacionais servem de entrada para outra resolução através dos métodos numéricos referentes ao espaço e ao tempo. Esta última etapa é repetida a cada passo no tempo, até o fim de 150 iterações. Esta quantidade de passos equivale ao período de 15 dias, ao final do qual se realiza um novo sorteio para a precipitação pluviométrica, redefinindo-se os parâmetros de dispersão do mosquito e de sua reprodução através do método de inferência de Mamdani. Devido à dispersão dos humanos, apesar de ser pequena, a cada final de 15 dias a movimentação é levada em conta, redefinindo a variável $H = S+I+R$ em cada ponto do domínio espacial. Novamente, até o fim de outras 150 iterações, o sistema de EDPs é resolvido utilizando-se os métodos numéricos, quando outro valor para a chuva é sorteado e H é novamente redefinido. Tal processo segue até o total de 900 passos no tempo.

4. Resultados

Como citado anteriormente, o programa que resolve o problema da evolução da dengue é implementado em ambiente MATLAB 7.0. Para a manipulação das variáveis fuzzy, são construídos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, através do *Toolbox Fuzzy* do MATLAB (Amendola et al., 2005).

Valores de quantidade de recipientes encontrados e de população humana referentes a cada região coberta por um centro de saúde diferente foram

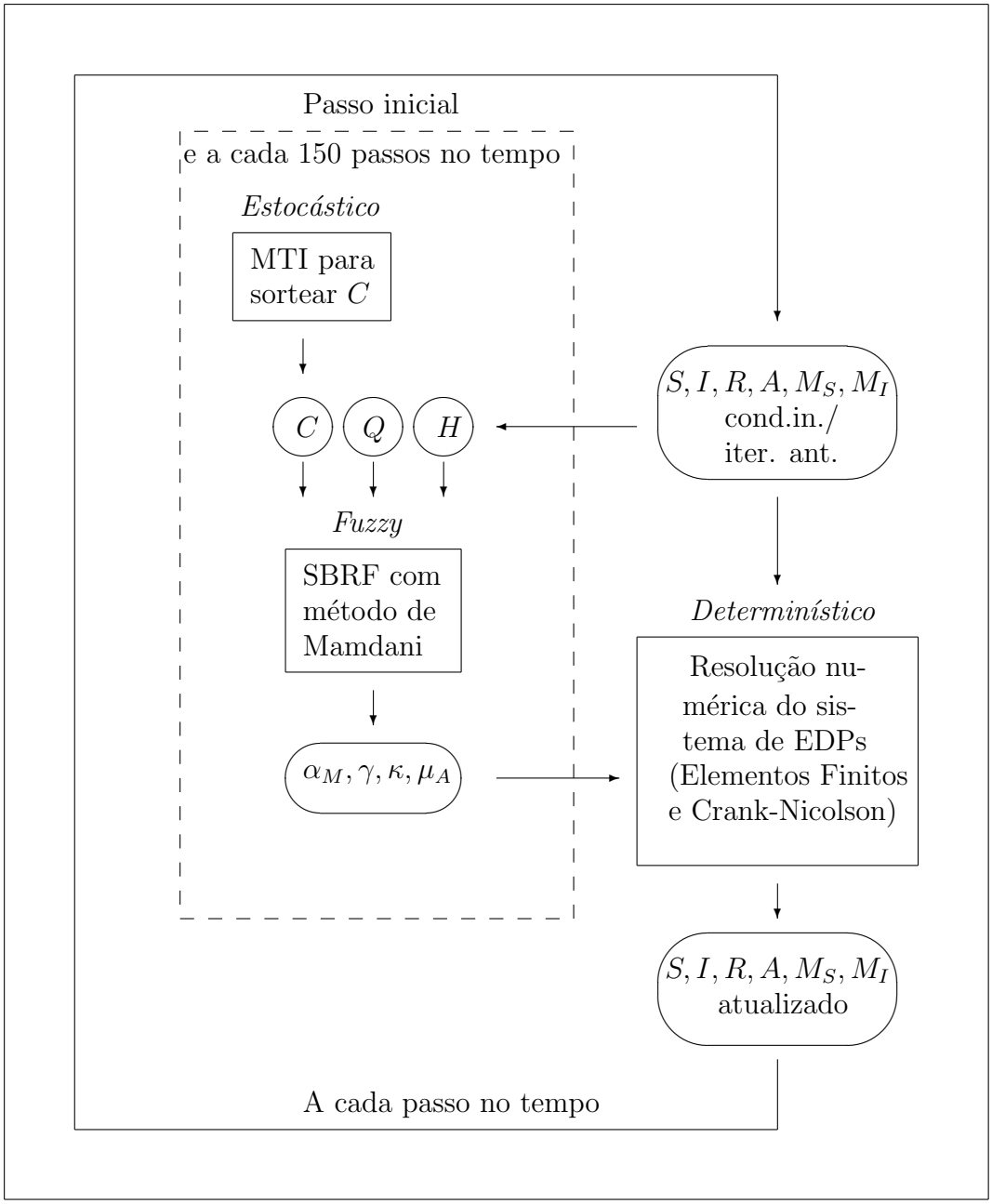


Figura 1: Esquema representativo do algoritmo de simulação acoplando as ferramentas estudadas.

fornecidos por pesquisadores e são utilizados para determinar parâmetros e condições inicias do problema.

Notou-se que tais valores para as pequenas regiões, mais ao norte do distrito, eram semelhantes entre si, se diferindo das três grandes regiões a leste, a oeste e a sul. Com base nesta observação, o domínio espacial foi dividido em quatro grandes áreas, cada uma com um valor diferente para a quantidade de recipientes e de humanos. Dentro de uma mesma região, entretanto, são consideradas quantidades constantes de um ponto para outro da malha, de maneira a facilitar as definições dos valores de tais variáveis e permitir que o trabalho seja possível de ser realizado.

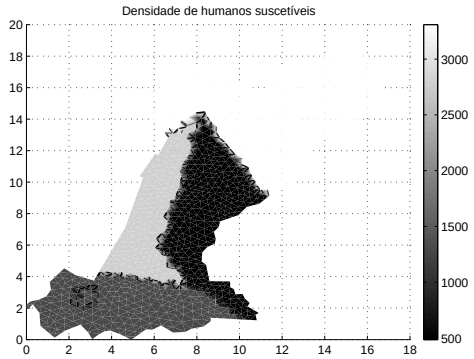


Figura 2: Condição inicial para a densidade de humanos suscetíveis S_0 para as três simulações.

Neste artigo são apresentadas três simulações. Os valores das precipitações pluviométricas foram diferentes para os três casos, sendo que na simulação 1 foram utilizados os valores de dezembro de 2006 e janeiro e fevereiro de 2007. Tais valores foram escolhidos para se calibrar os parâmetros de transmissão, com o intuito de se obterem valores próximos às estimativas de 60 e 450 casos de dengue nos meses de janeiro e fevereiro de 2007, respectivamente. Para as demais simulações, os valores foram definidos por sorteio através do Método da Transformação Integral. Com relação às condições ini-

ciais, só a simulação 3 se diferia, apresentando dois focos de dengue (em torno dos pontos $(x, y) = (2.7, 2.75)$ e $(x, y) = (1.9, 4.0)$), enquanto as outras apresentavam quatro (em torno dos pontos $(x, y) = (2.7, 2.75)$, $(x, y) = (1.9, 4.0)$, $(x, y) = (5.3, 6.3)$ e $(x, y) = (10, 14)$).

Os resultados se apresentam na forma de gráficos com o valores das densidades das populações ao longo do domínio espacial no tempo final $t = 90$ dias; gráficos com o valores das densidades das populações em função dos passos no tempo no ponto 604 ($(x, y) = (5.30, 6.32)$) e tabelas com os valores da precipitação pluviométrica a cada período de 150 passos (valores obtidos por sorteio para as simulações 2 e 3 e por histórico para a simulação 1) e do número de casos de dengue em humanos a cada mês.

Tabela 1: Valores das somatórias das precipitações diárias para períodos quinzenais e média quinzenal (para cada simulação).

	Simulação 1	**Simulação 2**	**Simulação 3**
Período 1	89.4 mm	24.0 mm	182.8 mm
Período 2	109 mm	161.5 mm	63.0 mm
Período 3	264.4 mm	140.4 mm	158.9 mm
Período 4	211.3 mm	114.6 mm	106.6 mm
Período 5	74.2 mm	204.8 mm	207.8 mm
Período 6	128 mm	149.3 mm	133.4 mm
Média	146.05 mm	132.43 mm	142.08 mm

Tabela 2: Valores totais de pessoas infectadas a cada mês de acordo com cada simulação.

Simulação	**Dezembro**	**Janeiro**	**Fevereiro**
1	34 ind.	29 ind.	477 ind.
2	27 ind.	14 ind.	20 ind.
3	2 ind.	1 ind.	1 ind.

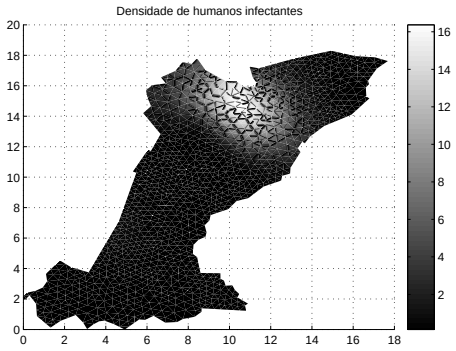


Figura 3: Humanos infectantes em $t = 90$ (simulação 1).

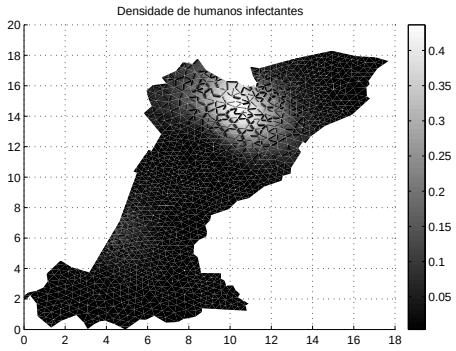


Figura 4: Humanos infectantes em $t = 90$ (simulação 2).

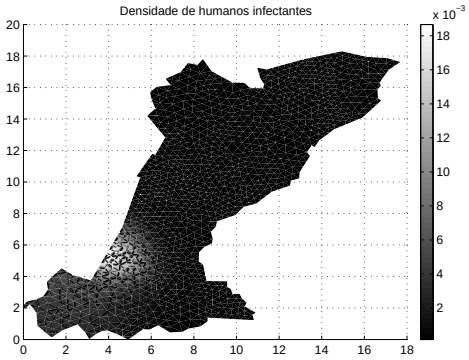


Figura 5: Humanos infectantes em $t = 90$ (simulação 3).

Como se pode observar nas Figuras 3 a 4 e na Tabela 2, a chuva de fato influenciou fortemente nos resultados das simulações. Os valores dos números de casos de dengue em humanos a cada mês foram drasticamente alterados da simulação 1 para a simulação 2, que apresentavam os mesmos valores para as condições iniciais e para os parâmetros não relacionados à chuva. Isso foi devido não apenas à diferença na média quinzenal de precipitação pluviométrica, como foi possível observar em outras simulações aqui não apresentadas. A sua distribuição também foi determinante, permitindo,

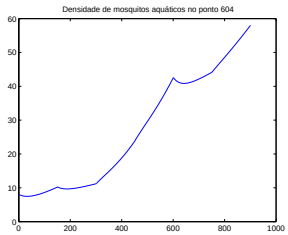


Figura 6: Mosquitos aquáticos no ponto 604 ao longo do tempo (simulação 1).

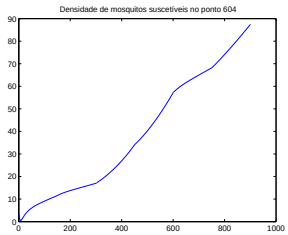


Figura 7: Mosquitos suscetíveis no ponto 604 ao longo do tempo (simulação 1).

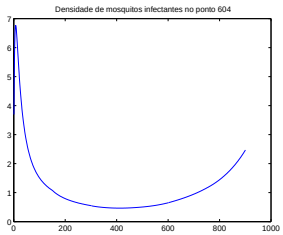


Figura 8: Mosquitos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (simulação 1).

em alguns casos, que a infecção se tornasse forte desde o início e, em outros casos, que o espalhamento fosse fraco. Mesmo com médias quinzenais para precipitação idênticas, se houvesse mais chuva nos primeiros períodos, o número final de casos era maior.

Incluindo-se na análise a simulação 3 (Figura 5 e Tabela 2), nota-se que, mesmo com uma média de precipitação mais elevada, a infecção não teve força o suficiente para resultar em números de casos altos como das outras simulações. Isso foi devido à menor quantidade de focos e à localização deles, em região não propícia à reprodução do mosquito vetor (com menos recipientes e humanos). Um fato que se mostra interessante é o deslocamento do foco, para uma região vizinha com condições mais propícias para o seu espalhamento.

As Figuras 6 a 8 apresentam os gráficos da evolução no tempo das densidades de mosquitos aquáticos, de mosquitos suscetíveis e de mosquitos infectantes no ponto 604 do domínio espacial, obtidas da simulação 1. Percebe-se claramente a influência da chuva nas populações de mosquitos aquáticos e de suscetíveis, de maneira que, a cada mudança de valor de precipitação pluviométrica (a cada 150 passos), surge um "bico"em cada gráfico, indicando uma tendência diferente para os valores das populações. Para as três divisões de compartimentos para o mosquito, as condições no ponto 604 se mostram

favoráveis para o crescimento.

5. Conclusões

A partir do estudo das populações e de fatores envolvidos no fenômeno dengue, foi possível realizar a modelagem compartimental para o espalhamento de dengue no distrito sul da cidade de Campinas, resultando em um sistema de equações diferenciais parciais. As informações a respeito das variáveis ambientais (densidade de humanos, densidade de recipientes e precipitação pluviométrica) foram obtidas por diferentes fontes e tratadas como incertas, pela Teoria dos Conjuntos Fuzzy e por método probabilístico para o sorteio de uma das variáveis (precipitação pluviométrica). Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, utilizando método de inferência de Mamdani, foram criados para inferir valores determinísticos, os quais alimentam os modelos de sistemas de EDPs. Analisando os resultados, concluiu-se que a variação na média quinzenal e na distribuição da precipitação pluviométrica ao longo dos períodos se mostrou determinante na força da infecção (espalhamento da dengue). Diferenças nas condições iniciais também causaram forte influência no fenômeno, de maneira que, quando focos de dengue foram colocados em regiões menos propícias à reprodução do mosquito vetor, a dengue não se estabeleceu ou se espalhou em outra região vizinha mais propícia.

Agradecimentos

Agradecemos:

- À CAPES;
- Ao CNPq (processo nº 307890/2006-6);
- À FAPESP (processo nº 06/05920-7);
- Ao grupo de pesquisadores envolvidos no estudo da dengue.

Referências

Amendola, M., Souza, A. L., e Barros, L. C. (2005). Manual do uso da teoria dos conjuntos fuzzy no matlab 6.5. url: *http://www.ime.unicamp.br/∼laeciocb/manual_fuzzy_matlab.pdf*. FEAGRI e IMECC – UNICAMP. Campinas. 44p.

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Coleção IMECC – Textos Didáticos, Campinas.

Bussab, W. O. e Morettin, P. A. (2007). *Estatística Básica*. 5. Saraiva, São Paulo.

Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental (2008). Dengue – saiba como se prevenir... url: *http://www.cetesb.sp.gov.br/Institucional/dengue/dengue.asp*. Secretaria de Estado do Meio Ambiente. São Paulo.

Consoli, R. A. e Oliveira, R. L. (1994). *Principais Mosquitos de Importância Sanitária no Brasil*. 5. Fiocruz, Rio de Janeiro.

Cordeiro, R. (2006). Distribuição espacial do risco de dengue no distrito sul de campinas. Projeto. FCM – Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Fairweather, G. (1978). *Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations*. M. Dekker, New York.

Gomes, L. T. (2009). Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando equações diferenciais parciais e lógica fuzzy. Dissertação de Mestrado. IMECC– Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Hamer, W. H. (1906). Epidemic disease in england. *The Lancet*, 1:733–739.

Maidana, N. A. e Yang, H. M. (2007). A spatial model to describe the dengue propagation. *TEMA Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 8:83–92.

Massad, E., Ortega, N. R., e Barros, L. C. (2008). *Fuzzy logic in action: applications in epidemiology and beyond*. Springer, New York.

Ministério da Saúde (2008). Programa nacional de controle da dengue. url: *http://portal.saude.gov.br/saude/area.cfm?id_area=920*. Brasil.

Takahashi, L. T. (2004). Modelos matemáticos de epidemiologia com vetores: simulação da propagação urbana e geográfica da dengue. Tese de Doutorado. IMECC– Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Thomé, R. C. (2007). Controle Ótimo aplicado na estratégia de combate ao aedes aegypti utilizando inseticida e mosquitos estéreis. Tese de Doutorado. IMECC– Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP.

Biomatemática ***19*** *(2009), 57–68* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Dispersão de Poluentes em Sistema de Reservatório: Modelagem Matemática via Lógica Fuzzy e Aproximação Numérica

E. C. C. Poletti[1],
FEEC – UNICAMP e DDBC, CESET – UNICAMP, 13.484-332, Limeira/SP.

J. F. C. A. Meyer[2],
DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-970, Campinas/SP.

Resumo. Este trabalho relata um estudo da dispersão de poluente em um sistema de reservatório, cuja modelagem matemática se deu através do uso combinado de Lógica Fuzzy e métodos de aproximação numérica. Utilizando a equação diferencial parcial de difusão-advecção, condições iniciais e de contorno são propostas, além de uma possível leitura dos parâmetros da equação onde foram considerados aspectos de imprecisão ou incerteza.

Palavras-chave: *Dispersão de poluentes; lógica fuzzy; aproximação numérica e simulação computacional.*

1. Introdução

A variabilidade na precisão de parâmetros utilizados em estudos nas áreas de Biomatemática em geral, e de Ecologia Matemática em particular,

[1]elainec@sceset.unicamp.br
[2]joni@ime.unicamp.br

é um fator de interesse e de preocupação por parte de pesquisadores, que buscam valores significativos para testes e simulações de cenários compatíveis com a realidade (Bassanezi, 2002).

De acordo com vários estudos, tais previsões estão sempre dependentes de informações que muitas vezes se caracterizam por certo grau de incerteza e imprecisão (Barros, 2001; Barros e Bassanezi, 2006).

Deste modo, este estudo foi realizado buscando nos conjuntos fuzzy uma alternativa a este tipo de problema.

Fornecendo uma resposta aproximada, foi possível modelar e manipular informações imprecisas, muitas vezes baseadas em informações incompletas, ou, ainda que numericamente confiáveis em termos da medida em si, não sejam totalmente confiáveis em termos de variabilidades múltiplas.

2. O Problema

Este estudo foi realizado considerando a situação evolutiva do reservatório de Salto Grande, localizado na cidade de Americana-SP, região que conta atualmente com um dos mais importantes e diversificados parques industriais do Brasil.

Abrangendo indústrias de papel e celulose, têxtil e de couro, alimentícias e metalúrgicas, químicas e de refino de petróleo. A região é tida como a segunda região mais rica do estado e a terceira do país (Espíndola et al., 2004).

O reservatório de Salto Grande é formado pelo represamento das águas do rio Atibaia e outros ribeirões de menor vazão. Está inserida na sub-bacia do rio Atibaia, um dos mananciais de abastecimento público mais importantes da região, pertencente à bacia hidrográfica do rio Piracicaba.

Desde 1977, quando as águas do reservatório podiam ser destinadas ao abastecimento doméstico (após tratamento convencional), recreação, irrigação, entre outros fins, se observa um processo acentuado de deteriozação e consequente redução de seus usos múltiplos (Espíndola et al., 2004).

O grande aporte de matéria orgânica e inorgânica, transportados prin-

cipalmente pelo rio Atibaia, tem levado à minimização de usos múltiplos, afetando a produção de energia, auxiliando no florescimento de algas e surgimento de bactérias, que produzem toxinas e alteram a comunidade aquática, causando problemas de saúde pública e para a biota local.

3. O Modelo Matemático

A equação utilizada neste estudo é conhecida por Equação de Difusão-Advecção, trata-se de uma equação diferencial parcial tradicional em diversos e diferentes estudos ligados a situações gerais e a análises em ecologia matemática (Marchuk, 1986; Meyer e Diniz, 2007).

Incorporando fatores microscópios e macroscópios a equação considera fenômenos de dispersão, na concepção de difusão "efetiva", como citado e usado, por exemplo, em Marchuk (1986) e Okubo (1980), o transporte advectivo (Edelstein-Keshet, 1988), os fenômenos de decaimento (Bassanezi e Ferreira Jr, 1978) e possíveis fontes de material impactante que possam ocorrer.

Chamando de $c = c(x, y; t)$ a concentração do poluente como a quantidade de matéria existente em um determinado ponto do plano (x, y) no instante (t) com $(x, y; t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times (0,\mathrm{T}]$, o modelo pode ser representado genericamente por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = div[\alpha \nabla c] - div[\vec{V} c] - \sigma c + f, \tag{1}$$

para $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $t \in (0, T] \subset \mathbb{R}$, onde:

1. o termo $div[\alpha \nabla c]$ representa a difusão;

2. $div[\vec{V} c]$, modela o transporte advectivo, campo que indica direção e intensidade da velocidade de transporte e considerando $div[\vec{V}] = 0$;

3. o termo $\sigma(x, y; t)c(x, y; t)$ representa a degradação do poluente; e

4. $f = f(x, y; t)$ modela a fonte, que pode ser pontual.

A fonte de poluição no reservatório será considerada pontual, localizada na parte inferior da fronteira Γ_1 da figura 1.

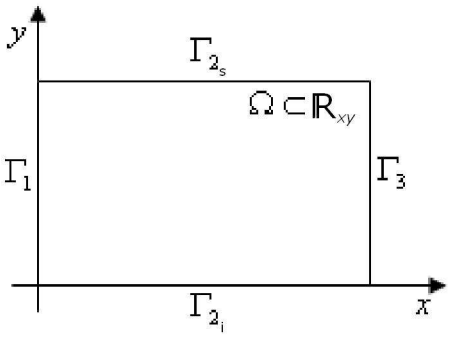


Figura 1: Domínio Ω.

Tomando como condições de contorno as condições de von Neumann homogênas, tem-se:

$$\left.\frac{\partial c}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_i} = 0, \forall\, t, (x, y) \in \Gamma_i, i = 1, 2i, 2s, 3, \tag{2}$$

entendendo que não há variação de poluente na fronteira.

As equações (1) e (2) representam o modelo bidimensional para o estudo da dispersão de poluente no reservatório em sua formulação clássica, também denominada formulação forte do problema.

4. Formulação variacional e discretização

Na formulação clássica do problema se exige que a solução seja, no mínimo, de classe C^2, onde as funções, além de serem contínuas, devem ter também as derivadas segundas contínuas, o que é uma exigência forte para a função.

Deste modo, propõe-se a formulação variacional do problema, que "enfraquece" as condições de regularidade para a solução.

Neste sentido, considerando o espaço abaixo, necessário para a formulação variacional genérica, para uma separação de variáveis espaciais e temporal:

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in L^2\left[J, H^1(\Omega)\right], \text{ com } \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Omega), \ \forall\, t \in J \right\}.$$

com J=(0,T] e os produtos internos dados por:

$$\langle u|v\rangle_{0,\Gamma} = \int_{\partial\Omega} u(x,y).v(x,y)d\gamma; \text{ e } (\nabla u\ |\nabla v)_{0,\Omega} = \iint_{\Omega} \nabla u.\nabla v d\mu.$$

Usando estes produtos internos apropriadamente, se obtem a formulação fraca dada por:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}\middle| v\right)_{\Omega} + \alpha\,(\nabla c|\nabla v)_{\Omega} + V_1\left(\frac{\partial c}{\partial x}\middle| v\right)_{\Omega} + \sigma\,(c|v)_{\Omega} = (f|v)_{\Omega}, \forall\, v \in \mathcal{V}. \quad (3)$$

Para a discretização da equação, a escolha foi pelo Método de Elementos Finitos, via método de Garlekin, para a discretização espacial e Crank-Nicolson para a discretização temporal.

Deste modo, obtêm-se aproximações para a solução em variáveis separadas, $c(x,y;t) = \sum_j c_j(t).\varphi_j(x,y)$, onde o sub-índice j refere-se à discretização do domínio considerado e $\{\varphi_j\}$ é uma base para o subespaço $V_h \subset H^1(\Omega)$ de dimensão $N < \infty$.

As funções da base de V_h são escolhidas do tipo linear por partes, satisfazendo:

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

onde (x_j, y_j) são as coordenadas do j-ésimo nó da malha.

Assim, $\forall \varphi_i \in$ base de V_h, se obtem:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_j c_j^{n+1} \left\{ \frac{1}{\Delta t}\,(\varphi_j|\varphi_i)_{\Omega} + \frac{\alpha}{2}\,(\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i)_{\Omega} + \frac{V_1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}|\varphi_i\right)_{\Omega} + \frac{\sigma}{2}\,(\varphi_j|\varphi_i)_{\Omega} \right\} \\ &= \textstyle\sum_j c_j^{n} \left\{ \frac{1}{\Delta t}\,(\varphi_j|\varphi_i)_{\Omega} - \frac{\alpha}{2}\,(\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i)_{\Omega} - \frac{V_1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}|\varphi_i\right)_{\Omega} - \frac{\sigma}{2}\,(\varphi_j|\varphi_i)_{\Omega} \right\} \\ &+ \left(f^{n+\frac{1}{2}}|\varphi_i\right)_{\Omega}. \end{aligned} \quad (5)$$

A ordem das aproximações temporais é, localmente, $\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)$.

5. Modelagem dos coeficientes de transporte, degradação e difusão

Propondo uma modcelagem através do uso dos conjuntos fuzzy, via sistema de base de regras, para os coeficiente de difusão α, transporte V_1 e de degradação σ o propósito é o de imcorporar ao modelo clássico, características intrínsicas de incerteza e imprecisão desses fenômenos.

Um sistema de base de regras possui basicamente quatro componentes: um processador de entrada, um conjunto de base de regras liguísticas, um método de inferência e um processador de saída.

Nesta modelagem são propotos três controladores: um para o coeficiente de transporte -V_1 , dependente do vento; outro o coeficiente de degradação -σ, dependente do tipo de ambiente e da quantidade de matéria e, finalmente, o terceiro controlador responsável pela modelagem do coeficiente de difusão - α, dependente do transporte e da degradação do poluente.

O sistema de regras liguísticas utilizadas para a modelagem do coeficiente de transporte foi: *vento fraco, moderado, forte e muito forte* resultando em *transporte pequeno, médio, forte e muito forte.*

Para o coeficiente de degradação se utilizou os termos: *ambiente favorável, mediano, desfavorável*; *quantidade de matéria: pouca, quantidade média, muita* resultando em *decaimento baixo, médio baixo, médio, médio alto, alto.*

Finalmente, para o coeficiente da difusão foram utilizadas como entradas as saídas dos dois controladores mencionados anteriormente, transporte e degradação, resultando em *difusão baixa, média baixa, média, média alta, alta.*

As variáveis de entrada e saída foram modeladas matematicamente por conjuntos fuzzy, através de funções de pertinência triangulares e trapezoidais.

Para inferência, foi adotado o método de Mamdani e, como método de defuzzificação, se utilizou o método de Centro de Gravidade.

Assim, a modelagem dos coeficientes foram representadas pelas figuras 2, 3 e 4:

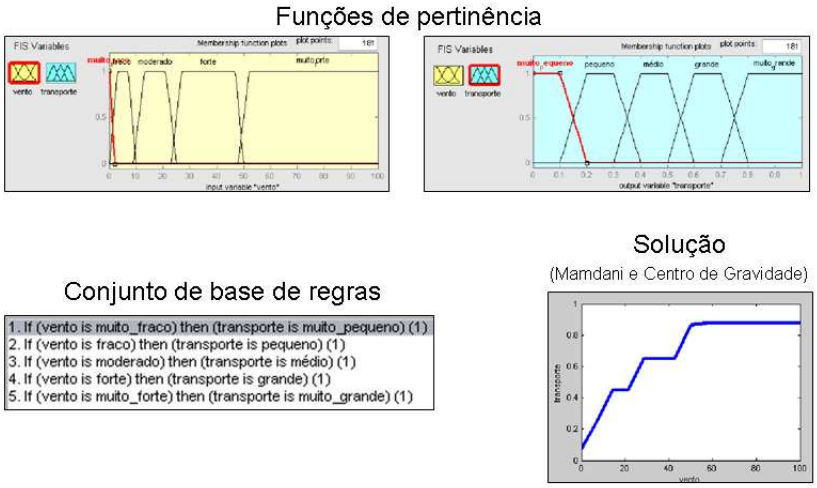


Figura 2: Modelagem do coeficiente de transporte.

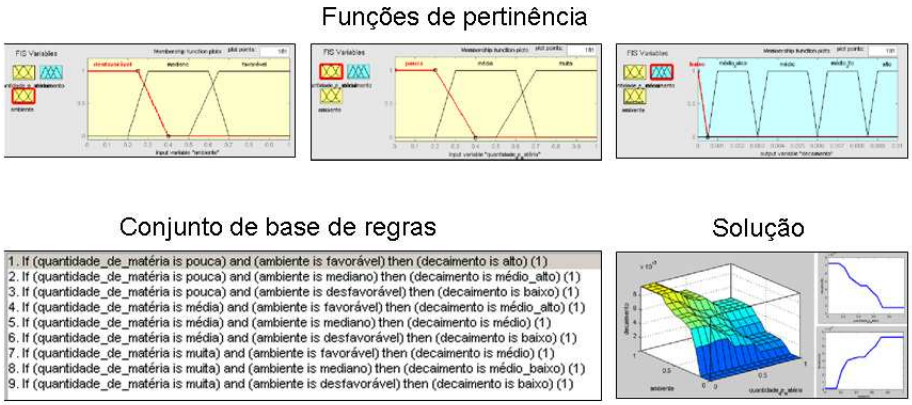


Figura 3: Modelagem do coeficiente de degradação.

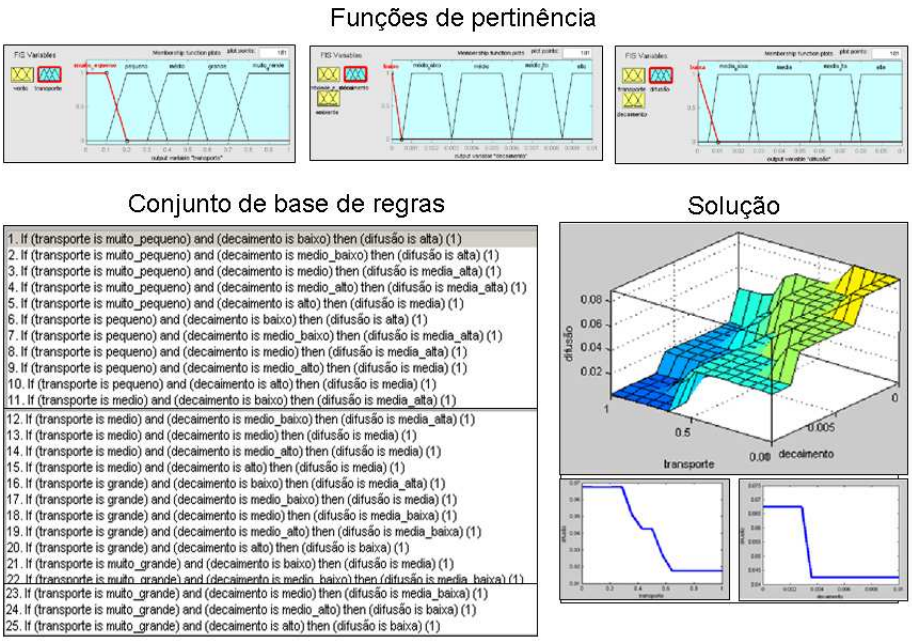


Figura 4: Modelagem do coeficiente de difusão.

6. Resultados

Nas simulações realizadas, foi considerada a dispersão do poluente no reservatório por uma fonte pontual, representando o ingresso de poluente no domínio, além de uma quantidade inicial $c_0 = c(x, y, 0)$ de poluente no reservatório.

Os valores utilizados foram: domínio genérico, retangular, de 12×1 km; $c_0 = 0,5$ unidades de poluente por unidade de área; $f = 0,0875$; $\Delta x = \Delta y = \Delta t = 0,05$; vento moderado $V_1 = 0,325$.

A tabela abaixo indica os valores utilizados para a modelagem do coeficiente do decaimento.

Recorrendo a um algorítmo, em ambiente Matlab®, foram realizadas as simulações computacionais para um período de 5 dias.

Foram gerados nove cenários, variando-se os valores atribuídos para o

Tipo de ambiente	Quantidade de Matéria	Degradação
desfavorável 0,25	pouca 0,2	0,00297
	mediana 0,6	0,00264
	muita 0,75	0,00143
mediano 0,6	pouca 0,2	0,00604
	mediana 0,6	0,00469
	muita 0,75	0,00303
favorável 0,87	pouca 0,2	0,00914
	mediana 0,6	0,00613
	muita 0,75	0,00450

tipo de ambiente e quantidade de matéria. Manteve-se nessas simulações o vento caracterizado por moderado.

A fonte pontual foi considerada no terceiro nó da malha.

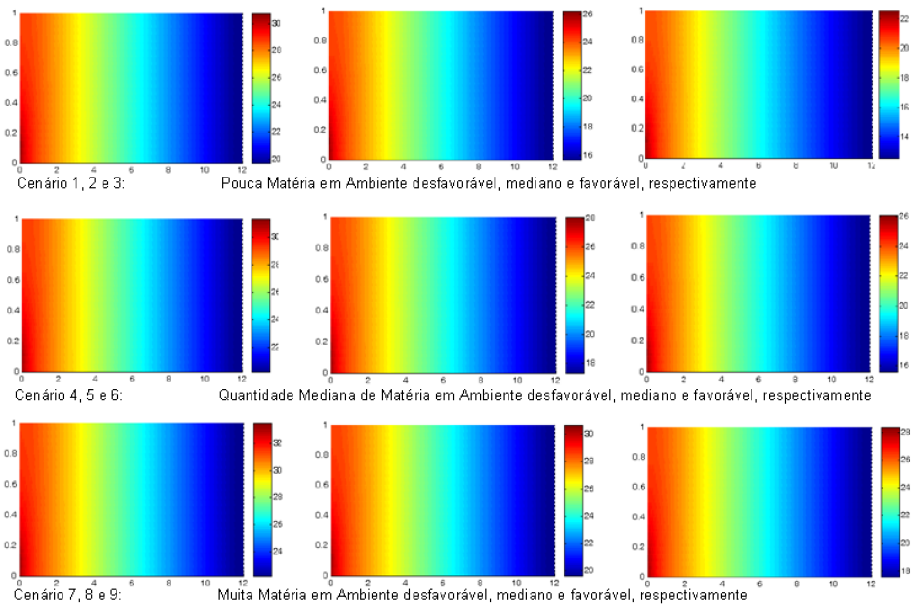


Figura 5: Simulações com condições de fronteira de von Neumann homogêneas.

Os cenários 1, 2 e 3 apresentam a dispersão do poluente, considerando-se vento moderado, pouco material impactante em ambiente desfavorável, mediano e favorável, respectivamente.

Nos cenários 4, 5 e 6, se observa o comportamento do poluente, ainda em situação de vento moderado, mas para uma quantidade mediana de material poluente no meio, em ambiente desfavorável, mediano e favorável, respectivamente.

Finalmente, os cenários 7, 8 e 9 retratam o comportamento do poluente, onde se considerou muito material impactante no meio, em ambiente desfavorável, mediano e favorável, respectivamente.

7. Conclusões

Nas simulações dos cenários apresentados na figura 5 se pode observar um comportamento qualitativamente semelhante, onde as condições do ambiente melhoram, de ambiente desfavorável passando por mediando e chegando a um ambiente favorável ao processo de degradação, em que são menores as concentrações de poluente no reservatório.

Também foi verificada a influência da quantidade de poluente no meio, pois quanto menor essa quantidade, melhores são as condições locais no tocante à poluição.

Conforme observado, as simulações realizadas buscaram investigar o comportamento do poluente num sistema de represamento, que traz por si só, características singulares, quando comparadas a um rio, por exemplo. Num sistema de reservatório a correnteza é praticamente nula, além de funcionar, muitas vezes, como um sistema de tratamento da água, pois muito do material impactante que ingressa num reservatório, acaba se sedimentando no fundo. Por isso, considerar as características do ambiente foi tão importante para esse tipo de sistema.

Referências

Barros, L. C. (2001). Teoria fuzzy x biomatemática. Acesso à internet. ¡http://www.ime.usp.br/t̃onelli/verao-fuzzy/laecio/minicurso3.pdf¿.

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Coleção Imecc, Textos Didáticos, Vol. 5, Campinas - SP: UNICAMP/IMECC.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino e aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. Contexto: São Paulo.

Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). *Equações diferenciais com aplicações*. Ed. Harbra, S. Paulo.

Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical models in Biology*. Random-House, N. York.

Espíndola, E. L. G., Leite, M. A., e Dornfeld, C. B. (2004). *Reservatório de Salto Grande (Americana, SP): Caracterização, Impactos e Propostas de Manejo*. RiMa: São Carlos.

Marchuk, G. I. (1986). *Mathematical models in environmental problems: Studies in mathematical and its applications*. North-Holland, Amsterdan.

Meyer, J. F. C. A. e Diniz, G. L. (2007). Pollutant dispersion in wetland systemas: Mathematical modelling and numerical simulation. *Ecological Modelling*, 200(3-4):360–370.

Okubo, A. (1980). *Diffusion and ecological problems: Mathematical models*. Springer, Berlin.

Biomatemática ***19*** *(2009), 69–80* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Dinâmica populacional com sistemas p-fuzzy: um estudo de caso para a cidade de Sorocaba

J. A. F. Roveda[1], S. R. M. M. Roveda[2], A. C. G. Martins[3]
Engenharia Ambiental - Campus Experimental de Sorocaba - Unesp,
18.087-180, Sorocaba/SP.

Resumo. Este trabalho apresenta uma aplicação dos sistemas p-fuzzy para o estudo da dinâmica populacional da cidade de Sorocaba. Alternativamente aos modelos determinísticos, os sistemas p-fuzzy são úteis na modelagem de fenômenos cujo comportamento é parcialmente conhecido, já que incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis. A dinâmica do processo é otida por meio de um controlador fuzzy to tipo Mamdani. Para este estudo foram elaboradas diferentes bases de regras, considerando a variação absoluta e relativa da população. Os resultados obtidos são comparados aos dados censitários e à projeção de um modelo determinístico.

Palavras-chave: *dinâmica populacional, modelagem fuzzy, sistemas p-fuzzy*

1. Introdução

Estudos recentes tem procurado estabelecer relações entre dinâmica populacional (como por exemplo, tamanho da população, crescimento, etc)

[1]roveda@sorocaba.unesp.br
[2]sandra@sorocaba.unesp.br
[3]amartins@sorocaba.unesp.br

e mudanças ambientais. Muitas teorias, subscritas por demógrafos, afirmam que a população é uma de muitas variáveis que afetam o meio ambiente e que o rápido crescimento da população agrava outras condições como guerras, tecnologias poluentes, distorções políticas, entre outras. Pesquisadores têm procurado compreender as nuances da relação entre população e ambiente tentando responder questões que incluem como especificar mudanças populacionais relacionadas a mudanças específicas no meio-ambiente e como as condições e mudanças ambientais, por sua vez, afetam a dinâmica populacional (Sherbinin et al., 2007).

As relações entre a dinâmica populacional e o ambiente são, de fato, complexas e difíceis de separar. Embora o estudo da dinâmica populacional utilizando equações relacionais ou diferenciais venha sendo desenvolvido desde o século XIX, há uma dificuldade inerente a esses modelos em retratar a complexidade do fenômeno e fazer predições precisas, já que os parâmetros envolvidos são obtidos de observações e experimentos estando, assim, sujeitos a imprecisões (Edelstein-Keshet, 1988).

Com o advento da lógica fuzzy, introduzida por Zadeh (Zadeh, 1965), há uma grande quebra de paradigma, quando o pensar em termos absolutos é substituído pelo pensar relativo. Essa mudança na forma de pensar, abre novas e refinadas formas de olhar antigas questões, particularmente constituiu-se uma nova abordagem para o estudo da dinâmica populacional.

A lógica fuzzy fornece um quadro conceitual no qual as fronteiras rígidas e as verdades ou negações absolutas são vistas, quando justificável, como casos particulares ao invés de únicas possibilidades. O processo de modelagem fuzzy permite expressar incertezas e sujetividades já que podem ser usadas informações qualitativas (linguísticas) e quantitativas. É caracterizado como um procedimento de fácil compreensão, apropriado para descrever sistemas com razoáveis quantidades de conhecimento, além de ser baseado em linguagem natural, o que permite maior facilidade na comunicação dos modelos (Gomide e Gudwin, 1994).

Uma ferramenta útil para modelagem de fenômenos cujo comporta-

mento é parcialmente conhecido são os sistemas p-fuzzy (Cecconelo, 2006).

Dentro desse contexto, é proposto neste trabalho um estudo da dinâmica populacional da cidade de Sorocaba através dos sistemas p-fuzzy.

Sorocaba é uma cidade situada no interior do estado de São Paulo, possuindo uma área de aproximadamente $450Km^2$. É considerada a terceira cidade mais populosa do interior paulista, com cerca de 560.157 habitantes e uma das 50 maiores cidades do Brasil (IBGE, 2007). Tendo sido precursora da industrialização paulista estabelece-se atualmente como um importante pólo de desenvolvimento industrial o que vislumbra um crescimento acentuado nas próximas décadas. Dessa forma, o estudo do crescimento populacional pode balizar as atividades de planejamento e definições de políticas públicas.

Este artigo está organizado da seguinte forma: a seção 2 apresenta os principais conceitos da teoria fuzzy necessários ao escopo deste trabalho; a seção 3 apresenta a metodologia de elaboração das bases de regras para dinâmica populacional dos sistemas p-fuzzy e sistemas iterativos e finalmente, a seção 4 mostra as projeções obtidas com os modelos gerados a partir das bases de regras construídas e analisa seus comportamentos comparando os resultados com os dados censitários e os do modelo de Verhulst.

2. Controladores e sistemas p-fuzzy

Nesta seção são apresentados brevemente alguns conceitos da teoria de conjuntos fuzzy, necessários para a compreensão do texto, uma descrição mais aprofundada pode ser encontrada em (Barros e Bassanezi, 2006).

Uma função de pertinência é uma curva que define o grau, de zero a um, com que cada ponto no espaço de saída é mapeado no conjunto fuzzy A. Usualmente é denotada por:

$$\mu_A : X \to [0, 1], \tag{1}$$

onde X é dito conjunto universo, que é sempre um conjunto clássico. Para

cada $x \in X$, o valor $\mu_A(x)$ expressa o grau de pertinência do elemento x de X no conjunto fuzzy A, sendo que $\mu_A(x) = 0$ representa a não pertinência e $\mu_A(x) = 1$ representa a pertinência total de x ao conjunto fuzzy X.

Um subconjunto fuzzy é definido como um conjunto de pares ordenados

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\} \tag{2}$$

onde $\mu_A(x)$ é a função de pertinência de x em A. A forma da função de pertinência é definida convenientemente.

As operações padrões de conjuntos fuzzy são: intersecção (operador *and*), união (operador *or*) e complementar de subconjuntos fuzzy (operador *not*). Dados dois ou mais conjuntos fuzzy, estas operações conectam esses conjuntos de modo que produzem um único subconjunto fuzzy, isto é, um agregado dos subconjuntos dados. Essas operações são essenciais na natureza da lógica fuzzy e estão definidas a seguir.

Sejam A e B subconjuntos fuzzy de X .

Interseção entre A e B é o subconjunto fuzzy de X cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \tag{3}$$

União entre A e B é o subconjunto fuzzy de X cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \tag{4}$$

O Complementar de A é o subconjunto fuzzy $\bar{A}$ de X cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x) \tag{5}$$

Esse conceitos são fundamentais para definir a metodologia dos controladores fuzzy ou sistemas baseados em regras fuzzy. A construção destes sistemas pode ser descrita em quatro etapas: fuzzificação, base de regras, inferência e defuzzificação.

A primeira etapa, fuzzificação, é o processo no qual as variáveis de entrada e saída são definidas em termos de conjuntos fuzzy. É neste momento, que são construídas as funções de pertinência das variáveis que transformam os valores numéricos de uma variável em uma pertinência gradual nos conjuntos fuzzy, que descreve a propriedade da variável.

Na etapa seguinte são elaboradas as bases de regras, que são um conjunto de regras linguísticas na forma: Se <antecedente> Então <consequente>, que descrevem a relação entre as variáveis de entrada e saída. Os termos linguísticos usados nas regras são vagos e imprecisos (por exemplo, muito baixo, médio), contudo podem ser definidos na forma de conjuntos fuzzy.

A etapa de inferência, é o mecanismo pelo qual as informações subjetivas definidas pela base de regras são avaliadas matematicamente. Neste trabalho utilizou-se o método de inferência de Mamdani (Barros e Bassanezi, 2006) que é baseado na regra de composição de inferência max-min, ou seja, as regras são conectadas pelo operador lógico *or* e então modeladas pelo operador máximo e, em cada regra, os operadores *and* e *then* são modeladas pelo operador mínimo.

Finalmente, a etapa de defuzzificação, consiste em transformar a variável de saída fuzzy em variável real. Neste trabalho usou-se o método do Centro de Gravidade e o método do máximo dos máximos.

Os controladores fuzzy são responsáveis pela dinâmica dos sistemas p-fuzzy como é mostrado a seguir.

Denominamos de sistema parcialmente fuzzy, ou sistema p-fuzzy, ao sistema iterativo

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & f(x_k) \\ x_0 \in \mathbb{R}^n & & \end{cases} \tag{6}$$

onde $f(x_k)$ é quase linear, isto é, $f(x) = x + \Delta(x)$, $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta(x_k)$ é obtido por um sistema baseado em regras fuzzy.

Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis, sendo assim uma

ferramenta útil para modelar fenômenos cujo comportamento é parcialmente conhecido. São basicamente constituídos de variáveis linguísticas de entrada e saída, que são variáveis de estado que, quantitativamente, são expressas por conjuntos fuzzy e um controlador fuzzy (Barros e Bassanezi, 2006). A estrutura de um sistema p-fuzzy é mostrada na Figura 1.

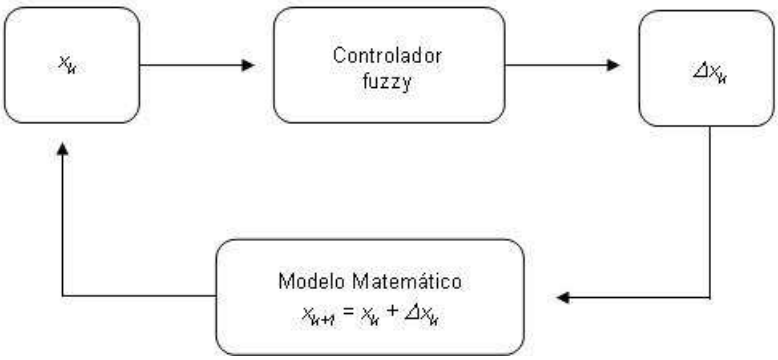


Figura 1: Arquitetura de um sitema p-fuzzy

3. Dinâmica populacional para Sorocaba através de sistemas p-fuzzy

Nesta seção são descritos os procedimentos para elaboração das bases de regras que serão utilizadas nos sistemas p-fuzzy 6 e sistemas iterativos do tipo

$$x_{k+1} = (1 + \Delta(x_k))\, x_k \tag{7}$$

para dinâmica populacional de espécies isoladas com crescimento inibido, utilizando como base o modelo de Verhulst

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P\left(r - \frac{r}{P_\infty}P\right) \tag{8}$$

onde r é a taxa de crescimento da população e P_∞ é a capacidade de suporte da população estudada.

Tanto o sistema p-fuzzy quanto o sistema iterativo utilizam controladores fuzzy que são construídos a partir de um sistema baseado em regras fuzzy que têm como variáveis de entrada "População" (P) e de saída "Variação" (ΔP) (Cecconelo, 2006). Neste trabalho estudou-se duas formas de construir essa base de regras: utilizando a variação absoluta $\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right)$ da população e a sua variação relativa $\left(\frac{\mathrm{d}P/\mathrm{d}t}{P}\right)$.

Para a variável População adotou-se o seguinte conjunto de termos lingísticos, P = {Baixa (B), Média Baixa (MB), Média (M), Média Alta (MA), Alta (A), Altíssima (AL)}, tanto no estudo de variação absoluta quanto relativa.

Na criação da base de regras da variação absoluta, deve-se observar que o gráfico de $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ em função de P é uma parábola e portanto, a variação da população foi baseada no comportamento da parábola conforme a Figura 2.

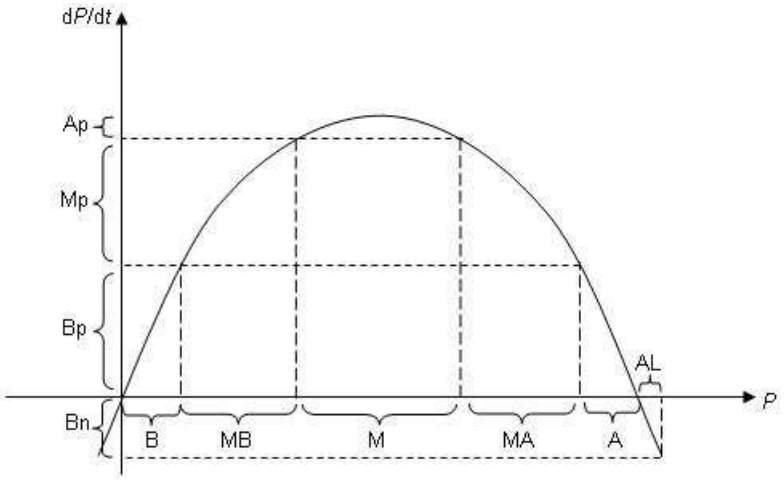


Figura 2: Parábola usada para balizamento da base de regras da variação absoluta

Sendo assim, através do conjunto de termos da População, a Variação absoluta foi dividida da seguinte forma: ΔP = {Baixa negativa (Bn), Baixa positiva (Bp), Média positiva (Mp), Alta positiva (Ap)}.

Com base então nestes conjuntos de termos linguísticos e o gráfico apresentado na Figura 2, formou-se a seguinte base de regras (Cecconelo, 2006):

1 - se a população é baixa então a variação é baixa positiva;

2 - se a população é média baixa então a variação é média positiva;

3 - se a população é média então a variação é alta positiva;

4 - se a população é média alta então a variação é média positiva;

5 - se a população é alta então a variação é baixa positiva;

6 - se a população é altíssima então a variação é baixa negativa.

As funções de pertinência para as variáveis População e Variação absoluta são apresentadas nas Figuras 3 e 4.

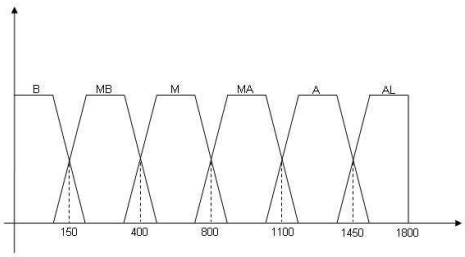


Figura 3: Funções de pertinência da variável População, em milhares de habitantes

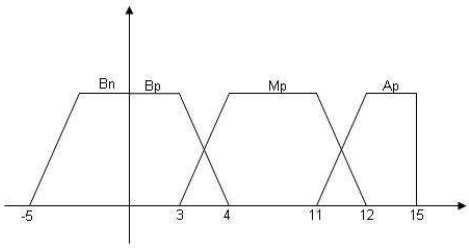


Figura 4: Funções de pertinência da variável Variação Absoluta

O método de inferência usado foi o de Mamdani e o de defuzzificação, o Centro de Gravidade.

No caso da variação relativa, pode-se observar que o gráfico de $\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}/P\right)$ por P, é uma reta (Figura 5).

Em virtude disto, utilizou-se o conjunto $\Delta P_{rel} = \{$Baixa negativa (Bn), Baixa positiva (Bp), Média Baixa positiva (MBp), Média positiva (Mp),

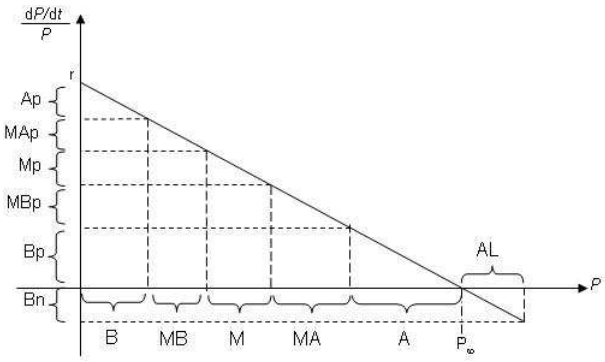


Figura 5: Reta usada para balizamento da base de regras da variação relativa

Média Alta positiva (MAp), Alta positiva (Ap)}, para que este pudesse se adaptar ao conjunto População. Nota-se ainda que a relação entre a população e a sua variação relativa é inversa, fornecendo então o seguinte conjunto de base de regras (Cecconelo, 2006):

1 - se a população é Baixa então a variação é Alta positiva;

2 - se a população é Média Baixa então a variação é Média Alta positiva;

3 - se a população é Média então a variação é Média positiva;

4 - se a população é Média Alta então a variação é Média Baixa positiva;

5 - se a população é Alta então a variação é Baixa positiva;

6 - se a população é Altíssima então a variação é Baixa negativa.

Porém, para o estudo de caso feito com a cidade de Sorocaba, observou-se que a base de regras deveria ser mudada para melhor se adaptar aos dados censitários. Sendo assim uma nova base de regras foi criada, simplesmente trocando as variações nos dois primeiros itens da base de regras anterior, obtendo:

1 - se a população é Baixa então a variação é Média Alta positiva;

2 - se a população é Média Baixa então a variação é Alta positiva ;

Os demais itens continuaram iguais aos anteriores. Na próxima seção será discutida a razão da mudança proposta.

As funções de pertinência neste caso são dadas pelas Figuras 6 e 7:

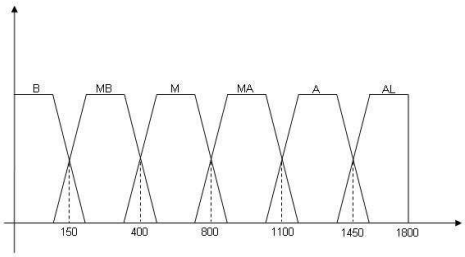


Figura 6: Funções de pertinência da variável População, em milhares de habitantes

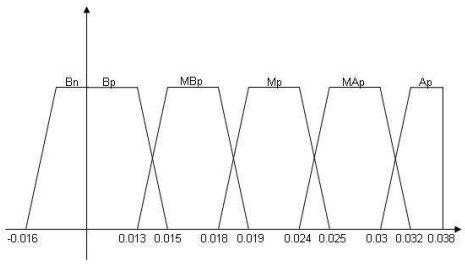


Figura 7: Funções de pertinência da variável Variação Relativa

Para o estudo de caso com variação relativa foram utilizados os métodos de inferência de Mamdani e o máximo dos máximos como método de defuzzificação.

4. Resultados e discussões

A metodologia descrita na seção anterior foi aplicada para a população de Sorocaba a fim de analisar sua evolução numérica. Foram construídos quatro modelos:

- Modelo 1: Sistema p-fuzzy com variação absoluta.
- Modelo 2: Sistema iterativo utilizando a primeira base de regras para variação relativa.
- Modelo 3: Sistema iterativo utilizando a base de regras modificada para variação relativa.

- Modelo 4: Utilizando a base de regras para variação absoluta com o sistema iterativo.

A Tabela 1 mostra os dados censitários, as projeções do modelo determinístico de Verhulst obtidos em Roveda et al. (2008) e as projeções para cada um dos modelos de 1 a 4.

Tabela 1: Dados obtidos para os modelos de 1 a 4. Valores em milhares de habitantes

Ano	Censo	Verhulst	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
1960	136	136	136	136	136	136
1970	175	192	199	185	188	172
1980	269	269	274	243	266	225
1991	379	376	356	322	390	320
1996	431	434	397	367	441	393
2000	493	483	436	408	483	471

Os valores censitários até 1996 foram utilizados para calibrar os modelos, enquanto a população de 2000 foi utilizada como teste.

Pode-se observar que o modelo 3 dentre os propostos é o mais razoável para projetar populações futuras já que o valor projetado é de 483 milhões, apresentando um erro relativo de 2,02%. Os demais apresentaram erros relativos superiores.

É interessante notar que o modelo mais razoável para fazer projeções advém do sistema cuja base de regras para variação relativa foi modificada para expressar uma característica da cidade em estudo. Desse modo, pode-se concluir que comportamentos específicos são facilmente traduzidos com pequenas variações na elaboração da base de regras.

Observe ainda que ao comparar a modelagem subjetiva do modelo 3 com a modelagem determinística de Verhulst, ambas apresentam resultados semelhantes, inclusive prevendo o mesmo valor para o ano de 2000. No entanto, cabe salientar que a modelagem subjetiva é mais simples do ponto

de vista matemático do que as equações diferenciais e o modelo pode ser melhorado aumentando o conjunto de base de regras.

Referências

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*, volume 5 da *Coleção IMECC - Textos Didáticos*. IMECC–Unicamp, Campinas/SP.

Cecconelo, M. S. (2006). Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy. Dissertação de Mestrado, IMECC–Unicamp.

Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*. Random-House, N. York.

Gomide, F. A. C. e Gudwin, R. R. (1994). Modelagem, Controle, Sistemas e Lógica Fuzzy. *SBA Controle & Automação*, 4:97–115.

Roveda, S. R. M. M., Miyamura, D., Pedro, P. M., e Roveda, J. A. F. (2008). Modelagem Matemática para Dinâmica Populacional da Cidade de Sorocaba. In "Anais do VI Simpósio de Engenharia Ambiental", Serra Negra/SP.

Sherbinin, A., Carr, D., Cassels, S., e Jiang, L. (2007). Population and environment. *Annu. Rev. Environ. Resourc*, 32:345–373.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.

Biomatemática ***19*** *(2009), 81–98* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Sobre o Ponto de Inflexão em Modelos de Crescimento Inibido com Condição Inicial Fuzzy

M. Cecconello[1],
DMA, IMECC – UNICAMP, 13.083-859, Campinas/SP.
A. J. V. Brandão[2],
UFSCAR, Campus Sorocaba, 18.052-780, Sorocaba/SP.
R. C. Bassanezi[3],
CMCC – UFABC, 09.210-170, Santo André/SP.

Resumo. Neste trabalho analisamos algumas propriedades dos fluxos fuzzy obtidos pela extensão se Zadeh dos fluxos determinísticos de equações com crescimento inibido. Damos também a definição do que seria um ponto de inflexão fuzzy para fluxos fuzzy. Além disso, apresentamos uma representação gráfica para fluxos fuzzy.

Palavras-chave: *Conjuntos Fuzzy, Modelos de Crescimento Inibido, Fluxos Fuzzy.*

1. Introdução

Após o artigo seminal de 1965 (Zadeh, 1965) em que Lofti Zadeh introduziu o conceito de conjunto fuzzy, muita pesquisa foi desenvolvida tanto do

[1]moiscecc@ime.unicamp.br
[2]adilsonvb@ufscar.br
[3]rodney.bassanezi@ufabc.edu.br

ponto de vista teórico quanto prático (Barros e Bassanezi, 2006; Pedrycz e Gomide, 2007; Klir e Yuan, 1995; Nguyen e Walker, 2000; Diamond e Kloeden, 1994). Uma das áreas de grande interesse foi a modelagem de fenômenos incertos por meio de equações diferenciais. No caso em que a natureza da incerteza é aleatória, usa-se como ferramenta as equações diferenciais estocásticas. No entanto, os modelos variacionais fuzzy podem contemplar vários tipos de incertezas (subjetividades - *fuzziness*) além das estocásticas.

Dependendo da escolha da variável de estado e/ou dos parâmetros dos modelos temos, respectivamente, *fuzziness demográfica* quando as variáveis de estado são modeladas por meio de conjuntos fuzzy e/ou *fuzziness ambiental* quando somente os parâmetros são considerados fuzzy. Nos fenômenos biológicos em geral, ambos os tipos de fuzziness estão presentes Barros e Bassanezi (2006).

As equações variacionais fuzzy têm sido estudadas através de métodos distintos. A primeira tentativa de contemplar subjetividades do tipo não aleatório em sistemas variacionais foi com o uso da derivada de Hukuhara (Kandel e Byatt, 1981; Kaleva, 1987; Seikkala, 1987; Ouyang e Wu, 1989). Este processo no entanto não teve muito sucesso porque, num modelo simples como o de Malthus, com taxa de crescimento negativo, a solução fuzzy é instável, não se mostrando uma boa generalização do determinístico, o qual sabemos ser assintoticamente estável. Recentemente, Bede e Gal (2005) introduziram um novo conceito de derivada fuzzy para contornar alguns problemas inerentes à derivada de Hukuhara.

Outra maneira de se contemplar a subjetividade não aleatória é por meio das inclusões diferenciais (Hullemeier, 1997). Tal procedimento, no entanto, tem-se mostrado muito complicado, mesmo quando aplicado em situações simples.

Quando as variáveis de estado são incertas, um modo de se ter um tratamento mais adequado para os modelos variacionais é passar toda a incerteza para os parâmetros do modelo matemático. Neste caso, um método alternativo, que temos usado, é aquele que consiste em fuzzificar as soluções de

um modelo determinístico, usando o princípio da extensão de Zadeh (Oberguggenberger e Pittschmann, 1999; Mizukoshi et al., 2007).

Nosso objetivo neste trabalho é estudar um aspecto simples porém interessante de modelos variacionais com crescimento inibido quando a condição inicial é fuzzy. Neste caso, as soluções são obtidas via fuzzificação das soluções determinísticas.

Quando se aplica uma equação de crescimento inibido determinística como modelos de crescimento em peso de animais de corte, o tempo de abate ideal é exatamente o ponto de inflexão da solução. De fato, se o animal for abatido antes há uma perda, pois não foi atingido todo o potencial de ganho de peso. Se for abatido depois corre-se o risco de perder dinheiro na relação custo *versus* ganho de peso, pois a partir do ponto de inflexão ocorre uma diminuição no ritmo de crescimento. Na prática os criadores abatem o animal num tempo maior do que o tempo de inflexão.

Neste trabalho daremos uma interpretação para o *tempo de inflexão* de modelos fuzzy crescimento inibido, interpretação esta que corrobora o que se vê na prática.

2. Conceitos Básicos

Nesta seção apresentaremos os fundamentos básicos necessários para a aplicação da teoria dos conjuntos fuzzy nas seções adiante. Para maiores informações sobre o assunto o leitor pode consultar, por exemplo, Barros e Bassanezi (2006) ou Pedrycz e Gomide (2007).

Os subconjuntos fuzzy de uma dado espaço X são caracterizados por funções desse espaço no intervalo unitário $[0, 1]$. Mais precisamente, temos

Definição 2.1. Seja X um conjunto não vazio. Um subconjunto fuzzy A de X é um subconjunto não vazio $\{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$ de $X \times [0, 1]$ para alguma função $\mu_A : X \to [0, 1]$.

A função $\mu_A : X \to [0, 1]$ e denominada *função de pertinência* de A e

o valor assumido para cada $x \in X$ é o *grau de pertinência* de x em A. O conjunto formado por todos os subconjuntos fuzzy de um conjunto X será denotado por $\mathcal{F}(X)$.

Segue diretamente dessa definição que qualquer subconjunto de X é também um subconjunto fuzzy de X uma vez que esse conjunto é bem determinado pela sua função característica e portanto satisfaz a definição acima. Portanto, temos que se $A \subset X$ com função característica $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, então o conjunto $\chi_A = \{(x, \chi_A(x)) : x \in X\}$ é um subconjunto de $X \times [0, 1]$ com função de pertinência $\mu_{\chi_A}(x) = \chi_A(x)$ para todo $x \in X$ e consequentemente $\chi_A \in \mathcal{F}(X)$. Para uma melhor distinção, o subconjunto fuzzy χ_A será denominado aqui como um subconjunto *crisp* de X.

Dado um subconjunto fuzzy A em $\mathcal{F}(X)$ definimos, para cada $\alpha \in (0, 1]$, o conjunto $[A]^\alpha \subset X$ como sendo o conjunto dos elementos de X tal que o grau de pertinência em A é ao menos α. O conjunto $[A]^\alpha \subset X$ é denominado α - *nível* de A e matematicamente é definido como

$$[A]^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } \alpha \in (0, 1]$$

O nível zero de um subconjunto fuzzy A é definido por

$$[A]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [A]^\alpha} = \overline{\text{supp}(A)}$$

no qual $\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ é o suporte do subconjunto fuzzy A.

Dois conjuntos conjuntos fuzzy são iguais quando as funções características são iguais, isto é,

$$A = B \Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X.$$

A igualdade entre conjuntos fuzzy pode também ser caracterizada por meio dos α - níveis. Neste caso, os conjuntos são iguais quando os α - níveis coincidem para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Em muitos casos pode ser necessário estender o domínio de uma aplicação $f : X \to Y$ para os subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(X)$. Notemos que para cada subconjunto $A \subset X$ a aplicação f define o subconjunto $f(A) \subset Y$. Supondo agora que A seja um subconjunto fuzzy X, isto é $A \in \mathcal{F}(X)$, então precisamos determinar como será a imagem induzida pela aplicação f sobre A. A forma como essa imagem é caracterizada pode ser feita através do *Princípio da Extensão* proposto por Zadeh conforme definição a seguir.

Definição 2.2. Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação e A um subconjunto fuzzy de X. A *extensão de Zadeh* $\hat{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ é a aplicação cuja imagem é dada por:

$$\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{a \in f^{-1}(y)} \mu_A(a) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Vale observar que se $A \subset X$ e, portanto, $\chi_A \in \mathcal{F}(X)$, então o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ induzido pela aplicação $\hat{f}$ coincide com o subconjunto fuzzy $\chi_{f(A)}$ induzido por f. De fato, pois sendo $\chi_A \in \mathcal{F}(X)$ tal que, $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ se $x \in X - A$ temos que, $\mu_{\hat{f}(A)}(y) = 1$ se $y \in f(A)$ e $\mu_{\hat{f}(A)}(y) = 0$ se $y \in Y - A$. Portanto, temos que $\mu_{\hat{f}(A)}(y) = \mu_{\chi_{f(A)}}(y)$ e, consequentemente, $\hat{f}(A) = \chi_{f(A)}$.

Um tipo particular de conjunto fuzzy que nos será muito útil é o chamado *número fuzzy*, o qual é tentativa de generalizar números reais no contexto fuzzy.

Definição 2.3. Um subconjunto fuzzy $A \subset \mathbb{R}$ é chamado *número fuzzy* se satisfaz

- Seus níveis $[A]^\alpha$ são compactos e não vazios para todo $\alpha \in [0, 1]$;
- Existe um único x tal que $\mu_A(x) = 1$.

Nas figuras abaixo temos dois exemplos de números fuzzy bem conhecido, os números fuzzy triangulares e gaussianos.

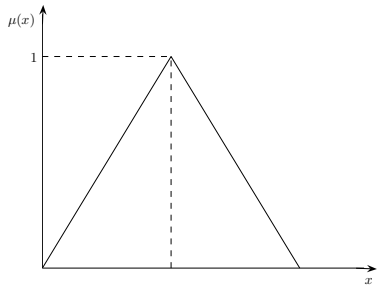


Figura 1: Número fuzzy triangular.

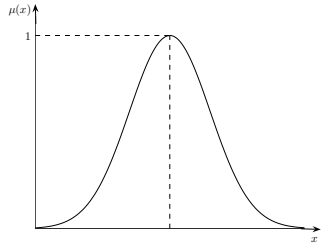


Figura 2: Número fuzzy gaussiano.

3. Equações Autônomas com Condição Inicial Fuzzy

Considere o seguinte problema de valor inicial determinado pela equação

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) \in X_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

no qual $x : I \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções numéricas, com $I \subset \mathbb{R}$, e X_0 um número fuzzy.

Em termos de modelos reais, podemos interpretar o problema acima da seguinte maneira: temos conhecimento da lei que rege o crescimento de uma certa variável através da equação diferencial, mas a condição inicial não é bem determinada, carregando consigo um grau de incerteza. Apesar da lei ser determinística, a solução deve carregar as incertezas da condição inicial ao longo do tempo.

Em termos matemáticos, Mizukoshi et al. (2007) apresentaram uma interpretação da solução de uma equação diferencial com condição inicial fuzzy baseada no princípio de extensão de Zadeh. Primeiramente, a idéia consiste em considerar o problema determinístico associado:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Sabemos que quando a função f é continuamente diferenciável, a solução do problema acima é única e depende continuamente da condição inicial, isto é, a solução $\varphi(t, x_0)$ do problema (3.2) é uma função contínua de x_0. Logo, definimos a solução do problema (3.1) como a extensão de Zadeh da função $x_0 \to \varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$. Tal solução é denotada por $\hat{\varphi}_t(X_0)$

Por exemplo, considere a equação logística determinístico:

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Temos que $K = a/b$ é a capacidade suporte do meio. A solução de (3.3) é dada por:

$$x(t) = \frac{Kx_0}{(K - x_0)e^{-at} + x_0}.$$

Se $0 < x_0 < K/2$, então um esboço da solução é dado pela Figura 3.

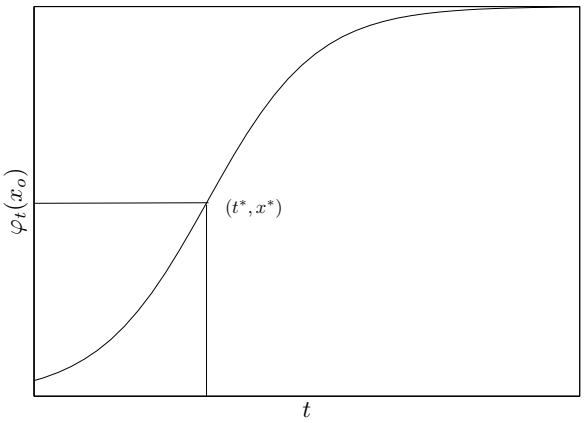


Figura 3: Solução da equação logística determinística.

O tempo t^* onde se dá a inflexão para a equação logística é determinado pela equação:

$$\frac{K - x_0}{x_0} = e^{at^*}. \tag{3.4}$$

Assim, t^* depende continuamente da condição inicial x_0

$$t^* = g(x_0) = \frac{1}{a} \ln \frac{K - x_0}{x_0}$$

e temos que $t^* \to 0$ quando $x_0 \to K/2$, e $t^* \to \infty$ quando $x_0 \to 0$.

Consideremos agora o modelo com condição inicial fuzzy associado:

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2, \\ x(0) \in X_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Aqui X_0 é um número fuzzy triangular centrado em x_0 e de raio $\varepsilon > 0$, satisfazendo $\text{supp}(X_0) \subset (0, K/2)$, isto é,

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (0, K/2). \tag{3.6}$$

A representação gráfica da solução de uma equação autônoma com condição inicial fuzzy pode ser feita por meio dos α - níveis, conforme proposto em Cecconello (2006). A Figura 4 é a representação gráfica para a equação logística.

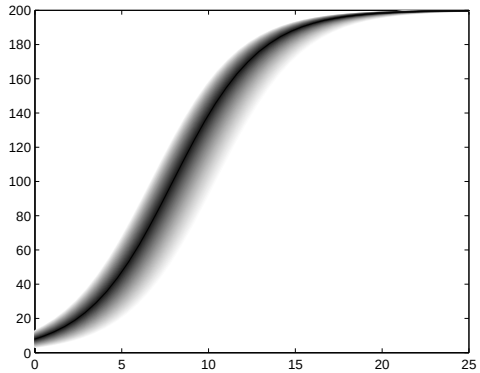


Figura 4: Representação gráfica da solução fuzzy logística.

A interpretação para a figura acima é baseada nas propriedades da solução estendida $\hat{\varphi}_t(X_0)$ e nas propriedades dos fluxos determinísticos unidimensionais.

Primeiramente, a unicidade da solução com relação à condição inicial implica que o grau de pertinência de $\varphi_t(x)$ no conjunto fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ é igual ao grau de pertinência de x em X_0 (Mizukoshi et al., 2007). Além disso, pela monotonocidade da solução determinística com relação à condição inicial, temos que $[X_0]^\alpha = [a_\alpha,\ b_\alpha]$ implica que $[\hat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = [\varphi_t(a_\alpha),\ \varphi_t(b_\alpha)]$ para todo $\alpha \in [0,1]$ e $t \geq 0$. Notemos ainda que, para todo $\beta > \alpha$ temos $[X_o]^\beta \subset [X_0]^\alpha$ e como consequência temos $[\hat{\varphi}_t(X_o)]^\beta \subset [\hat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha$.

A Figura 4 é portanto, a evolução dos α - níveis da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$. Quanto maior for o valor de α mais escuro é o sombreado, istoé, maior é o grau de pertinência de $\varphi_t(x)$ ao conjunto fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$.

4 Ponto de Inflexão Fuzzy

Vamos introduzir nesta seção o conceito de *tempo de inflexão* para fluxos fuzzy.

4.1 Equação Logística Fuzzy

Como vimos, para cada $t \geq 0$, a solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ da equação logística obtida pela extensão de Zadeh do fluxo determinístico $\varphi_t(x_0)$ possui como suporte o intervalo $[\varphi_t(x_o - \varepsilon),\ \varphi_t(xo + \varepsilon)]$.

A questão que surge neste caso é saber em que instante $t_i \geq 0$ tem-se a amplitude máxima desse suporte. Em outras palavras, quando se tem a maior amplitude da incerteza acarretada por uma incerteza inicial X_0. Denominaremos o tempo t_i de maior amplitude do suporte por tempo de *inflexão fuzzy.*

Os resultados a seguir respondem esse questionamento.

Teorema 4.1. *Sejam t^* o ponto de inflexão da solução determinística, t_i o tempo correspondente à maior amplitude da solução fuzzy da equação logística. Se $[x_o - \varepsilon,\ x_o + \varepsilon] \subset (0, K/2)$ então $t^* < t_i$ e $t_i \to t^*$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Prova: Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ as respectivas soluções dos problemas determinísticos

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2, \\ x(0) = x_0 - \varepsilon, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = ax - bx^2, \\ x(0) = x_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Desde que $x_2(t) > x_1(t)$ para todo $t \geq 0$, para encontrarmos t_i basta acharmos o ponto de máximo da função $f(t) = x_2(t) - x_1(t)$. De fato,

$$f'(t) = [x_2(t) - x_1(t)][a - b(x_1(t) + x_2(t))].$$

Logo, os pontos críticos de f são os pontos t satisfazendo $x_1(t) + x_2(t) = a/b$. Resolvendo esta equação, verificamos que existe uma única solução t_i a qual é ponto de máximo de f e satisfaz a equação

$$\frac{(K - x_0)^2 - \varepsilon^2}{x_0^2 - \varepsilon^2} = e^{2at_i}. \tag{4.1}$$

As equações (3.4) e (4.1) mostram que $t_i \to t^*$ quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, também implicam que

$$e^{2a(t^*-t_i)} = \frac{[x_0^2 - \varepsilon^2](K - x_0)^2}{[(K - x_0)^2 - \varepsilon^2]x_0^2} = \gamma \tag{4.2}$$

A condição (3.6) implica que $\varepsilon < x_0$ e daí concluímos que

$$0 < x_0^2 - \varepsilon^2. \tag{4.3}$$

Novamente a condição (3.6) garante que $\varepsilon < K/2 - x_0 < K - x_0$ e portanto

$$0 < (K - x_0)^2 - \varepsilon^2. \tag{4.4}$$

Segue de (4.2), (4.3) e (4.4) que $\gamma > 0$. Além disso, $x_0 < K/2$ implica que $\gamma < 1$.

Portanto, $e^{2a(t^*-t_i)} = \gamma$ com $0 < \gamma < 1$ de onde podemos concluir então que $2a(t^* - t_i) = \ln \gamma < 0$, isto é, $t^* < t_i$. ∎

A expressão (4.1) nos permite relacionar o tempo de inflexão fuzzy com os tempos de inflexão das soluções determinísticas $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

Teorema 4.2. *Seja $t^*_{-\varepsilon}$ e t^*_{ε} os pontos de inflexão do modelo logístico com condições iniciais $x_o - \varepsilon$ e $x_o + \varepsilon$, respectivamente. Então o tempo de inflexão fuzzy é dado por*

$$t_i = \frac{t^*_{-\varepsilon} + t^*_{\varepsilon}}{2}$$

Prova: Da expressão (3.4), temos que:

$$t^*_{-\varepsilon} = \frac{1}{a} \ln \frac{K - x_o + \varepsilon}{x_o - \varepsilon}$$

$$t^*_{\varepsilon} = \frac{1}{a} \ln \frac{K - x_o - \varepsilon}{x_o + \varepsilon}.$$

Agora, por (4.1) temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{1}{2a}\ln\frac{(K-x_o)^2-\varepsilon^2}{x_o^2-\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left[\left(\frac{(K-x_o)+\varepsilon}{x_o-\varepsilon}\right)\left(\frac{(K-x_o)-\varepsilon}{x_o+\varepsilon}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\ln\frac{K-x_o+\varepsilon}{x_o-\varepsilon}+\frac{1}{a}\ln\frac{K-x_o-\varepsilon}{x_o+\varepsilon}\right] \\ &= \frac{1}{2}(t^*_{-\varepsilon}+t^*_{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Logo, está provado o teorema. ∎

Vale notar que se $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \subset [K/2, K]$ então a função $f(t) = x_2(t) - x_1(t)$ é decrescente. Neste caso, temos que a maior amplitude do suporte da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ ocorre em $t = 0$.

4.2 Outros Modelos de Crescimento Inibido

A discussão apresentada anteriormente para a equação logística, pode ser levada para modelos unidimensionais de crescimento inibido que apresentam ponto de inflexão, como por exemplo, o modelo de von Bertalanffy, modelode Gompertz, modelo de Montrol, etc.

De maneira geral, tais modelos são dados por uma equação autônoma

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.5}$$

com $f : I \to \mathbb{R}$ satisfazendo: $f(0) = f(K) = 0$ e $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, K)$.

Se a função f é côncava, então o Teorema do Valor Médio garante a existência de um ponto de máximo $x^* \in (0, K)$ que é o valor onde ocorre a inflexão para o fluxo determinístico $\varphi_t(x_0)$ gerado por (4.5).

Como veremos a seguir, sob as condições aqui discutidas, as soluções das equações de crescimento inibido fuzzy associadas apresentam ponto de inflexão fuzzy quando a condição inicial é incerta.

Teorema 4.3. *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ em (4.5) côncava, $f(0) = f(K) = 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, K)$ e x^* o ponto de inflexão para o fluxo $\varphi_t(x_0)$. Se a condição inicial fuzzy X_0 é tal que $[X_0]^0 = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (0, x^*)$ então existe um tempo único de inflexão fuzzy $t_i \in (t^*_\varepsilon, t^*_{-\varepsilon})$ para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$.*

Prova: Tal como para a equação logística, definimos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ como as respectivas soluções dos problemas determinísticos

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_{01} = x_0 - \varepsilon; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_{02} = x_0 - \varepsilon. \end{cases}$$

Seja $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Desde que $g(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, então o tempo de inflexão fuzzy existe se a função g admitir um ponto de máximo. Para mostrar isso, provemos primeiramente que existe $t_i > 0$ tal que $g'(t_i) = 0$.

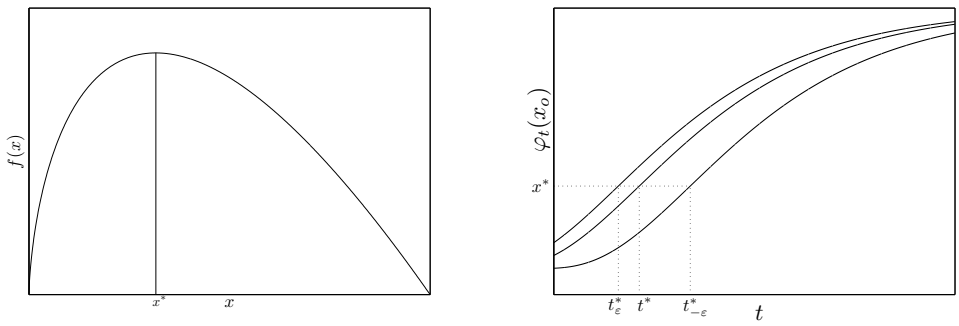


Figura 5: Solução de (4.5) para $f(x)$ côncava.

Com efeito, temos que $g'(0) = f(x_{02}) - f(x_{01}) > 0$ uma vez que f é côncava e $[X_0]^0 \subset (0, x^*)$. Por outro lado, desde que $x_1(t) \to K$ quando $t \to \infty$, existe $\tau > 0$ tal que $x_2(\tau) > x_1(\tau) \geq x^*$ e, novamente pela concavidade de f, temos que $g'(\tau) < 0$. Assim, a continuidade de $g'(t)$ garante que existe um

único $t_i > 0$ tal que $g'(t_i) = f(x_2(t_i)) - f(x_1(t_i)) = 0$, de onde concluímos que $x_2(t_i) > x^* > x_1(t_i)$. Como $\varphi_t(x)$ é crescente, isso implica que $t_i \in (t^*_\varepsilon, t^*_{-\varepsilon})$.

Uma vez que $g(t_i)$ é crescente para $t < t_i$ e decrescente para $t > t_i$ então t_i é um ponto de máximo para $g(t)$ e portanto temos a existência de um tempo de inflexão fuzzy. ∎

Vale notar que, como para equação logística, se $[X_0]^0 \subset [x^*, K]$ então a função $g(t) = x_2(t) - x_1(t)$ é decrescente. Neste caso, temos que a maior amplitude do suporte da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ ocorre em $t = 0$.

A determinação do tempo de inflexão fuzzy, cuja existência é garantida pelo teorema acima, depende de cada caso especificamente, isto é, depende da equação (4.5) considerada.

Exemplo 4.1. Consideremos o modelo de von Bertalanffy dado pela equação

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x^\gamma - \beta x, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.6}$$

De acordo com o Teorema 4.3 existe, $t_i > 0$ onde a amplitude do suporte da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(X_0)$ é máxima, isto é, o modelo de von Bertalanffy admite um tempo de inflexão fuzzy.

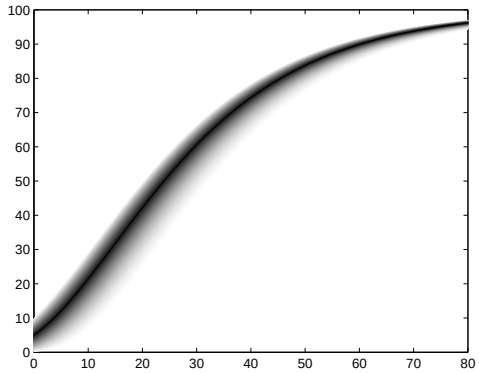


Figura 6: Representação gráfica da solução fuzzy para o modelo de von Bertalanffy.

Na Figura 6 acima temos a representação gráfica da solução $\hat{\varphi}_t(X_0)$ para $\alpha = 0.6325$, $\beta = 0.2$ e $\gamma = 0.75$. A condição inicial é o número triangular fuzzy $X_0 = (0.1/5/9.9)$.

A tempo de inflexão para a solução determinística $\varphi_t(x_0)$ com condição inicial $x_0 = 5$ é $t^* = 14.9197$ enquanto que o tempo onde ocorre a inflexão fuzzy é $t_i = 18.0760$. Como no caso da solução logística, temos $t^* < t_i$. No entanto, aqui não vale a igualdade do Teorema 4.2, uma vez que, $(t^*_{-\varepsilon} + t^*_{\varepsilon})/2 = 17.5369$.

5. Conclusões

Além da questão puramente matemática, os Teoremas 4.1 e 4.2 corroboram com algumas questões práticas. Quando se usa modelos de crescimento inibido determinístico na modelagem do crescimento em peso de animais criados em cativeiro para a alimentação humana (peixes, aves e mamíferos de corte), procura-se fazer o abate num tempo próximo ao ponto de inflexão determinístico t^* para se obter um aproveitamento ótimo (máximo rendimento com menor custo). Na verdade, na prática, o abate é feito logo após o tempo de inflexão determinístico t^*. O modelo com condição inicial fuzzy nos diz que, numa situação de incerteza, a melhor escolha para o tempo de abate é de fato dada pelo modelo fuzzy conforme os resultados demonstrados. O tempo de abate deve ser t_i e este tempo é obtido conforme o grau de confiança que tenhamos nos dados iniciais. Quanto menor o valor de ε maior é conhecimento dos dados iniciais, menor é a incerteza, mais próximo o modelo fica do determinístico e podemos tomar o tempo de abate muito próximo do ponto de inflexão da solução determinística. Por outro lado, se ε é grande, isto é, o desconhecimento dos dados iniciais é grande e o grau de incerteza é alto, então t_i nos dá uma segurança como tempo de abate diante da incerteza dos dados iniciais.

Agradecimentos

Agradecimentos ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 da *Coleção IMECC - Textos Didáticos*. IMECC.

Bede, B. e Gal, S. G. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 151:581–599.

Cecconello, M. S. (2006). Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas dinâmicos fuzzy. Dissertação de Mestrado, IMECC - UNICAMP.

Diamond, P. e Kloeden, P. (1994). *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*. World Scientific, Singapore.

Hullemeier, E. (1997). An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems. *Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Bases Systems*, 5:117–137.

Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:301–317.

Kandel, A. e Byatt, W. J. (1981). Fuzzy differential equations. in "Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society", Tóquio.

Klir, G. J. e Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application*. Prentice Hall PTR, New Jersey.

Mizukoshi, M. T., Barros, L. C., e Bassanezi, R. C. (2007). Fuzzy differential equations and the extension principle. *Information Sciences*, 177:3627–3635.

Nguyen, H. T. e Walker, E. A. (2000). *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2nd edition.

Oberguggenberger, M. e Pittschmann, S. (1999). Differential equations with fuzzy parameters. *Math. Mod. Systems*, 5:181–202.

Ouyang, H. e Wu, Y. (1989). On fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 32:321–325.

Pedrycz, W. e Gomide, F. (2007). *Fuzzy Systems Engineering*. John Wiley & Sons, New Jersey.

Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:319–330.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.

Biomatemática ***19*** *(2009), 99–108* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Modelagem Matemática e Computacional para a Ação das Células-Tronco na Manutenção e Regeneração de Tecidos Vivos

N. M. Gualberto[1]
DPPG, CEFET-MG, 30510-000, Belo Horizonte/MG.

C. H. C. Moreira[2]
DMAT, ICEx, UFMG, 30123-970, Belo Horizonte/MG

Resumo. Neste trabalho apresentamos um modelo computacional para estudar a ação de células-tronco na manutenção e regeneração de tecidos vivos. Simulamos a dinâmica populacional de células em um tecido vivo com e sem a participação de células-tronco dos pontos de vista de regulação de tamanho e estabilização da qualidade genética. No cenário com células-tronco algumas células novas são geradas sem qualquer encurtamento de telômeros herdado, ao lado daquelas resultantes da mitose de células especilizadas do tecido e que já carregam alguma perda telomérica em suas linhagens. Observamos que o modelo com atividade de células-tronco é consideravelmente mais capaz de manter o tamanho da população por tempo longo. Também verificamos que a ação das células-tronco preserva a boa qualidade genética média, ao passo que tecidos sem esse ingrediente mostram degeneração genética contínua ao longo do tempo.

Palavras-chave*: células-tronco, dinâmica populacional, simulação.*

[1]neila@dppg.cefetmg.br
[2]cmoreira@mat.ufmg.br.

1. Introdução

As células são as unidades estruturais e funcionais dos organismos vivos, formando diferentes tecidos e órgãos. Representam a menor porção de matéria viva dotada de autoduplicação independente através de *mitose*, processo por meio do qual uma célula-mãe origina duas células-filha com as mesmas informações genéticas armazenadas nos cromossomos (Blasco, 2007).

Na fase de embrião, todos os tecidos do corpo humano são gerados por *células-tronco* (CTs) embrionárias dotadas de extrema plasticidade. Já os tecidos vivos adultos são constituídos majoritariamente por *células especializadas* (CEs), nas quais características específicas são desenvolvidas através da super-expressão de determinados setores de seu genoma e da sub-expressão de outros (Cookson, 2005). Porém, sabe-se hoje que nos tecidos adultos também é possível encontrar reservatórios de células-tronco não-especializadas e sabe-se que a função dessas CTs é auxiliar na reposição celular (Soares, 2005). Após a mitose, CTs filhas podem manter suas características de plasticidade ou, sob certos estímulos bioquímicos, se diferenciar para assumir funções especializadas dentro do tecido.

A duplicação do material genético da célula-mãe, que ocorre nas etapas iniciais da mitose, por ser um processo complexo e minucioso carrega certa probabilidade de erro. E nem sempre todos os erros ocorridos durante a mitose podem ser corrigidos. Isso implica na incorporação gradual de mutações ao acervo genético das células-filhas, sobretudo daquelas que pertencem a linhagens que já passaram por um grande número de divisões celulares. Aí reside uma importante via de conexão entre o envelhecimento e o comportamento celular maligno (Pinho, 2000). Para preservar a integridade genética, com o tempo as CEs perdem a capacidade de se dividir e entram em *senescência* (Prieur e Peeper, 2008).

Os telômeros são estruturas protéicas especializadas presentes nas extremidades dos cromossomos e responsáveis por sua proteção. Devido às limitações inerentes ao processo de replicação do DNA, cada divisão celular

acarreta a perda de uma pequena parte de seqüência telomérica herdada pelas células-filhas (Weinberg, 1998; Cano, 2006). Dessa forma, o número de divisões celulares por que já passou determinada linhagem de células somáticas normais fica marcado no encurtamento dos telômeros.

A perda telomérica não é imediatamente um problema para a célula, mas o acúmulo de perdas pode levar à instabilidade cromossômica (Pinho, 2000; Weinberg, 1998). Para evitar que células com alta probabilidade de apresentar anomalias genéticas continuem se dividindo, o processo de mitose deixa de acontecer quando o comprimento dos telômeros atinge um limite crítico. Leonard Hayflick (1965) mostrou que células cultivadas in vitro se reproduziam cerca de 50 vezes antes de morrer. Células-tronco são exceções para essa regra, sendo capazes de se dividir indefinidamente sem o encurtamento dos telômeros e assim mantendo sua qualidade genética.

Neste trabalho introduzimos dois modelos computacionais para a simulação de tecidos vivos, em cada um dos quais é levado em consideração o número de mitoses acumuladas em cada linhagem celular.

2. Objetivos

Este trabalho tem como objetivo comparar as capacidades de manutenção e regeneração em um modelo sem a introdução das CTs e em um modelo com a introdução das CTs. Dessa forma discutiremos o papel das células-tronco na manutenção estrutural e funcional dos tecidos celulares adultos, assim como na preservação de sua qualidade genética contra o acúmulo de mutações resultantes de erros durante a duplicação do material genético.

3. Metodologia

Em nossa modelagem usaremos tempo discreto, com o incremento Δt correspondendo à duração típica de uma mitose celular. A população de células pertencentes a linhagens com n mitoses (n-ésimo estágio) no instante

t será representada por $P_n(t)$, com $n \in \{0, 1, \ldots, H\}$, sendo H o limite de Hayflick fixado em 50.

No modelo sem células-tronco (designado como SCT) variações na população podem acorrer apenas devido às mitoses e à mortalidade das células. Cada mitose de uma célula-mãe no n-ésimo estágio diminui P_n em uma unidade e aumenta P_{n+1} em duas unidades. Por simplicidade, vamos admitir que a taxa de mitose celular, representada por α, não dependa de n. Após ser atingido o limite de Hayflick as células entram em senescência e não se dividem mais. Também vamos adotar a hipótese simplificadora da mortalidade espontânea acontecer com taxa β igual para todas as populações celulares em todos os estágios, inclusive para aquelas já em senescência. Todas as taxas são mantidas constantes ao longo do tempo. Seguindo essa prescrição, a dinâmica populacional é descrita pelo conjunto a seguir de equações de evolução.

$$\begin{aligned}
P_0(t+1) &= (1-\beta-\alpha)P_0(t), \\
P_1(t+1) &= (1-\beta-\alpha)P_1(t) + 2\alpha P_0(t), \\
&\vdots \\
P_n(t+1) &= (1-\beta-\alpha)P_n(t) + 2\alpha P_{n-1}(t), \\
&\vdots \\
P_{H-1}(t+1) &= (1-\beta-\alpha)P_{H-1}(t) + 2\alpha P_{H-2}(t), \\
P_H(t+1) &= (1-\beta)P_H(t) + 2\alpha P_{H-1}(t).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

O conjunto de equações (3.1) pode ser escrito em forma matricial por meio de uma matriz de transição triangular inferior, com elementos não-nulos somente na diagonal principal e na diagonal logo abaixo.

Nosso segundo modelo (designado como CCT) toma como ponto de partida o modelo SCT, inclusive preservando o mecanismo de divisão celular das células especializadas, mas utiliza também células-tronco para auxiliar na reposição celular. Supomos que as células-tronco entram em ação quando a população celular total da amostra de tecido, $P(t) = \sum_{n=0}^{H} P_n(t)$, cai abaixo de determinada valor crítico P_{cr}, abaixo do qual o tecido não teria condições

de manter adequadamente suas propriedades estruturais ou funcionais. A divisão das células-tronco mantidas dentro da amostra, seguida da especialização das células-filha, introduz novas células no estágio 0. O aporte de novas células é proporcional a $[P_{cr} - P(t)]/P_{cr}$, o déficit fracional de células em relação à população crítica, e a um parâmetro funcional γ específico de cada tipo celular, que leva em conta a disponibilidade de células-tronco e outras características sistêmicas que vamos supor constantes. A nova equação de evolução para P_0 será

$$P_0(t+1) = (1-\beta-\alpha)P_0(t) + \gamma\,\frac{Pcr - P(t)}{P_{cr}}, \tag{3.2}$$

enquanto todas as populações nos estágios superiores evoluem da mesma forma prescrita em (3.1).

Na seção de resultados compararemos a eficiência dos modelos SCT e CCT para a preservação da população celular. Veremos que a introdução das células-tronco garante um período de sobrevivência estável muito mais longo para o tecido.

Além do papel de manter o número de células do tecido compatível com suas funções estruturais e funcionais, veremos que a introdução das CTs tem impacto significativo na preservação da qualidade genética da amostra. Vamos assumir que o número de mutações acumuladas em cada linhagem seja proporcional ao número de mitoses por que passou essa linhagem. Um parâmetro da qualidade genética da amostra, cuja evolução será seguida, é dado pelo inverso do número médio de mitoses presentes nas linhagens das células do tecido:

$$Q(t) = \left[\frac{1}{P(t)}\sum_{n=1}^{H} nP_n(t)\right]^{-1}. \tag{3.3}$$

4. Resultados

Para a simulação dos modelos foi construído um programa na linguagem PASCAL. A opção pela participação ou não de células-tronco é feita facil-

mente com a fixação do parâmetro γ na equação (3.2). $\gamma = 0$ nos coloca no modelo SCT. Para o modelo CCT foi utilizado o valor $\gamma = 0,5$. A configuração incial do sistema consistia de 3000 células, todas no estágio 0, ou seja, sem mitoses passadas e sem perdas teloméricas.

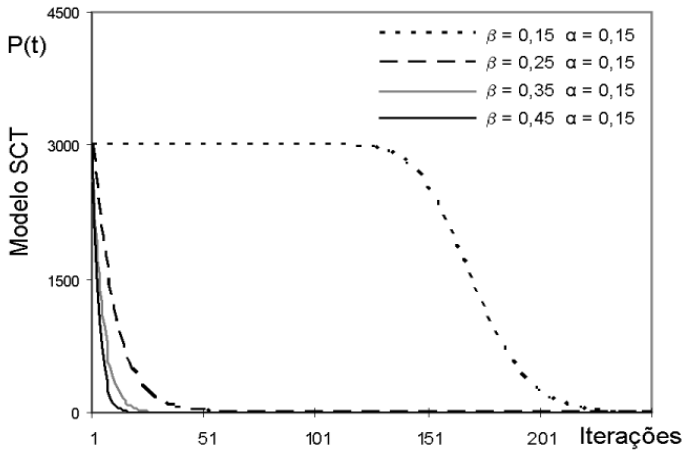


Figura 1: Dinâmica populacional de células num tecido sem a ativação de células-tronco. Parâmetros $\alpha = 0,15$ e β entre $0,15$ e $0,45$.

A Figura 1 mostra curvas de população total obtidas para o modelo SST. As taxas de mortalidade variam entre $0,15$ e $0,45$, com taxa de mitose fixada em $0,15$. Taxas de mortalidade superiores à de mitose via de regra produzem a extinção bastante rápida da amostra, ao passo que taxas de mortalidade inferiores (não mostrado na figura) produzem explosões populacionais igualmente inviáveis para o equilíbrio do tecido. O equilíbrio das taxas implica em um período de população celular estável, mas que vai envelhecendo rapidamente a medida que os telômeros encurtam em cada divisão celular. Quando as células começam a entrar em senescência a amostra não consegue mais se renovar e o declínio é rápido.

A Figura 2 mostra resultados das simulações do modelo CCT. Utilizamos os mesmos valores de α e β empregados no modelo SCT e fixamos

$\gamma = 0,5$. Inicialmente as curvas são idênticas às obtidas na Figura 1, com a população inicial de 3000 células decaindo naquelas mesmas escalas de tempo dependentes de β já observadas. Porém, ao cruzar o valor P_{cr} (fixado em 1500) de ativação das células-tronco, as populações rapidamente se estabilizam e a partir daí permanecem próximas, ligeiramente abaixo, desse valor de ativação. O sistema se mantém em equilíbrio estável, com o débito de células mortas sendo compensado pelas células novas introduzidas via especialização de células-tronco recém-divididas e ainda pela mitose contínua das células comuns.

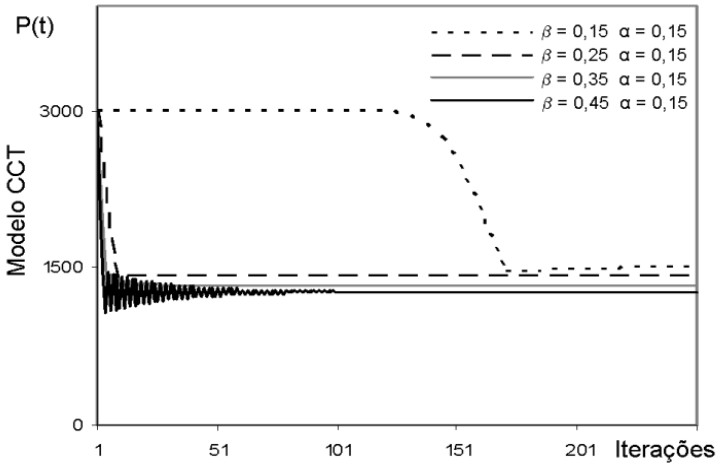


Figura 2: Dinâmica populacional de células num tecido com a ativação de células-tronco. Parâmetros $P_{cr} = 1500$, $\gamma = 0,5$, $\alpha = 0,15$ e β entre $0,15$ e $0,45$.

Células criadas a partir de CTs adultas não acumulam perdas teloméricas em suas linhagens e portanto delas se espera maior qualidade genética. A Figura 3 mostra as curvas obtidas para $Q(t)$ nos modelos SCT e CCT, usando-se taxa de mitose $\alpha = 0,10$ e taxa de mortalidade $\beta = 0,20$.

No modelo sem células-tronco a qualidade genética diminui continuamente. Uma queda inicial nessa variável também é identificada no modelo

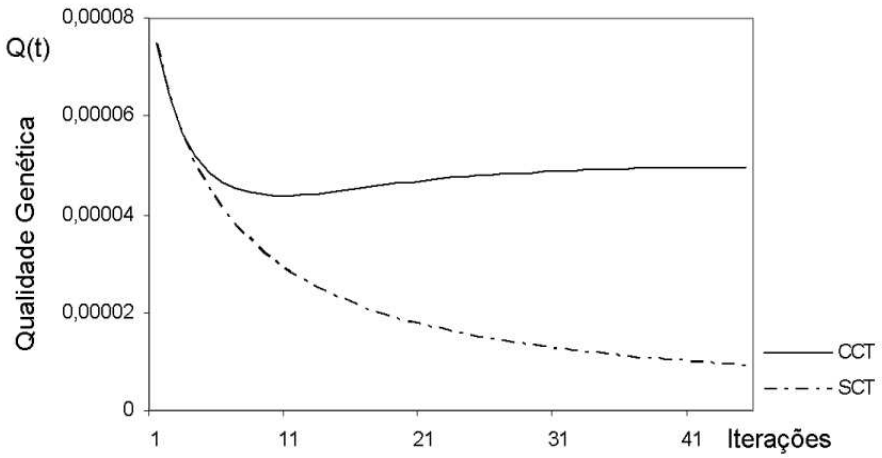


Figura 3: Evolução da qualidade genética $Q(t)$ nos modelos SCT e CCT. Taxa de mitose $\alpha = 0,10$, taxa de mortalidade $\beta = 0,20$.

com células-tronco, mas quando a divisão celular das CTs é acionada pela primeira vez o declínio é interrompido e até ligeiramente revertido, com $Q(t)$ rumando em seguida para um valor de estabilidade.

5. Conclusões

Os modelos SCT e CCT se prestaram à análise comparativa do papel das células-tronco em tecidos celulares adultos, sobretudo no que se refere à regeneração estrutural e à preservação do material genético contra o acúmulo de mutações espontâneas.

Para qualquer escolha de taxas de mitose e de mortalidade celular o modelo SCT, com reposição celular restrita à mitose das células já diferenciadas, demonstrou ter um ciclo de vida bastante curto. Isso se deve ao acionamento do limite de Hayflick em decorrência da crise telomérica. A inclusão de um reservatório de células-tronco no tecido, sendo elas notáveis

excessões para o limite proliferativo de Hayflick, estende enormemente sua capacidade de regeneração estrutural.

Outra conclusão importante e possivelmente menos óbvia deste trabalho é que o decaimento natural na qualidade genética de uma amostra celular pode ser evitado com a inclusão de uma quantidade de células-tronco, que passam a dividir com as células especializadas normais a tarefa de divisão celular. Tecidos adultos com reservatórios de CTs podem manter sua estabilidade genética por mais tempo.

Os dois aspectos abordados neste trabalho, queda na reposição celular e na qualidade genética, são apontados como essenciais no processo de envelhecimento. E resulta que ambos podem ser minimizados com a adequada participação de células-tronco adultas.

Segundo De Pinho (2000), os efeitos das mutações acumuladas combinados a outros fatores podem explicar o fato da incidência de câncer apresentar crescimento exponencial em pessoas entre 40 e 80 anos. Além disso, Weinberg (1998) sugere que os tecidos que sofrem perda celular constante e possuem altas taxas de mitose são mais susceptíveis ao câncer devido às mutações ocorridas durante a divisão celular. Portanto a inclusão de células-tronco no modelo não apenas pode retardar o envelhecimento, mas também diminuir a probabilidade de aparecimento de tumores e outras anomalias genéticas.

Agradecimentos

N.M.G. gostaria de agradecer o apoio recebido do Programa de Especialização em Matemática para Professores: Ênfase em Cálculo da UFMG. C.H.C.M. gostaria de agradecer o apoio do Programa de Educação Tutorial do DEPEM/SESu/MEC.

Referências

Blasco, M. A. (2007). Telomere length, stem cells and aging. *Nature Chemical Biology*, 3:640–649.

Cano, M. I. N. (2006). A vida na ponta dos cromossomos. *Ciência Hoje*, 39:16–23.

Cookson, C. (2005). Mother of all cells. *Scientific American*, 293:A6–A11.

Hayflick, L. (1965). The limited in vitro lifetime of human diploid cell strains. *Experimental Cell Research*, 37:614–636.

Pinho, R. A. D. (2000). The age of cancer. *Nature*, 408:248–254.

Prieur, A. e Peeper, D. S. (2008). Cellular senescence in vivo: a barrier to tumorigenesis. *Current Opinion in cell biology*, 20:150–155.

Soares, C. (2005). Repair workers within. *Scientific American*, 293:A12–A15.

Weinberg, R. A. (1998). *One renegade cell: how cancer begins*. Basic Books.

Biomatemática ***19*** *(2009), 109–124* ***ISSN 1679-365X***
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

A Sobrevivência do Vírus *varicela-zoster*

A. L. Vieira,[1] [2]
DMA – UFV, 36.570-000, Viçosa/MG.

L. T. Takahashi,[3] [4]
DMA – UFV, 36.570-000, Viçosa/MG.

Resumo. Apresentamos um estudo da dinâmica da varicela e sua relação com o herpes-zóster por meio de um modelo matemático $SIR + IR$ (Bassanezi e Ferreira Jr, 1978; Edelstein-Keshet, 1988; Yang, 2001) . Pela análise deste modelo, e através de simulações numéricas, chegamos a conclusão que a presença do herpes-zóster na população de humanos pode ser uma explicação plausível para os surtos periódicos de varicela, garantindo assim a não extinção do vírus *varicela-zoster*.

Palavras-chave: *Varicela; Herpes-zóster; Epidemiologia; Biomatemática;*

1. Introdução

A varicela, doença causada pelo vírus *varicela-zoster*, se manifesta com febre e aparecimento de bolhas, "catapora", que coçam. Mesmo que se manifeste fracamente ela confere ao indivíduo imunidade permanente CIVES (2006); BEPA (2006).

[1]ailton.vieira@ufv.br
[2]Cnpq
[3]ltiemi@ufv.br
[4]FAPEMIG, Demanda Universal, CEX-APQ-00149-08

A varicela é uma doença altamente transmissível, podendo sua transmissão ocorrer em qualquer tempo e lugar sendo favorecida no entanto, como toda doença de transmissão direta, pelo maior número de contatos entre as pessoas suscetíveis e as infecciosas CDC (2006); BEPA (2006). Em geral, o sistema imunológico controla a replicação viral e, na maioria dos casos, o indivíduo evolui para a cura, mesmo sem tratamento específico, principalmente em crianças saudáveis CDC (2006); CIVES (2006). Assim, não requer hospitalização nem cuidados especiais e é bem comum em nosso país. Devido a isso, por muito tempo foi considerada uma doença sem relevância e, até hoje, não é de notificação compulsória.

Mas, nos adultos os sintomas são mais sérios e a doença mais perigosa. A taxa de letalidade entre adultos está, entre 15 e 45 vezes maior que a mesma entre crianças CDC (2006); CIVES (2006). Há também a forma congênita muito perigosa podendo ocorrer má formação entre outras complicações em recém nascidos de mães que tiveram a doença na gravidez. Vale lembrar ainda o grande risco dos imunodeficientes e que estes dados são referentes a pessoas saudáveis, o que não é muito comum em nosso país. Devido a tudo isso, a varicela começa a ser vista pelas autoridades de saúde como ela realmente é: um sério problema para a humanidade que agrava com o tempo.

Assim, ao estudar a varicela e compreender melhor sua dinâmica vimos que sérias complicações podem vir dela. Destacamos que durante o episódio da varicela, geralmente na infância, alguns vírus invadem os gânglios nervosos espinhais e, ou, dos nervos cranianos, onde permanecem na forma latente, sem se multiplicar e sem causar danos ou sintomas. E muitos anos depois, tipicamente após os 50 anos de idade, o envelhecimento do sistema imunitário leva à moderada imunodepressão, e o vírus é reativado. Contudo a imunidade adquirida pelo indivíduo é ainda suficiente para impedi-lo de causar novo episódio de varicela sistêmica. Em vez disso, ele limita-se a multiplicar-se nos nervos sensitivos nos quais foi reativado. O resultado é o episódio de herpes-zóster, "cobreiro", seguido de enfraquecimento, comichão, fortes dores e feixes de bolhas sobre um lado do corpo CDC (2006). O indivíduo

com herpes-zóster pode transmitir o *varicela-zoster*, causando a varicela em pessoas suscetíveis BEPA (2006).

2. Objetivos

– Propor um modelo baseado na *Lei da Ação das Massas* em epidemiologia, $SIR + IR$, para descrever a dinâmica da varicela e sua relação com o Herpes-zóster;

– Realizar simulações numéricas do modelo para extrair informações sobre a doença e assim entender como o Herpes-zóster é importante na permanência da varicela na população;

– Dar uma explicação plausível para a não extinção do vírus *varicela-zoster*.

3. Metodologia

Para descrever a dinâmica da transmissão da varicela, consideramos a população humana total, $N(t)$, dividida em cinco sub-populações (ou compartimentos) e a consideramos grande o suficiente para que possamos considerar cada uma das sub-populações como uma variável contínua. A saber:

- $S(t)$ é o número de pessoas sadias mas, sujeitas à infecção caso entre em contato com alguém infectado, por varicela ou herpes-zóster, num instante de tempo t.

- $I_v(t)$ é o número de infecciosos com varicela, podendo transmitir o vírus *varicela-zoster* a pessoas suscetíveis, num instante de tempo t.

- $R_v(t)$ é o número de pessoas que desenvolveram a varicela, foram curadas e adquiriram imunidade permanente, num instante de tempo t.

- $I_z(t)$ é o número de infecciosos com herpes-zóster, podendo transmitir o vírus *varicela-zoster* a pessoas suscetíveis, num instante de tempo t.
- $R_z(t)$ denota o número de pessoas que desenvolveram herpes-zóster e foram removidas desta categoria, no instante de tempo t.

Assim, a população total será dada por:

$$N(t) = S(t) + I_v(t) + R_v(t) + I_z(t) + R_z(t).$$

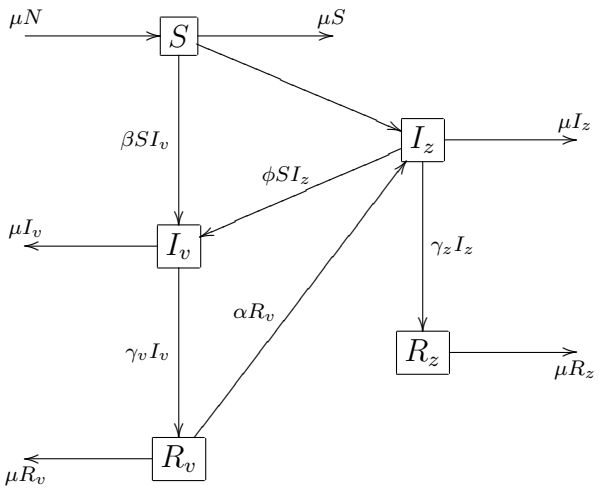
Consideramos também que o modelo com dinâmica vital apresenta:

- λ uma taxa de natalidade;
- μ uma taxa de mortalidade natural;
- β a taxa de transmissão da doença pelos infecciosos com varicela, I_v;
- ϕ a taxa de transmissão pelos infecciosos com zóster, I_z;
- γ_v a taxa de recuperação da infecção por varicela;
- γ_z a taxa de recuperação da infecção por herpes-zóster;
- α é a taxa em que os indivíduos da sub-população R_v tornam-se infecciosos por herpes-zóster.

Descrevemos a dinâmica da transmissão da varicela dentro deste contexto populacional, com a escala de tempo de anos, e consideramos que a população não muda de tamanho, no tempo de observação que iremos avaliar, 5 anos. Assumiremos que a taxa μ é igual a taxa λ, e que todos os indivíduos naçem sadios. Assim, temos um fluxo de entrada, positivo e constante, no compartimento dos suscetíveis, μN. Indivíduos suscetíveis, S, à infecção, entram em contato com os infecciosos, I_v ou Iz, tornam-se infecciosos a uma taxa β ou ϕ, respectivamente. Pela *Lei da Ação das Massas* a taxa na qual os indivíduos suscetíveis tornam-se infecciosos é proporcional ao número de

encontros entre suscetíveis e os infecciosos. E assim, desenvolvendo a varicela sistêmica, passando para a sub-população I_v. Recuperam-se a uma taxa γ_v desenvolvendo imunidade permanente para a varicela, passando assim, para a sub-população dos removidos R_v. Estes, por sua vez, podem desenvolver o herpes-zóster a uma taxa α passando assim, para uma nova sub-população de infecciosos por herpes-zóster, I_z e, dessa se recuperam a uma taxa γ_z passando, para uma última sub-população, a de removidos do herpes-zóster denominada R_z, onde permanecem CDC (2006). Temos que o período em que o indivíduo fica doente com varicela é γ_v^{-1}, uma semana, e o período em que o indivíduo fica doente com herpes-zóster, γ_z^{-1}, é três semanas CDC (2006); CIVES (2006). Assumiremos, que a vida média do homem é de setenta e um anos*, que o herpes-zóster, em geral, surge após os cinqüênta anos de idade e que a taxa de contágio da varicela é muito maior do que a do herpes-zóster uma vez que a pessoas com zóster, em geral, fica debilitada, ou seja, sem condições de movimentação, logo dificultando a transmissão do vírus.

O que acabamos de escrever pode ser, simplificadamente, esquematizado por um diagrama de compartimentos, que segue:



Desta forma definimos o seguinte sistema dinâmico:

*Fonte:IBGE

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} &= \mu N - \mu S - \beta S I_v - \phi S I_z \\ \dfrac{dI_v}{dt} &= -\mu I_v + \beta S I_v + \phi I_z S - \gamma_v I_v \\ \dfrac{dR_v}{dt} &= -\mu R_v + \gamma_v I_v - \alpha R_v \\ \dfrac{dI_z}{dt} &= -\mu I_z + \alpha R_v - \gamma_z I_z \\ \dfrac{dR_z}{dt} &= -\mu R_z + \gamma_z I_z \end{cases} \tag{3.1}$$

Após introduzir a escala apropriada, adimensionalizamos o sistema (3.1), usando as seguintes unidades: N para a população de humanos e μ^{-1} para o tempo, os quais nos fornece os parâmetros adimensionais $\bar{\beta} = \frac{\beta}{\mu}N$, $\bar{\phi} = \frac{\phi}{\mu}N$, $\bar{\gamma}_v = \frac{\gamma_v}{\mu}$, $\bar{\gamma}_z = \frac{\gamma_z}{\mu}$, $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\mu}$. Para simplificação de notação utilizaremos a mesma do sistema (3.1) e desconsideramos a sua última equação, pois pelo tempo de observação consideramos que a população total está fixa, ou seja, $\mu = \lambda$. Logo para se obter a quantidade de indivíduos em $R_z(t)$ basta uma simples diferença entre N e as demais sub-populações. Daí, temos o sistema adimensional:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} &= 1 - S - \beta S I_v - \phi S I_z \\ \dfrac{dI_v}{dt} &= -I_v + \beta S I_v - \gamma_v I_v + \phi I_z S \\ \dfrac{dR_v}{dt} &= -R_v + \gamma_v I_v - \alpha R_v \\ \dfrac{dI_z}{dt} &= -I_z + \alpha R_v - \gamma_z I_z \end{cases} \tag{3.2}$$

Os parâmetros adimensionais utilizados para simulação, baseados nas informações anteriores são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Valores adimensionais estimados para os parâmetros μ, α, γ_v e γ_z, extraídos de CDC (2006); CIVES (2006).

μ	$3,9138 \times 10^{-5}$	α	$1,4$
γ_v	3650	γ_z	1216

4. Resultados

Consideramos no sistema (3.2) β, ϕ, γ_v, γ_z e α constantes positivas. Determinamos os pontos de equilíbrio que são soluções do sistema homogêneo associado, obtendo $P_0 = (1, 0, 0, 0)$, equilíbrio trivial e

$$P_1 = \left(A, B, \frac{\gamma_v}{1+\alpha}B, \frac{\alpha\gamma_v}{(1+\gamma_z)(1+\alpha)}\right),$$

onde $A = \dfrac{(1+\gamma_v)}{\beta + (\phi\alpha\gamma_v/(1+\gamma_z)(1+\alpha))}$, $\quad B = \dfrac{(1/A-1)}{\beta + (\phi\alpha\gamma_v/(1+\gamma_z)(1+\alpha))}$.

Determinamos o comportamento destes pontos de equilíbrio pela análise das raízes da auto-equação

$$Q(x) = \det(J^* - Ix) \tag{4.3}$$

onde I é a matriz identidade 4×4 e J^* é a matriz jacobiana do sistema (3.2).

Substituindo as coordenadas do ponto P_1 na equação (4.3), obtemos o seguinte polinômio característico: $Q_1(x)$ cujo o termo de grau um tem o seguinte coeficiente:

$$\begin{aligned} a_1 \;=\; & \left(1 + \beta B + \frac{\phi\alpha\gamma_v}{(1+\gamma_z)(1+\alpha)}B\right)[(1+\gamma_z)(2+\gamma_v+\alpha-\beta A)] \\ & +\phi\alpha\gamma_v A + \beta AB\left(\beta + \frac{\phi\alpha\gamma_v}{(1+\gamma_z)(1+\alpha)}\right)(2+\alpha+\gamma_z) \\ & +(1+\gamma_v-\beta A)(1+\gamma_z)(1+\alpha) \end{aligned}$$

que será positivamente definido desde que $\frac{1}{A} > 1$. Note que, essa é também a condição de existência de P_1.

Sabemos do Teorema Fundamental da Álgebra Monteiro (1978), que este polinômio possui quatro raízes em $\mathbb{C}$. Daí, como o coeficiente do termo de primeiro grau é positivo, consegue-se garantir facilmente, por manipulações algébricas supondo a existência de quatro raízes sendo ora quatro reais, depois duas reais e duas complexas e finalmente quatro complexas, que ele terá, pelo menos uma raiz, com parte real negativa.

Assim sendo, temos que P_1 é pelo menos um ponto de sela. Logo, é possível que se aparecer em uma população sadia, alguém com varicela esta população deverá conviver com a doença. Isto será comprovado numericamente.

Para o ponto P_0 pelas simulações utilizando os dados da Tabela 1, vemos que ele não é estável. Sabemos que, P_0 na equação (4.3) adimite $x = -1$ como raiz. Logo, se trata de um ponto de sela.

5 Simulações

As simulações foram feitas utilizando o pacote ode23s do Matlab, que resolve Equações Diferenciais do tipo Stiff utilizando o método de Runge - Kutta de segunda ordem, com os parâmetros de referência dados na Tabela 1 para a dinâmica da doença, numa região com condições favoráveis à sua propagação. Estes juntamente com os parâmetros de β e ϕ cujos valores são heurísticos e as condições iniciais para o sitema (3.2), compõem a Tabela 2.

A Figura 1 mostra que no início com o aparecimento de indivíduos infecciosos, $I_v(0)$, na comunidade suscetível, provoca uma forte epidemia e rapidamente a população de suscetíveis, S, cai, enquanto que a de infecciosos, I_v, cresce seguida pela sub-população de removidos da varicela, R_v.

Na Figura 2 vemos que praticamente toda sub-população de suscetíveis, S, é tomada pela varicela e passa, com o tempo, a compor a sub-população de

Tabela 2: Parâmetros adimensionais extraídos de CDC (2006); CIVES (2006); BEPA (2006) e Tabela 1 para a dinâmica da varicela. As condições iniciais foram tomadas de tal forma que represente o surgimento de indivíduos infecciosos numa população originalmente suscetível.

μ	$3,9138 \times 10^{-5}$	α	$1,4$	β	22995
γ_v	3650	γ_z	1216	ϕ	$2,555$
$S(0)$	$0,99$	$I_v(0)$	$0,01$	$R_v(0)$	0
$I_z(0)$	0	$R_z(0)$	0		

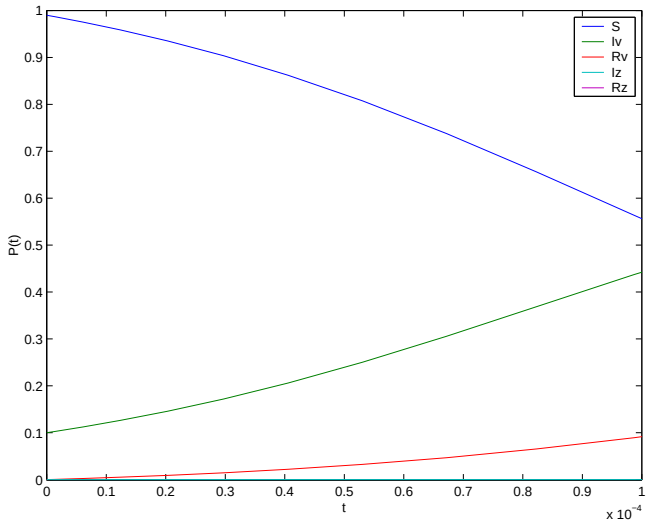


Figura 1: Estabelecimento da doença devido a infecciosos I_v (I_v–*curva que inicia em* 0.1)na população S (S–*curva do alto da figura*) e surgimento dos removídos da varicela R_v (R_v – *curva que inicia em 0 e termina próximo de* 0.1)

removidos, R_v. Devido a esta forte epidemia a sub-população de infecciosos, I_v, não tem como se manter pois não houve tempo da sub-população de suscetíveis se renovar, assim I_v diminui drasticamente.

A Figura 3 mostra o surgimento da população de infecciosos zóster, I_z.

Finalmente, na Figura 4 vemos os surtos periódicos de varicela, des-

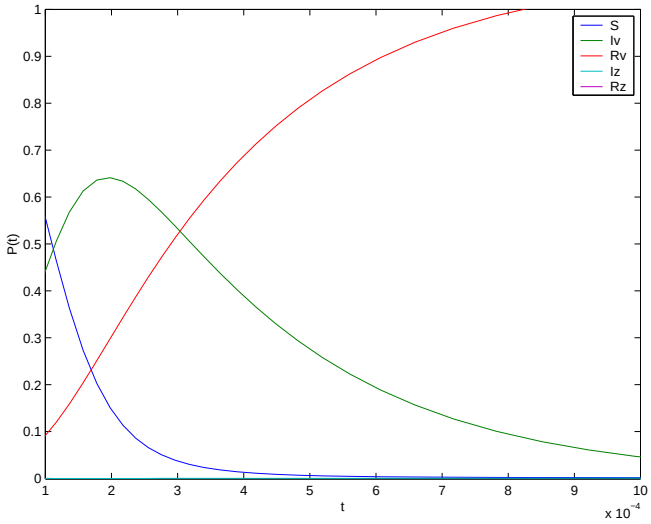


Figura 2: A varicela provoca uma epidemia transformando praticamente toda sub-população de suscetíveis, S (S–*curva que inicia entre* 0.5 *e* 0.6) , na de removidos, R_v(R_v–*curva que inicia em* 0.1 *e termina proximo de* 1) nota-se um forte decréscimo de I_v(I_v–*curva que inicia entre* 0.4 *e* 0.5)

critas pelas oscilações da população de infecciosos por varicela, I_v, convergirem para um valor não nulo, como era de se esperar uma vez que P_1 é pelo menos sela. Estes pulsos da população de infecciosos é típico em sistemas que descrevem epidemias Yang (2001). Note que, com esta simulação temos o estabelecimento da doença, ou seja, ela sempre estará presente nesta população, não tão forte como no seu surgimento, mas todos os anos teremos surtos de varicela, até chegarmos a uma quantidade limiar, que pode ser calculada através da expressão do ponto P_1.

Simulações sem o zóster

Destacamos agora que se desconsiderarmos o zóster, o sistema (3.2), se reduz ao modelo SIR acrescido das taxas de mortalidade e natalidade

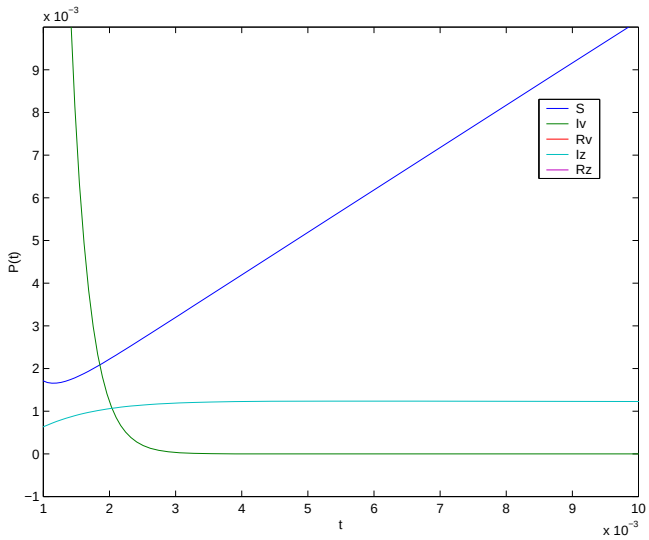


Figura 3: Após a queda da sub-população de I_v(I_v*–curva que inicia no alto da figura e termina próximo de zero*), e com o crescimento da sub-população de removidos, R_v(R_v*–curva que nem aparece nesta figura*), começa a surgir a sub-população de infecciosos zóster, I_z(I_z*–curva que inicia entre* 0 *e* 1 *e termina entre* 1 *e* 2). Percebemos também, devido à taxa de natalidade um aumento dos suscetíveis, S (S*–curva que inicia entre* 1 *e* 2 *e termina no alto da figura*)

(iguais, hipóteses do modelo), como segue:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} &= 1 - S - \beta S I_v \\ \dfrac{dI_v}{dt} &= -I_v + \beta S I_v - \gamma_v I_v \\ \dfrac{dR_v}{dt} &= -R_v + \gamma_v I_v \end{cases} \tag{5.4}$$

Para este novo sistema adimensional utilizando os mesmos valores para os parâmetros, Tabela 2, nas simulações, obtemos o seguinte quadro:

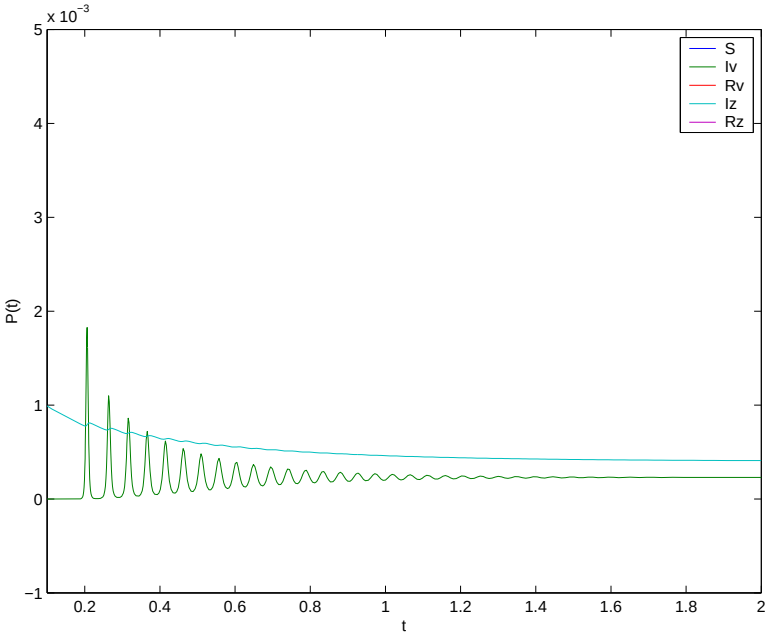


Figura 4: Surtos periódicos de varicela, descritas pelas oscilações da população de infecciosos por varicela, I_v (I_v–*curva que oscila*) e presença da sub-população de infecciosos zóster, I_z (I_z–*curva que inicia em* 1 *e termina entre* 0 *e* 1) responsável por causar tais surtos.

Nas Figuras 5 e 6 vemos que rapidamente a doença se espalha e consegue infectar praticamente toda a população, mas com o passar do tempo a renovação pela mortalidade e natalidade, a sub-população de suscetíveis cresce e chega a sua capacidade suporte, enquanto que a de infecciosos e removidos diminuem até a extinção, ou seja, depois que a doença se espalha causando a epidemia o vírus morre com a sub-população de removídos.

Observação: Na Figura 5 a curva dos suscetíveis, S (*inicia em* 1 *e termina em* 0), a curva dos removidos, R_v (*inicia em* 0 *e termina em* 1). Já na Figura 6 a curva dos suscetíveis, S (*inicia entre* 0.4 *e* 0.6 *e termina em* 1), a curva dos removidos, R_v (*inicia entre* 0.4 *e* 0.6 *e termina em* 0).

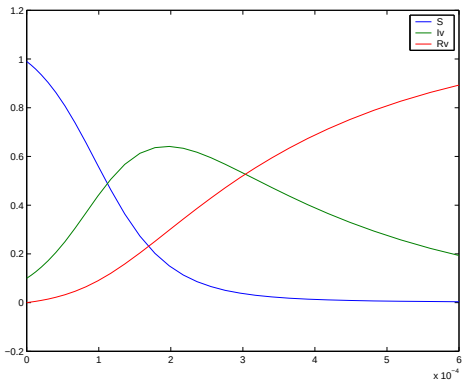


Figura 5: No início com o surgimento de infecciosos na população, originalmente suscetível, a sub-população de I_v cresce rapidamente seguida pela sub-população de removidos, R_v, enquanto que a suscetíveis, S,cai.

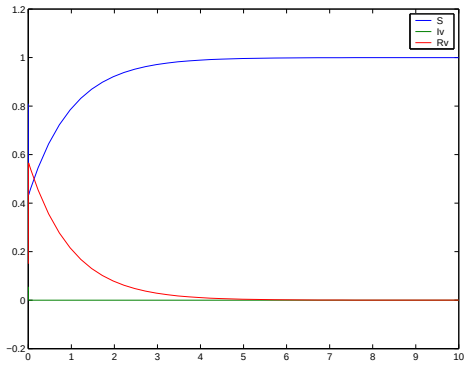


Figura 6: Após a epidemia provocada pelo surgimento de infecciosos na população, a sub-população de suscetíveis, S, se recupera chegando a sua capacidade máxima enquanto que a de infecciosos e removidos cai até a extinção, ou seja, a população fica livre da varicela.

6. Conclusões

Assim, através das simulações apresentadas na seção anterior, podemos concluír que com o surgimento de infecciosos na população rapidamente a doença se espalha e consegue infectar praticamente a todos, mas com o passar do tempo a renovação da mesma pela natalidade e mortalidade, faz com que a sub-população de suscetíveis cresça. Na ausência do herpes-zóster a população de suscetíveis cresce e chega a sua capacidade suporte, enquanto que a de infecciosos e removidos diminuem até a extinção junto com o vírus *varicela-zoster*, pois o homem é o seu único hospedeiro, e assim a população fica livre da varicela. Mas sabemos que isso não é real pois todos os anos ocorrem surtos de varicela, principalmente no inverno, em nosso país (BEPA, 2006). Por este motivo vemos que o modelo que propomos (sistema (3.2))

leva em consideração a existência do herpes-zóster, "cobreir", é melhor no sentido de que garante a permanência da varicela na população. E segundo BEPA (2006) a varicela tem surtos mais intensos, grande número de doentes, aproximadamente a cada quatro anos o que é também previsto em nosso modelo, veja Figura 4

Pelas simulações temos que o *varicela-zoster* se extingue na ausência do herpes-zóster. Logo, para que haja um melhor controle sobre os surtos de varicela o ideal é que se diminua a ocorrência do herpes-zóster, mas para isso é necessário melhorar as condições de saúde da população, uma vez que ele aparece em pessoas que além de possuir o vírus, na forma latente, tenham uma baixa em sua imunidade, ou seja, pessoas com deficiência na alimentação e na qualidade de vida. Hoje em dia é comum jovens terem o herpes-zóster, devido ao rítmo da vida moderna. Assim devemos nos preocupar não só com os idosos mas reforçarmos a atenção nos jovens.

Esperamos que este trabalho alerte a todos que o lerem da importância de estudarmos mais a varicela e o seu risco para a população.

Referências

Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). *Equações diferenciais com aplicações.* Ed. Harbra, S. Paulo.

BEPA (última visita em 07/07/2006). Centro de vigilância epidemiológica - são paulo. *Boletim Epidemiológico Paulista*, página www.cve.saude.sp.gov.br.

CDC (última visita em 07/07/2006). Department of health and human services. *Centers for Disease Control and Prevention*, página www.cdc.gov.

CIVES (última visita em 07/07/2006). Centro de informação em saúde para viajantes. *UFRJ, CCS, Faculdade de Medicina*, página www.cives.ufrj.br.

Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical models in biology.* The Random House.

Monteiro, J. L. H. (1978). *Elementos de Álgebra.* L T C, Rio de Janeiro.

Yang, H. M. (2001). *Epidemiologia matemática: estudo dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta.* Editora da Unicamp, Campinas-SP.