# Cenários de Redução de Emissões de Poluentes através de Simulação Numérica e Otimização Fuzzy

Luiza A. P. Cantão<sup>1</sup>,

Depto. de Engenharia Ambiental, Campus de Sorocaba – UNESP, Av. Três de Março, 511 – 18.087-180, Sorocaba/SP.

Renato F. Cantão?
Thorus Scisoft, Estrada da Telebrás/UNICAMP, km 0,97,
Cid. Universitária – 13.081-970 - Campinas/SP.

Maria Lucia P. Antunes, Alexandre M. da Silva<sup>4</sup> Depto. de Engenharia Ambiental, Campus de Sorocaba – UNESP, Av. Três de Março, 511 – 18.087-180, Sorocaba/SP.

Resumo. Serão aplicadas técnicas de Otimização Fuzzy na geração de cenários de redução de emissões de poluentes. Estes cenários compõe-se de reduções desejadas nas emissões, reduções mínimas aceitáveis e custos associados. As emissões serão obtidas de forma sintética através de um modelo numérico de dispersão e advecção.

Palavras-chave: Otimização Fuzzy, Teoria Fuzzy, Redução de emissões poluentes, dispersão e advecção.

# 1. Introdução

A região de Sorocaba possui uma área de 443 km², localizada a 90 km a oeste da cidade de São Paulo e a 85 km a sudoeste de Campinas. Devido a sua localização, com fácil acesso rodoviário, ferroviário e aeroviário, possui um perfil industrial bastante diversificado, contando atualmente com cerca de 1.400 estabelecimentos industriais, dos quais 150 são de médio a grande porte e 18 considerados prioritários para controle

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>luiza@sorocaba.unesp.br

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>cantao@thorus-scisoft.com.br

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>malu@sorocaba.unesp.br

 $<sup>^4</sup>$ amsilva@sorocaba.unesp.br

da poluição atmosférica, em função de sua atividade e potencial de emissão, como apresentado em CETESB (2005), CETESB (2006), CETESB (2007) e Muramoto et al. (2004). Estas características fizeram com que esta cidade fosse a primeira a ser monitorada para a emissão de ozônio.

O ozônio  $n\tilde{a}o$  é um poluente emitido diretamente pelas fontes, mas formado na atmosfera através da reação entre os compostos orgânicos voláteis (COV's) e óxidos de nitrogênio (NO<sub>x</sub>) em presença de luz solar. Embora benéfico na estratosfera, onde forma uma camada protetora contra efeitos danosos da radiação ultravioleta, tem efeitos tóxicos nas camadas mais baixas da atmosfera, por atingir diretamente os seres vivos – Muramoto et al. (2004).

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é o de incorporar as técnicas de Programação Matemática a um *Modelo de Poluição do Ar* para a região de Sorocaba visando minimizar a emissão de poluentes na atmosfera.

Assim, um dos aspectos a serem estudados na problemática de poluição do ar são as políticas de controle. No contexto de otimização estas políticas de controle aparecem como um problema de controle de poluição que atenda aos padrões estabelecidos, mas levando em conta os custos associados à implementação destes métodos de controle. Os padrões estabelecidos podem ser flexíveis, uma vez que para uma certa região a redução pode ser maior ou menor, gerando uma condição fuzzy. Este problema é amplamente discutido em Sommer e Pollatschek (1978) e em Cantão e Cantão (2007), e aplicado em um modelo com dados sintéticos para a região de Sorocaba.

# 2. Modelo auxiliar para plumas de dispersão de poluentes

#### 2.1. Introdução

A modelagem da dispersão de poluentes\* através de equações diferenciais parciais, e seu posterior tratamento numérico através do método dos Elementos Finitos já é tópico de estudo há alguns anos, como mostram os trabalhos de Castro (1993); Cantão (1998) e mais recentemente Meyer e Diniz (2007).

Usaremos aqui um modelo inicial bastante simplificado para dispersão e ad-

<sup>\*</sup>Não só atmosférica, mas também em meio aquático.

vecção de poluentes atmosféricos em substituição às plumas usadas em Cantão e Cantão (2007). Apesar de bastante próximas da aproximação Gaussiana para difusão de poluentes, acreditamos ser o modelo baseado em equações diferenciais parciais mais flexível e genérico.

#### 2.2. O modelo de difusão-advecção

#### Domínio de modelagem

O domínio de modelagem — denominado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — compreende a região retangular de 100km por 90km, que envolve a cidade de Sorocaba e cujas fronteiras encontram-se divididas em dois conjuntos disjuntos,  $\Omega_0$  e  $\Omega_1$ , conforme a figura 1. A fronteira da cidade não faz parte da modelagem, existindo apenas como referência visual.

O mapa de Sorocaba é georeferenciado com escala em metros (cf. seção 4). Para efeitos de escala, foi convertido para um sistema de coordenadas com o canto inferior esquerdo correspondendo à origem (0,0), com escala em quilômetros.

#### O modelo completo

Ainda seguindo as referências Castro (1993); Cantão (1998), usaremos o seguinte modelo em regime permanente para simulação numérica do movimento de poluentes atmosféricos:

$$\nabla \cdot (-\alpha \nabla u) + \nabla \cdot (\vec{V}u) = f, \quad (x_1, x_2) \in \Omega \in \mathbb{R}^2$$

$$u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1$$
(2.1)

onde:

- $u = u(x_1, x_2)$  é a concentração de poluente em um dado ponto  $(x_1, x_2) \in \Omega$ ;
- $\nabla \cdot (-\alpha \nabla u)$  é a difusão efetiva do poluente, de acordo com Marchuk (1986) e Okubo (1980);  $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$  é denominado coeficiente de difusão;
- $\nabla \cdot (\vec{V}u)$  é o transporte advectivo ou simplesmente advecção Jørgensen (1988);  $\vec{V} = (V_1, V_2)^T$  é um vetor que caracteriza a direção predominante do vento para um determinado cenário;

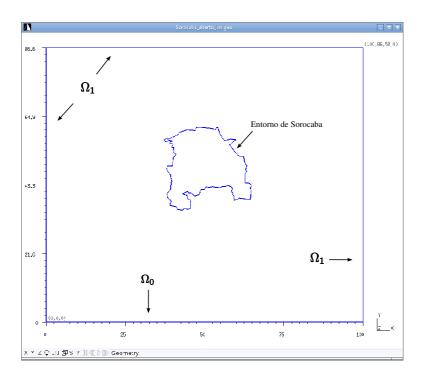


Figura 1: Domínio computacional envolvendo a cidade de Sorocaba.

 $\bullet$  f é uma fonte poluente.

#### Simplificações

Faremos algumas simplificações no modelo (2.1) para torná-lo mais tratável, tanto do ponto de vista numérico — e conseqüentemente computacional — e também devido às dificuldades inerentes à obtenção de dados confiáveis para calibragem do modelo completo.

As simplificações são:

- O coeficiente de difusão será tomado constante,  $\alpha=$  cte. Justifica-se esta escolha por tratar-se de um modelo bidimensional, que não leva em conta a altitude;
- Assume-se que  $\vec{V}$  é incompressível<sup>†</sup>, ou seja  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ ;

 $<sup>^\</sup>dagger \mathrm{De}$ fato, a hipótese aqui é até mais forte: a de que  $\vec{V}$  é constante em todo o domínio  $\Omega.$ 

- Todas as simulações foram feitas com dados sintéticos;
- Reações químicas não são levadas em conta.

Com estas simplificações o modelo (2.1) torna-se:

$$-\alpha \Delta u + \vec{V} \cdot \nabla u = f, \quad (x_1, x_2) \in \Omega \in \mathbb{R}^2$$

$$u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1$$

$$(2.2)$$

#### 2.3. Aproximação numérica

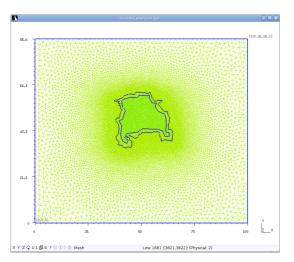
O aproximação numérica do problema (2.2) será obtida através do método dos Elementos Finitos (mais precisamente, método de Galerkin), o que envolve os seguintes passos:

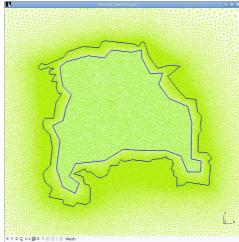
- Construção da formulação fraca do problema;
- Discretização espacial do domínio  $\Omega$ ;
- Construção do sistema linear associado à aproximação pelo método de Galerkin e sua solução numérica;
- Visualização e interpretação dos resultados.

Os detalhes da formulação fraca e construção do sistema linear associado com base no método de Galerkin fogem ao escopo deste trabalho, mas podem ser conferidos na íntegra nas referências Castro (1993) e Cantão (1998).

A discretização espacial do domínio  $\Omega$  (figura 1) é composta de 135084 elementos triangulares de segunda ordem (6 nós) e foi gerada com o software GMSH<sup> $\dagger$ </sup>, resultando em um total de 270353 pontos distribuídos no domínio (figura 2(a)). Detalhes da malha próximos à fronteira da cidade podem ser apreciados na figura 2(b) (o segundo contorno azul mais interno ao mapa serve de guia para o gerador de malhas, não fazendo parte da simulação).

<sup>†</sup>http://www.geuz.org/gmsh





- (a) Malha triangular do domínio envolvendo a cidade de Sorocaba.
- (b) Detalhe da malha do domínio envolvendo a cidade de Sorocaba.

Figura 2: Discretização em elementos finitos do domínio  $\Omega$ .

As simulações foram executadas a partir de um software criado especificamente para este fim, baseado no framework de Elementos Finitos Pantheon – Cantão (2004).

#### 2.4. Cenários de simulação

Serão apresentados agora alguns cenários sintéticos de simulação.

#### Cenário 1

O primeiro cenário corresponde à localização de uma fonte poluente no centro da cidade de Sorocaba (coordenadas  $(x_1,x_2)=(47.0;46.0)\,km$  no sistema de coordenadas adotado). O coeficiente de difusão assumido é de  $0.5\,km^2\,h^{-1}$ , com componente advectivo  $\vec{V}=(0.05;0.05)^T$  (em  $km\,h^{-1}$ ). A fonte poluente tem intensidade igual a  $1\,h^{-1}$ . O mapa de concentração de poluente e suas respectivas curvas de isoconcentração podem ser apreciadas na figura 3.

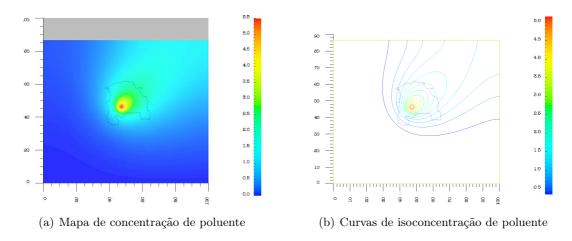


Figura 3: Aproximação numérica para o Cenário 1.

#### Cenário 2

O cenário 2 corresponde à uma fonte poluente na região de Salto de Pirapora (coordenadas  $(x_1, x_2) = (25.5; 22.0) \, km$ ). O coeficiente de difusão é de  $0.5 \, km^2 \, h^{-1}$ , com componente advectivo  $\vec{V} = (0.2; 0.2)^T$  (em  $km \, h^{-1}$ ). A fonte poluente tem intensidade igual a  $1 \, h^{-1}$ . O mapa de concentração de poluente e suas respectivas curvas de nível estão na figura 4.

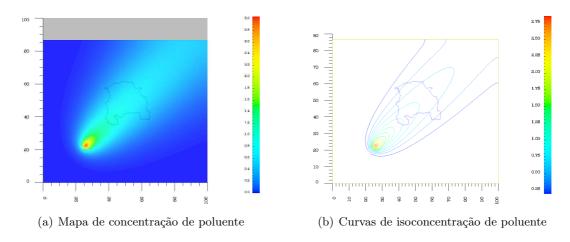


Figura 4: Aproximação numérica para o Cenário 2.

#### Cenário 3

O cenário 3 corresponde à uma fonte poluente na região de São Roque (coordenadas  $(x_1, x_2) = (85.0; 38.5) \, km$ ). O coeficiente de difusão é de  $0.5 \, km^2 \, h^{-1}$ , com componente advectivo  $\vec{V} = (-0.1; 0.0)^T$  (em  $km \, h^{-1}$ ). A fonte poluente tem intensidade igual a  $1 \, h^{-1}$ . O mapa de concentração de poluente e suas respectivas curvas de isoconcentração podem ser apreciadas na figura 5.

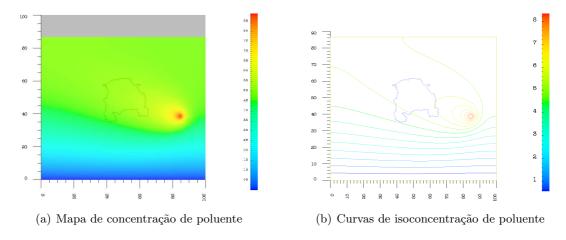


Figura 5: Aproximação numérica para o Cenário 3.

#### Cenário 4

O cenário 4 corresponde à uma fonte poluente na região de Votorantim (coordenadas  $(x_1, x_2) = (55.0; 31.0) \, km$ ). O coeficiente de difusão é de  $0.5 \, km^2 \, h^{-1}$ , com componente advectivo  $\vec{V} = (-0.05; 0.15)^T$  (em  $km \, h^{-1}$ ). A fonte poluente tem intensidade igual a  $1 \, h^{-1}$ . O mapa de concentração de poluente e suas respectivas curvas de isoconcentração podem ser apreciadas na figura 7.

#### Cenário 5

O cenário 5 destaca-se dos demais por apresentar uma outra forma de entrada de poluente no ambiente, via fronteiras. Isto implica em tomar  $f\equiv 0$  em todo  $\Omega$ —sem fonte poluente — e admitir uma condição do tipo Dirichlet não nula em alguma

das fronteiras. Para este cenário assumiu-se como fronteira não nula o terço central da fronteira mais à direita do domínio, correspondendo a  $x = 100 \, km$  (figura 6).

A condição de Dirichlet imposta foi u=1 em  $\Omega_0$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$ , em  $\Omega_1$ . que resulta na solução aproximada da figura 8.

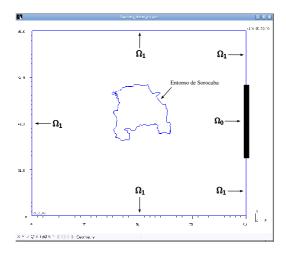


Figura 6: Domínio  $\Omega$  contendo a região de Sorocaba, com novas condições de fronteira.

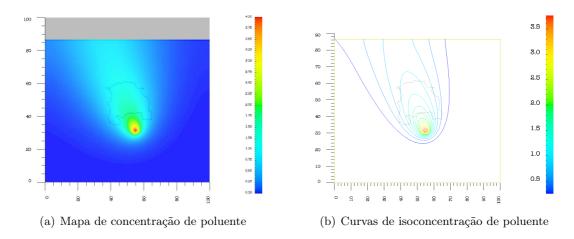


Figura 7: Aproximação numérica para o Cenário 4.

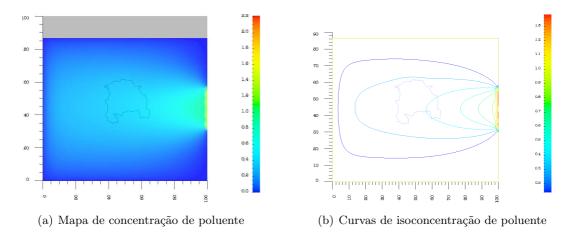


Figura 8: Aproximação numérica para o Cenário 5.

#### 3. Unindo os modelos

Nesta seção serão apresentados casos sintéticos unindo o modelo de Programação Matemática Fuzzy apresentado em Cantão e Cantão (2007) e os cenários de dispersão de poluentes criados na seção 2. A união dos dois modelos foi feita através de um conjunto de programas em GNU/Octave§, acoplado ao LPSolve¶ para solução dos problemas de otimização lineares resultantes.

#### 3.1. Caso 1: cenários 1 a 3, com três receptores

Neste caso foram adotadas como funções de transferência  $s_j$ , para cada fonte j (representada por uma função gaussiana), os resultados das aproximações numéricas dos cenários 1, 2 e 3 apresentados na seção 2. Os pontos receptores são os mesmos utilizados no exemplo numérico ilustrativo (figura 9 – Silva (2005)), reescalados para o sistema de coordenadas do domínio  $\Omega$  (figura 1).

A tabela 1 resume o efeito de cada uma das fontes dos mencionados cenários nos 3 receptores. Esta tabela corresponde ao parâmetro  $s_{ji}$  que representa a taxa de concentração em um ponto receptor i provocado pela fonte j.

A tabela 2 apresenta os valores de  $e_i$  (valor desejado de concentração de polu-

 $<sup>{}^{\</sup>S}$ http://www.octave.org

 $<sup>\</sup>P$ http://lpsolve.sourceforge.net

ente para cada receptor i=1,2,3) e d (máxima concentração "permitida pela legislação"  $\|$ ). Os custos de redução, taxas de redução desejadas e esperadas constam da tabela 3.

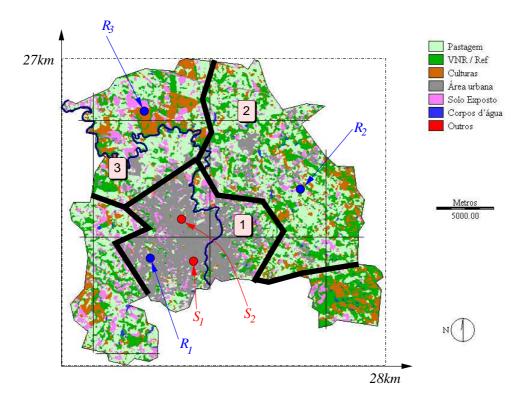


Figura 9: Mapa da região de Sorocaba – Silva (2005).

## Cálculo de $\alpha_0$

Escrevendo o problema para o cálculo de  $\alpha_0$ , como apresentado em Cantão e Cantão (2007), para os dados do caso 1, obtemos:

min 
$$\mathbf{c}^T \mathbf{e}$$
  
s.a.  $\mathbf{A} \mathbf{e} \geq \mathbf{b}_1$  (3.3)  
 $\mathbf{e} \leq \bar{\mathbf{e}}$ 

<sup>&</sup>lt;sup>||</sup>Lembrando que se trata de dados fictícios.

Tabela	1:	$s_{ji}$	para o	caso	1.
--------	----	----------	--------	------	----

	ntos Re	ceptores e lenadas	Emissão de Poluentes nas Fontes		$\sum_{j=1}^{3} s_{ji}$	
i	$x_1^i$	$x_2^i$	$s_{1i}$	$s_{2i}$	$s_{3i}$	
1	44.5	45.0	3.1422	0.8165	5.1086	9.0673
2	57.0	49.5	1.9234	0.6262	5.4424	7.9920
3	45.0	56.3	1.8634	0.4921	5.2271	7.5826

Tabela 2: Concentração de poluente desejada e permitida para o caso 1.

i	$e_i$	d
1	4.5	6.0
2	3.0	6.0
3	3.5	6.0

Tabela 3: Custos de redução, taxas de redução desejada e esperada para o caso 1.

j	$c_j$	$ar{E}_j$	$w_{j}$
1	0.6	0.5	0.30
2	0.4	0.3	0.15
3	2.5	0.5	0.30

com

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.1422 & 0.8165 & 5.1086 \\ 1.9234 & 0.6262 & 5.4424 \\ 1.8634 & 0.4921 & 5.2271 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3.0673 \\ 1.9920 \\ 1.5826 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

e  $E_i \ge 0$  para i = 1, 2, 3.

A solução de (3.3) é apresentada na tabela 4.

Tabela 4: Solução ótima para problema auxiliar usado no cálculo de  $\alpha_0$ , caso 1.

i	$E_i$
1	0.500000
2	0.000000
3	0.292879

O valor de  $\alpha_0$  corresponde ao valor da função objetivo neste ponto, portanto:  $\alpha_0=1.0322$ 

#### Cálculo de $\beta_0$

Escrevendo o problema para o cálculo de  $\beta_0$  (vide Cantão e Cantão (2007)) para os dados do caso 1, obtemos:

min 
$$\mathbf{c}_{1}^{T}\mathbf{s} + \mathbf{c}_{2}^{T}\mathbf{t}$$
  
s.a.  $\mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{I}\mathbf{s} \geq \mathbf{b}_{2}$   
 $\mathbf{s} \leq d - \bar{\mathbf{e}}$   
 $\mathbf{I}\mathbf{E} - \mathbf{I}\mathbf{t} \leq \mathbf{w}$   
 $\mathbf{t} \leq \bar{\mathbf{e}} - \mathbf{w}$  (3.4)

com  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\bar{\mathbf{e}}$  e d como definidos anteriormente,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade, e ainda

$$\mathbf{c}_{1} = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.34 \\ 0.40 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{2} = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 6.67 \\ 5.00 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{1} \\ s_{2} \\ s_{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{2} = \begin{bmatrix} 4.5673 \\ 4.9920 \\ 4.0826 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{1} \\ t_{2} \\ t_{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.15 \\ 0.30 \end{bmatrix},$$

e  $E_i, s_i, t_i \ge 0$  para i = 1, 2, 3. Vale lembrar que as variáveis  $t_i$  e  $S_i$ , i = 1, 2, 3 são as variáveis de folga do problema.

A solução de (3.4) é apresentada na tabela 5.

Tabela 5: Solução ótima para problema auxiliar usado no cálculo de  $\beta_0$ , caso 1.

i	$E_i$	$s_i$	$t_i$
1		0.947865	
2		1.599850	
3	0.50	0.836215	0.2

O valor de  $\beta_0$  corresponde ao valor da função objetivo neste ponto, portanto:  $\beta_0=2.4997$ 

#### O problema completo

Finalmente, de posse dos valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , podemos resolver o problema completo de programação matemática fuzzy (vide Cantão e Cantão (2007)). Com os dados apresentados até o momento, este problema torna-se:

min 
$$\mathbf{c}_{1}^{T}\mathbf{s} + \mathbf{c}_{2}^{T}\mathbf{t} + \mathbf{c}_{3}^{T}\mathbf{E}$$
  
s.a.  $\mathbf{Ae} + \mathbf{Is} \geq \mathbf{b}_{2}$   
 $\mathbf{s} \leq d - \bar{\mathbf{e}}$  (3.5)  
 $\mathbf{IE} - \mathbf{It} \leq \mathbf{w}$   
 $\mathbf{t} \leq \bar{\mathbf{e}} - \mathbf{w}$ 

com  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{\bar{e}}$ ,  $\mathbf{\bar{e}}$ ,  $\mathbf{\bar{e}}$ ,  $\mathbf{w}$  e d como definidos anteriormente, e ainda

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 1.31060650762 \\ 0.87373767175 \\ 5.46086044843 \end{bmatrix}$$

A solução de (3.5) é apresentada na tabela 6.

Tabela 6: Solução ótima para o caso 1.

i	$E_i$	$s_i$	$t_i$
1	0.30000	1.50000	0.0000000
2	0.15000	2.18806	0.0000000
3	0.39192	1.40116	0.0919205

Assim, de acordo com os parâmetros fornecidos, propõe-se uma redução de emissão de 30% na fonte 1, 15% na fonte 2 e aproximadamente 39.2% na fonte 3, a um custo total de 5.41389 unidades monetárias.

#### Verificação dos resultados

Os cenários 1 a 3 serão simulados novamente, só que as respectivas fontes poluentes terão seus valores ajustados de  $1\,h^{-1}$  para  $0.7\,h^{-1}$ ,  $0.85\,h^{-1}$  e  $0.60808\,h^{-1}$ ,

respectivamente. Este reajuste corresponde às reduções encontradas na solução do problema (3.5).

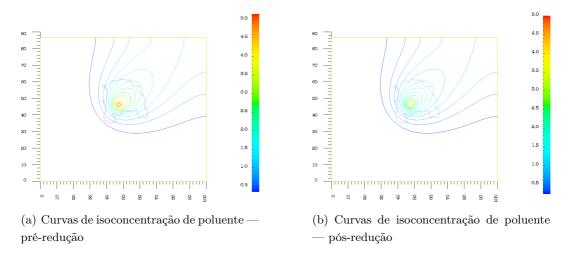


Figura 10: Comparação entre o Cenário 1 com a emissão original e a emissão reduzida.

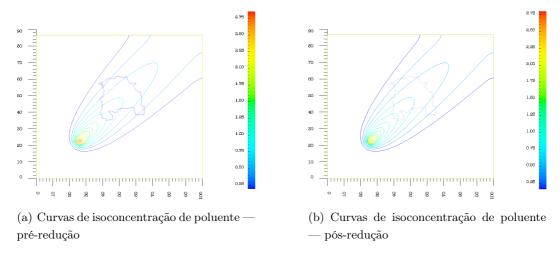


Figura 11: Comparação entre o Cenário 2 com a emissão original e a emissão reduzida.

A tabela 7 mostra os resultados da influência das 3 fontes poluentes nos 3 receptores após a redução proposta. Como esperado, o total ficou abaixo do recomendado pela legislação (d=6.0). No caso dos receptores 2 e 3, embora não tenham sido

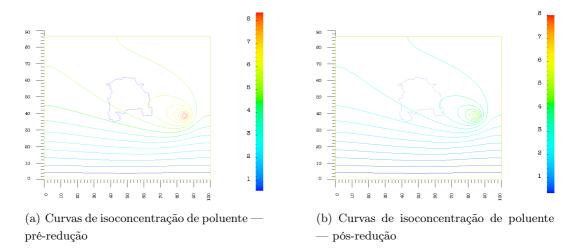


Figura 12: Comparação entre o Cenário 3 com a emissão original e a emissão reduzida.

atingidos os valores de redução desejados ( $\mathbf{e} = [4.5, 3.0, 3.5]^T$ ), ainda sim obteve-se valores abaixo do recomendado pela legislação.

abcı	ια <b>ι</b> . υງ	i para o co	x $x$ $y$ $y$	ob ab rear	13000 1000	minima
	ntos Re	ceptores e lenadas	Emissão de Poluentes nas Fontes		$\sum_{j=1}^{3} s_{ji}$	
i	$x_1^i$	$x_2^i$	$s_{1i}$	$s_{2i}$	$s_{3i}$	
1	44.5	45.0	2.1995	0.6941	3.1070	6.0000
2	57.0	49.5	1.3461	0.5322	3.3095	5.1878
3	45.0	56.3	1.3046	0.4184	3.1796	4.9026

Tabela 7:  $s_{ii}$  para o caso 1, após as reduções recomendadas.

#### 3.2. Caso 2: cenários 4 e 5, com três receptores

Neste caso foram adotadas como funções de transferência  $s_j$ , os resultados das aproximações numéricas dos cenários 4 e 5 apresentados na seção 2. Os pontos receptores foram mantidos.

A tabela 8 resume o efeito de cada uma das fontes dos mencionados cenários nos 3 receptores. Esta tabela corresponde ao parâmetro  $s_{ji}$ .

2

3

57.0

45.0

49.5

56.3

	rasera e. egi para e case 2.				
	ntos Re	ceptores e lenadas	Emissão de Poluentes nas Fontes		$\sum_{j=1}^{3} s_{ji}$
i	$x_1^i$	$x_2^i$	$s_{1i}$	$s_{2i}$	
1	44.5	45.0	1.2620	0.3719	1.6339

1.1431

1.1630

0.4203

0.3342

1.5634

1.4972

Tabela 8:  $s_{ji}$  para o caso 2.

A tabela 9 apresenta os valores de  $e_i$  (valor desejado de concentração de poluente para cada receptor i=1,2,3) e d (máxima concentração permitida pela legislação). Os custos de redução, taxas de redução desejadas e esperadas constam da tabela 10.

Tabela 9: Concentração de poluente desejada e permitida para o caso 2.

i	$e_i$	d
1	0.75	1.2
2	0.50	1.2
3	0.60	1.2

Tabela 10: Custos de redução, taxas de redução desejada e esperada para o caso 2.

$\underline{j}$	$c_j$	$\bar{E}_j$	$w_{j}$
1	0.8	0.5	0.30
2	0.6	0.2	0.15

#### Cálculo de $\alpha_0$

Escrevendo o problema para o cálculo de  $\alpha_0$  para os dados do caso 2, obtemos:

min 
$$\mathbf{c}^T \mathbf{e}$$
  
s.a.  $\mathbf{A} \mathbf{e} \geq \mathbf{b}_1$   
 $\mathbf{e} \leq \mathbf{\bar{e}}$  (3.6)

com

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.2620 & 0.3719 \\ 1.1431 & 0.4203 \\ 1.1630 & 0.3342 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0.4348 \\ 0.3634 \\ 0.2972 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\bar{e}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

e  $E_i \ge 0$  para i = 1, 2.

A solução de (3.6) é apresentada na tabela 11.

Tabela 11: Solução ótima para problema auxiliar usado no cálculo de  $\alpha_0$ , caso 2.

i	$E_i$
1	0.344287
2	0.0

O valor de  $\alpha_0$  corresponde ao valor da função objetivo neste ponto, portanto:

$$\alpha_0 = 0.2754$$

#### Cálculo de $\beta_0$

Escrevendo o problema para o cálculo de  $\beta_0$  para os dados do caso 2, obtemos:

min 
$$\mathbf{c}_{1}^{T}\mathbf{s} + \mathbf{c}_{2}^{T}\mathbf{t}$$
  
s.a.  $\mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{I}\mathbf{s} \geq \mathbf{b}_{2}$   
 $\mathbf{s} \leq d - \bar{\mathbf{e}}$  (3.7)  
 $\mathbf{I}\mathbf{E} - \mathbf{I}\mathbf{t} \leq \mathbf{w}$   
 $\mathbf{t} \leq \bar{\mathbf{e}} - \mathbf{w}$ 

com  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\bar{\mathbf{e}}$  e d como definidos anteriormente,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade, e ainda

$$\mathbf{c}_{1} = \begin{bmatrix} 2.23 \\ 1.43 \\ 1.67 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{2} = \begin{bmatrix} 5.0 \\ 20.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{1} \\ s_{2} \\ s_{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{2} = \begin{bmatrix} 0.8848 \\ 1.0634 \\ 0.8972 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_{1} \\ t_{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.15 \\ 0.30 \end{bmatrix},$$

e  $E_i, t_i \ge 0$  para  $i = 1, 2, s_j \ge 0$  para j = 1, 2, 3.

A solução de (3.7) é apresentada na tabela 12.

O valor de  $\beta_0$  corresponde ao valor da função objetivo neste ponto, portanto:

$$\beta_0 = 2.4942$$

Tabela 12: Solução ótima para problema auxiliar usado no cálculo de  $\beta_0$ , caso 2.

i	$E_i$	$s_i$	$t_i$
1	0.50	0.197565	0.2
2	0.15	0.428805	0.0
3		0.265570	

#### O problema completo

Finalmente, de posse dos valores de  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , podemos resolver o problema completo de programação matemática fuzzy. Com os dados apresentados até o momento, este problema torna-se:

min 
$$\mathbf{c}_{1}^{T}\mathbf{s} + \mathbf{c}_{2}^{T}\mathbf{t} + \mathbf{c}_{3}^{T}\mathbf{E}$$
  
s.a.  $\mathbf{Ae} + \mathbf{Is} \geq \mathbf{b}_{2}$   
 $\mathbf{s} \leq d - \mathbf{\bar{e}}$  (3.8)  
 $\mathbf{IE} - \mathbf{It} \leq \mathbf{w}$   
 $\mathbf{t} \leq \mathbf{\bar{e}} - \mathbf{w}$ 

com  $c_1, c_2, s, t, e, A, \bar{e}, \bar{e}, w$  e d como definidos anteriormente, e ainda

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 3.72837948048 \\ 2.79628461036 \end{bmatrix}$$

A solução de (3.8) é apresentada na tabela 13.

Tabela 13: Solução ótima para o caso 2.

i	$E_i$	$s_i$	$t_i$
1	0.3442	0.450000	0.044287
2	0.0000	0.669846	0.000000
3	—	0.496794	

Assim, de acordo com os parâmetros fornecidos, propõe-se uma redução de emissão de aproximadamente 34% na fonte 1 e nenhuma redução na fonte 2 (um indicativo de que ela não é determinante da qualidade do ar neste caso), a um custo total de 4.28998 unidades monetárias.

### Verificação dos resultados

O cenário 4 será simulado novamente com valor da fonte poluente reajustado para  $0.6558\,h^{-1}$ . O cenário 5 não necessita ser recalculado pois não houve redução da fonte poluente.

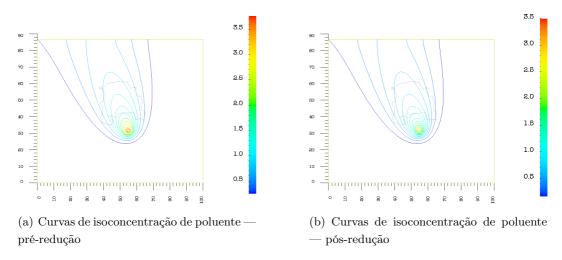


Figura 13: Comparação entre o Cenário 4 com a emissão original e a emissão reduzida.

A tabela 14 mostra os resultados da influência das 2 fontes poluentes nos 3 receptores após a redução proposta. Como esperado, o total ficou abaixo do recomendado pela legislação (d=1.2).

Tabela 14:  $s_{ji}$  para o caso 2, após as reduções recomendadas.

Pontos Receptores e suas Coordenadas		Emissão de Poluentes nas Fontes		$\sum_{j=1}^{3} s_{ji}$	
i	$x_1^i$	$x_2^i$	$s_{1i}$	$s_{2i}$	
1	44.5	45.0	0.8277	0.3719	1.1996
2	57.0	49.5	0.7497	0.4203	1.1700
3	45.0	56.3	0.7634	0.3342	1.0976

# 4. Considerações Finais

Para a resolução deste modelo foi construído um procedimento de simulação e otimização para uso como ferramenta auxiliar na tomada de decisão e na criação de políticas de controle de poluição do ar.

O núcleo da ferramenta usa Programação Matemática Fuzzy para sugestão de ações de redução de emissão de poluentes baseada em dados de custo desta redução, valores máximos permitidos pela Legislação, valores desejados — de acordo com a região afetada — e informações do próprio poluente, tanto nas fontes, quanto nos receptores.

Como ferramenta auxiliar foi utilizada uma implementação de um modelo de dispersão de poluentes à equações diferenciais parciais, com solução numérica aproximada obtida via Elementos Finitos (Método de Galerkin).

Ainda quanto à circulação atmosférica, deve ser lembrado que foi usada uma simplificação muito limitante: a saber, o uso de um campo de velocidades uniforme (vento predominante) em todo o domínio de simulação. Com dados medidos e um outro modelo auxiliar de Dinâmica de Fluidos, esta situação poderia ser melhorada.

Naturalmente, dada a generalidade das implementações — tanto do núcleo de otimização, quanto da simulação de plumas de poluentes — trabalhos de pesquisa posteriores podem ser desenvolvidos no sentido de aprimorar o procedimento de uso da ferramenta.

# 5 Agradecimentos

Agradecemos ao Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz (Universidade Federal do Mato Grosso – UFMT), pelas diversas discussões e artigos a respeito de modelagem de poluentes.

## Referências

Cantão, R. F. (2004). Construção de um software de elementos finitos usando programação genérica/generativa: Considerações sobre C++, performance e genera-

- lidade. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas.
- Cantão, L. A. P. e Cantão, R. F. (2007). Programação matemática fuzzy aplicada a problemas de poluição do ar. *Biomatemática*, 17:21–34.
- Cantão, R. F. (1998). Modelagem e simulação numérica de derrames de Óleo no canal de são sebastião, SP. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas.
- Castro, S. E. P. (1993). Modelagem matemática e aproximação numérica do estudo de poluentes no ar. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas.
- CETESB (2005). Relatório de qualidade do ar no Estado de São Paulo. Technical report, CETESB Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, www.cetesb.sp.gov.br. Last access in Aug/2007.
- CETESB (2006). Relatório de qualidade do ar no Estado de São Paulo. Technical report, CETESB Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, www.cetesb.sp.gov.br. Last access in Aug/2007.
- CETESB (2007). Relatório de qualidade do ar no Estado de São Paulo. Technical report, CETESB Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, www.cetesb.sp.gov.br. Last access in Aug/2007.
- Jørgensen, S. E. (1988). Fundamentals of Ecological Modelling, volume 9 of Developments in Environmental Modelling. Elsevier, Amsterdam.
- Marchuk, G. I. (1986). Mathematical Models in Environmental Problems, volume 16 of Studies in Mathematics and Its Applications. North-Holland, Amsterdam.
- Meyer, J. F. C. A. e Diniz, G. L. (2007). Pollutant dispersion in wetland systems: Mathematical modelling and numerical simulation. *Ecological Modelling*, (200):360–370.
- Muramoto, C. A., Fialho, R. C., de Souza, J. B., Chamani, M. C., Gallo, G. I., e Benavente, A. C. M. B. (2004). Estudos investigativos da ocorrência de ozônio

- troposférico na região de Sorocaba SP. Technical report, CETESB Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, www.cetesb.sp.gov.br. Last access in  ${\rm Aug}/2007$ .
- Okubo, A. (1980). Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models. Springer, Berlin.
- Silva, A. M. (2005). Cobertura do solo do município de Sorocaba-SP e implicações na fragmentação dos remanescentes florestais. *Revista de Estudos Ambientais*, 7:38–46.
- Sommer, G. e Pollatschek, M. A. (1978). A fuzzy programming approach to an air pollution regulation problem. In Trappl, R., Klir, G. J., e Ricciardi, L., editors, *Progress in Cybernetics and Systems Research*, volume III, páginas 303–313. John and Sons.