

Modelo SIS com dinâmica vital e população total não constante baseado em regras fuzzy

L. C. de Barros¹,

IMECC, UNICAMP, 13.083-970, Campinas/SP.

M. B. F. Leite²,

CEATEC-PUC-Campinas, 13.086-900, Campinas/SP.

R. Z. G. Oliveira³,

DM, UNESP, 13.500-230, Rio Claro/SP.

R. C. Bassanezi⁴,

DM, UFABC, 09.210-170, Santo André/SP.

Resumo. Neste trabalho utilizamos regras fuzzy para descrever as transições entre os compartimentos no modelo *SIS* (suscetíveis - infectados - suscetíveis) com dinâmica vital e população total não constante. Consideramos aqui o caso em que a taxa de natalidade supera a de mortalidade. A partir da solução obtida via controladores fuzzy (Barros e Bassanezi, 2006), observamos que a população de suscetíveis atinge um valor máximo, dependente da condição inicial, além da ausência de equilíbrio não trivial. Essas características estão de acordo com o comportamento qualitativo do modelo *SIS* clássico com as mesmas hipóteses (Bassanezi e Ferreira Jr, 1978).

Palavras-chave: *Lógica Fuzzy; População variável; Epidemiologia.*

1. Introdução

O estudo de modelos epidemiológicos é de fundamental importância para a adoção de medidas e estratégias de controle de epidemias. Em Barros et al. (2007) um modelo do tipo *SIS*, com dinâmica vital e população total constante é estudado

¹laeciob@ime.unicamp.br

²biaemiti@sigmanet.com.br

³rzotin@rc.unesp.br

⁴rodney@ime.unicamp.br

utilizando a lógica fuzzy como ferramenta. Um sistema baseado em regras fuzzy para as taxas de crescimento específicas de ambas as classes é obtido sem o auxílio de equações determinísticas e analisado a partir da Teoria de Controladores Fuzzy (Barros et al., 2004; Pedrycz e Gomide, 1998), aliada à métodos de Análise Numérica. A análise via base de regras, pode ser fundamental na estimativa de parâmetros e permite um tratamento matemático de variáveis com um certo grau de subjetividade. Neste trabalho, temos por objetivo dar seqüência ao trabalho desenvolvido em Barros et al. (2007), ou seja, o estudo do modelo *SIS* com dinâmica vital, considerando agora população não constante, utilizando a Teoria de Controladores Fuzzy.

2. O Modelo clássico

As equações que descrevem um modelo determinístico clássico do tipo *SIS* com dinâmica vital e população total não constante são (Edelstein-Keshet, 1988; Bassanezi e Ferreira Jr, 1978):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I + \mu N - \delta S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \delta I \end{cases} \quad (2.1)$$

onde S é a população de indivíduos suscetíveis, I é a população de indivíduos infectados, $N = S + I$ é a população total, β é a taxa de contato, μ é a taxa de natalidade, δ é a taxa de mortalidade, γ é a taxa de recuperação (γ^{-1} é o período infeccioso).

Considerando o caso no qual $\mu > \delta$ (a taxa de natalidade é maior que a taxa de mortalidade), verificamos que não há pontos de equilíbrio para o modelo proposto (2.1). No plano de fase abaixo (Figura 1), estão representadas as isóclinas $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$ e uma trajetória com uma condição inicial (S_0, I_0) .

É importante observar que, no modelo (2.1) acima, dependendo da quantidade inicial de infectados, o número de suscetíveis cresce até atingir um valor máximo $I_0 > 0$, o número de suscetíveis cresce até atingir um valor máximo S_m quando a trajetória intercepta a isóclina $I = \frac{S(\mu-\delta)}{\beta S - (\mu+\gamma)}$ (obtida de $\frac{dS}{dt} = 0$). Para a condição inicial ilustrada na Figura 1, o número de indivíduos suscetíveis tende a $S = \frac{\mu+\gamma}{\beta}$ quando $t \rightarrow \infty$ e, apesar do número de indivíduos infectados decrescer temporariamente, a

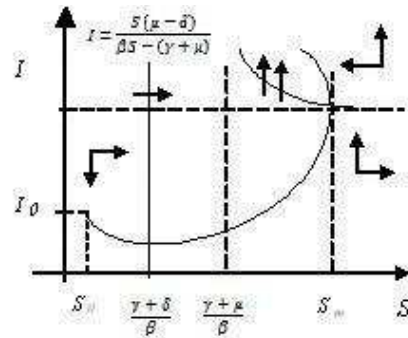


Figura 1: Plano de fase para o modelo (2.1)

doença se estabelece na população. Para o modelo *SIS* clássico com dinâmica vital e população total constante, a condição necessária para a propagação da doença é que o Valor de Reprodutibilidade Basal, R_0 (que indica o número de casos novos a partir de um único infectado), seja maior que 1 (Edelstein-Keshet, 1988; Massad et al., 2008). Este valor resulta de $\frac{dI}{dt} > 0$ no início do processo infeccioso. Porém, de acordo com a discussão acima, esta condição ($\frac{dI}{dt} > 0$), não é necessária para a propagação da doença na população supondo população total não constante. Para modelos epidemiológicos, com população não constante, é necessária a análise de parâmetros adicionais que indicam como a doença evolui na população.

Busenberg e van den Driessche (1990) estudam um modelo geral de transmissão direta do tipo *SIRS*, com população total não constante. As condições apresentadas para a propagação da doença na população dependem não apenas do R_0 (razão entre a taxa de transmissão da doença e a soma das taxas de recuperação e mortalidade dos infectados) mas também da razão entre as taxas de natalidade e mortalidade na população (R_1) e a razão entre a entrada e a saída na classe de indivíduos infectados (R_2). Estes resultados são apresentados na tabela 1 (ver em Busenberg e van den Driessche, 1990), na qual verifica-se que mesmo com $R_0 \leq 1$, é possível que a doença se propague na população. Para isto, basta que R_1 e R_2 sejam maiores que 1.

Para o modelo (2.1), que pode ser obtido do modelo *SIRS* quando o período médio de imunidade tende a zero (Liu et al., 1987), sob a hipótese de $R_0 \leq 1$ que

neste caso equivale a $\beta/(\mu + \gamma) \leq 1$, para que a doença se propague devemos ter $R_1 = \mu/\delta > 1$ e $R_2 = \beta/(\gamma + \delta) > 1$.

3. O modelo fuzzy

As regras que definem a dinâmica do modelo são baseadas nas taxas intrínsecas de crescimento de ambas as classes: $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$. Para os infectados admitimos que:

- a) para cada S fixo, o crescimento $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é constante;
- b) o crescimento específico $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ aumenta com S , sendo negativo para S baixo.

Já para os suscetíveis, admitimos que:

- a) esta classe nunca se extingue e também não cresce ilimitadamente: $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é positiva para pequenas quantidades de S e é negativa para grandes quantidades de S .
- b) $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é crescente com I quando S é pequeno;
- c) $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ depende de S e I .

Consideramos S , I , $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ como variáveis lingüísticas. Os termos considerados para S foram baixo (B), médio baixo ($M1$), médio alto ($M2$) e alto (A). Para I os termos foram baixo (B), médio (M) e alto (A). Para $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ os termos lingüísticos são baixo (B), médio (M), alto (A), baixo negativo (BN), médio negativo (MN) e alto negativo (AN) e para $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ são baixo negativo (BN), baixo (B) e alto (A).

Propomos 12 regras, como apresentadas a seguir, e ilustradas na Figura 2.

1. Se S é B e I é B então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é B e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é BN .
2. Se S é B e I é M então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é M e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é BN .
3. Se S é B e I é A então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é A e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é BN .
4. Se S é $M1$ e I é B então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é B e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é B .
5. Se S é $M1$ e I é M então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é M e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é B .
6. Se S é $M1$ e I é A então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é M e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é B .

7. Se S é $M2$ e I é B então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é M e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é B .
8. Se S é $M2$ e I é M então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é B e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é B .
9. Se S é $M2$ e I é A então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é BN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é B .
10. Se S é A e I é B então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é MN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é A .
11. Se S é A e I é M então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é MN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é A .
12. Se S é A e I é A então $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ é AN e $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$ é A .

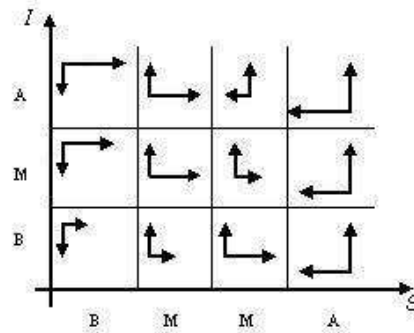


Figura 2: Representação esquemática das regras

Neste modelo estamos admitindo que para cada população existe um valor limite, K_S e K_I . Desta forma, as variáveis de estado S e I são tomadas como densidade de indivíduos, ou seja, em cada instante a quantidade de indivíduos é dada pela razão entre o número de indivíduos e a capacidade suporte da respectiva população. Vale observar que a densidade assim definida não representa a proporção de indivíduos (neste caso, em cada instante, a quantidade de indivíduos de cada classe é dada pela razão entre o número de indivíduos e a população total, acarretando que a soma dessas proporções seja igual a 1). Nas figuras 3 a 6 apresentamos as funções de pertinência para os conjuntos fuzzy considerados.

A Figura 7 representa o campo de direções obtido pelo controlador fuzzy a partir do Método de Inferência de Mamdani gerado com o auxílio do software Matlab.

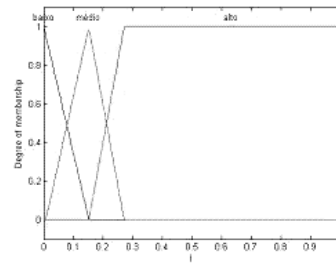
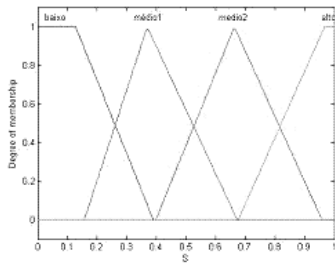


Figura 3: Funções de pertinência para S

Figura 4: Funções de pertinência para I

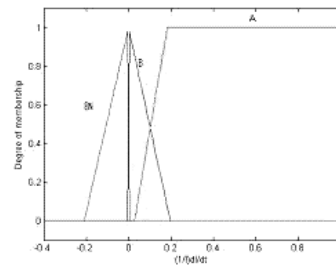
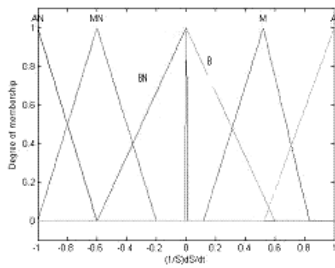


Figura 5: Funções de pertinência para $\frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$

Figura 6: Funções de pertinência para $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt}$

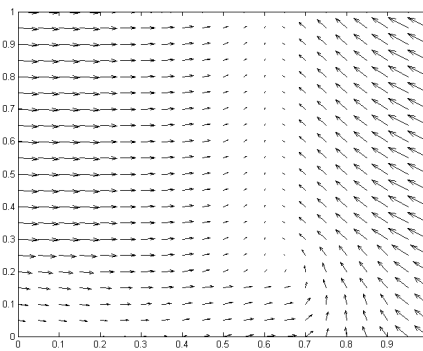


Figura 7: Campo de direções gerado pelo sistema fuzzy

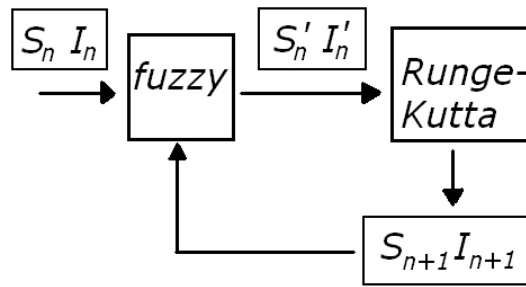


Figura 8: Esquema iterativo combinando controlador fuzzy e o método numérico de Runge-Kutta

4. Simulações

As simulações são obtidas a partir da combinação dos controladores fuzzy com métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias, como Runge-Kutta. A Figura 8 indica nossa metodologia.

Os gráficos mostrados nas Figuras 9 a 12 apresentam o plano de fase e a trajetória para diferentes condições iniciais (Edelstein-Keshet, 1988).

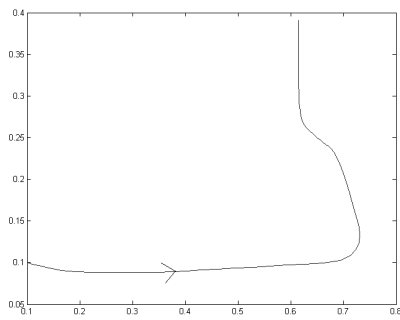


Figura 9: Plano de fase $S \times I$ com $S(0) = 0,1$ e $I(0) = 0,1$.

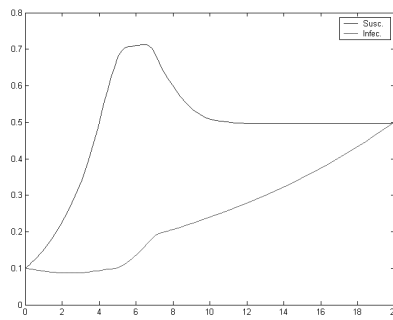


Figura 10: Trajetórias $S(t)$ e $I(t)$ com $S(0) = 0,1$ e $I(0) = 0,1$.

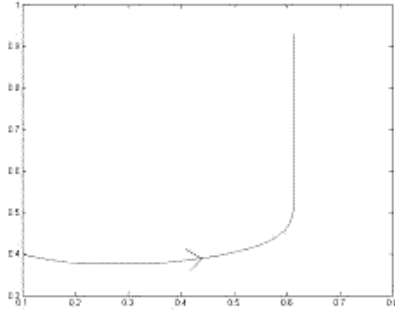


Figura 11: Plano de fase $S \times I$ com $S(0) = 0,1$ e $I(0) = 0,4$.

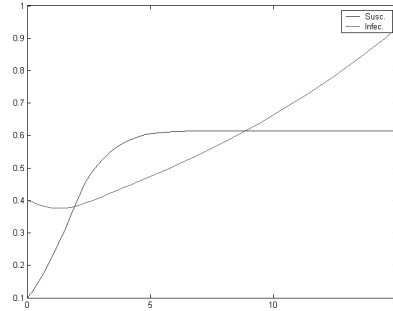


Figura 12: Trajetórias $S(t)$ e $I(t)$ com $S(0) = 0,1$ e $I(0) = 0,4$.

5. Considerações finais

Observamos que o modelo baseado em regras fuzzy tem o mesmo comportamento qualitativo do modelo clássico, onde a população de suscetíveis assume um valor máximo que aumenta, se I_0 diminui. Isto pode ser constatado comparando-se qualitativamente os planos de fase clássico e fuzzy: nas Figuras 1 e 9 o número inicial de infectados é “pequeno” (valores abaixo da isóclina $dI/dt = 0$) enquanto que na 11 o número inicial de infectados é “grande” (valores acima da isóclina $dI/dt = 0$). As regras usadas descrevem um modelo geral do tipo SIS . Para levar em conta características de uma doença específica, as regras devem ser ajustadas. Para formular as regras propostas foram considerados aspectos genéricos de um modelo SIS com população total não constante de acordo com Figura 1. Não foram levadas em conta quaisquer características de uma doença específica, e, portanto, as bases de cada função de pertinência representadas nas Figuras 3 a 6 foram tomadas arbitrariamente, respeitando-se apenas a ordenação dos termos lingüísticos utilizados. A partir dos gráficos anteriores é possível estimar alguns dos parâmetros relacionados a doença considerados no modelo clássico (2.1), como as taxas de contato β e γ de recuperação. Para o conjunto de dados das Figuras 9 e 10, temos, aproximadamente que quando $t \rightarrow \infty$, $S \rightarrow \frac{\gamma + \mu}{\beta} = 0,6$. Além disso, $dI/dt = 0$ quando $\frac{\gamma + \delta}{\beta} = 0,3$. Resolvendo este sistema, obtemos $\gamma = \mu - 2\delta$ e $\beta = \frac{\mu - \delta}{0,3}$. Supondo que os parâmetros μ e δ independem da doença (não há taxa de mortalidade adicional devido à doença e

a doença não afeta a taxa de natalidade), a estimativa dos valores para parâmetros γ e β fica em função dos parâmetros demográficos μ e δ . O estudo de parâmetros para indicar o estabelecimento de doenças em populações não constantes requer a investigação não apenas do R_0 , sendo necessária também a análise de outras taxas, como R_1 (taxa de reprodutibilidade basal populacional), que representa a taxa líquida de reprodução em uma população livre da doença (Busenberg e van den Driessche, 1990).

Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao CNPq (Proc. no. 307890/2006-6) e à FAPESP (Proc. no. 06/05920-7), pelo auxílio a esta pesquisa.

Referências

- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 of *Coleção IMECC - Textos Didáticos*. IMECC-UNICAMP, Campinas/SP.
- Barros, L. C., Leite, M. B. F., Oliveira, R. Z. G., e Bassanezi, R. C. (2007). Sobre incertezas em modelos epidemiológicos do tipo SIS. *Biomatemática*, 17:47–54.
- Barros, L. C., Oliveira, R. Z. G., e Bassanezi, R. C. (2004). *Fuzzy Differential inclusion: an Application to epidemiology in Soft Methodology and Random Information Systems*, volume I. Springer, Warsaw.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). *Equações diferenciais com aplicações*. Ed. Harbra, S. Paulo.
- Busenberg, S. e van den Driessche, P. (1990). Analysis of a disease transmission model in a population with varying size. *Journal of Mathematical Biology*, 28:257–270.
- Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*. Random House, New York.

- Liu, W. M., Hethcote, H. W., e Levin, L. A. (1987). Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. *Journal of Mathematical Biology*, 25:359–380.
- Massad, E., Ortega, N. R. S., Barros, L. C., e Struchiner, C. J. (2008). *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond*. Studies in Fuziness and Soft Computing. Springer, New York.
- Pedrycz, W. e Gomide, L. (1998). *An introduction to fuzzy sets: analysis and design*. MIT Press, Massachusets.