

Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado às curvas de crescimento animal

Juliana Scapim¹,

Departamento de Matemática Aplicada, IMECC - UNICAMP,
Campinas/SP, Brasil.

Rodney C. Bassanezi²

Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do
ABC - UFABC, Santo André/SP, Brasil.

Resumo. No presente trabalho, temos como objetivo estudar a curva de crescimento em peso de diversos espécimes animais, a fim de estabelecer padrões de metabolismo por classe animal. Foram ajustados os parâmetros do modelo não-linear de von Bertalanffy generalizado aplicado às curvas de crescimento para identificar quais parâmetros descrevem melhor o crescimento do animal nas faixas de idade-peso fornecidas. Utilizamos, no estudo, dados de idade e peso de 19 espécimes, entre mamíferos, aves, anfíbios, peixes, crustáceos, vermes e insetos. Uma vez que a principal característica de sistemas determinísticos é a precisão obtida pela solução e ao lidar com modelos de crescimento animal, naturalmente informações imprecisas fazem parte da modelagem, comprometendo esta precisão, optamos por concluir os resultados com o apoio da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que permite trabalhar com este tipo de incerteza de maneira razoável. A conjectura inicial de que haveria um padrão de metabolismo por classe animal não se verificou, ocorrendo, inclusive, distinção entre machos e fêmeas de uma mesma espécie,

¹juscapim@yahoo.com.br

²rodney.bassanezi@ufabc.edu.br

como é o caso do peru. Hipoteticamente, a perda de energia parece estar relacionada com os hábitos de cada animal.

Palavras-chave: *Modelo de von Bertalanffy generalizado; Crescimento Animal; Ajuste de curvas; Conjuntos difusos.*

1. Introdução

A utilização de modelos matemáticos para o estudo de níveis de crescimento em animais é uma prática que pode auxiliar na escolha do melhor método de exploração de determinada espécie zootécnica. As curvas de crescimento relacionam o peso de um animal com sua idade, sendo importante para pesquisas e recomendações sobre eficiência de produção, contribuindo, assim, para aumentar o lucro do produtor (Guedes et al., 2004).

Geralmente, estudam-se curvas de crescimento por meio do ajuste de funções não-lineares, que possibilitam sintetizar informações de todo o período de vida dos animais, ou seja, um conjunto de informações em série de peso por idade, em um pequeno conjunto de parâmetros interpretáveis biologicamente, facilitando assim o entendimento do fenômeno e ressaltando características relevantes do crescimento (Pereira, 2000; Rodrigues et al., 2007).

Dentre as equações não-lineares mais utilizadas para descrever a curva de crescimento em animais de produção, estão os modelos de Richards, Gompertz, von Bertalanffy e Logístico (Freitas, 2007; Guedes et al., 2004). Alguns requisitos devem ser satisfeitos para que uma função de crescimento seja descritiva de uma relação peso-idade, dentre os quais a interpretação biológica dos parâmetros (confiabilidade), um ajuste com pequenos desvios (precisão) e o grau de dificuldade do ajuste (operacionabilidade). O modelo de von Bertalanffy foi aplicado em estudos com curvas de crescimento para rãs (Rodrigues et al., 2007; Freitas, 2007), frangos (Freitas, 2007; Leite, 2003), suínos (Freitas, 2007; Oliveira et al., 2007), caprinos (Freitas, 2007), camarões (Freitas, 2007; Chávez, 1973), coelhos (Freitas, 2007), ovinos (Frei-

tas, 2007; Guedes et al., 2004), bovinos (Freitas, 2007), perus (Bassanezi e Ferreira Jr, 1978), tilápias (Bassanezi, 2002), ratos e humanos (Bertalanffy, 1983), apresentando qualidade elevada de ajuste e estimativas condizentes com a realidade quando comparado à outros modelos em todos os trabalhos.

Ajustamos os parâmetros do modelo não-linear de von Bertalanffy generalizado aplicado às curvas de crescimento em peso de diversos espécimes animais, a fim de identificar quais parâmetros descrevem melhor o crescimento de cada animal nas faixas de idade-peso fornecidas, procurando estabelecer padrões de metabolismo por classe animal. Foram utilizados dados de idade e peso de 19 espécimes, entre os quais mamíferos (suínos machos e fêmeas, bovinos, caprinos, coelhos, ovinos, ratos e humanos), aves (perus machos e fêmeas ; frangos machos e fêmeas), anfíbios (rã-touro), peixes (tilápia e arraia), crustáceos (camarão), vermes (minhoca) e insetos (larva de mosca varejeira), obtidos de instituições de pesquisa e da literatura. Os ajustes foram feitos através de experimentos computacionais.

2. Modelo de von Bertalanffy

Com o intuito de analisar o aumento em peso de peixes, o biólogo australiano von Bertalanffy (Bertalanffy, 1983), formulou o seguinte modelo matemático:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^{\frac{2}{3}} - \beta P \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Seu modelo pode ser considerado uma alteração da curva de crescimento logístico de Verhulst com a finalidade de acomodar características metabólicas baseadas em argumentação fisiológica, onde $P = P(t)$ é a massa do peixe em função do tempo t , P_0 é a massa inicial, α é a constante de anabolismo (representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal) e β é a constante de catabolismo (que representa a taxa

de diminuição da massa por unidade de massa). O termo $P^{\frac{2}{3}}$ é proveniente da relação alométrica do peso com a área corporal do peixe (Bassanezi, 2002).

Em 2002, ao estudar o crescimento em peso de perus, Bassanezi propôs uma generalização para o modelo (2.1), dada por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^\gamma - \beta P \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde agora $P = P(t)$ é a massa da ave em função do tempo t , P_0 é a massa inicial, α e β são respectivamente as constantes de anabolismo e catabolismo e γ é um parâmetro alométrico a ser estimado, $0 < \gamma < 1$.

3. Resolução do modelo generalizado

A equação não linear (2.2) é do tipo Bernoulli e pode ser resolvida com uma substituição de variáveis, o que nos conduzirá à uma equação linear.

Tomando $Z = P^{1-\gamma}$ e substituindo em (2.2) temos:

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = (1-\gamma) P^{-\gamma} \frac{dP}{dt} \\ Z(0) = P_0^{1-\gamma}. \end{cases}$$

Como $\frac{dP}{dt} = \alpha P^\gamma - \beta P$, então:

$$\frac{dZ}{dt} = (1-\gamma) P^{-\gamma} (\alpha P^\gamma - \beta P).$$

Substituindo novamente $Z = P^{1-\gamma}$ obtemos:

$$\frac{dZ}{dt} = (1-\gamma) (\alpha - \beta P^{1-\gamma}) = (1-\gamma) (\alpha - \beta Z)$$

$$\frac{dZ}{dt} + \beta(1 - \gamma)Z = \alpha(1 - \gamma).$$

Temos, portanto, uma EDO linear de 1ª ordem não homogênea em Z :

$$\frac{dZ}{dt} + \beta(1 - \gamma)Z = \alpha(1 - \gamma), \quad (3.1)$$

cujas solução é dada por:

$$Z(t) = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta(1-\gamma)t}.$$

Voltando para $P(t)$, encontramos a equação do peso do animal em função do tempo:

$$P(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(1 + C\frac{\beta}{\alpha}e^{-\beta(1-\gamma)t}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (3.2)$$

Sabemos que $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$, portanto a capacidade suporte P_∞ é dada por:

$$P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (3.3)$$

Dadas a condição inicial $P(0) = P_0$ e a equação (3.2), temos:

$$C = \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 \right] \frac{\alpha}{\beta}.$$

Substituindo a constante C na expressão de $P(t)$, obtemos o modelo generalizado para crescimento em peso de um animal qualquer:

$$P(t) = P_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 \right] e^{-\beta(1-\gamma)t} \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad (3.4)$$

onde $P(0) = P_0$ é o peso inicial e P_∞ é o peso máximo.

O ponto de inflexão P_* , onde a variação da curva é máxima, obtido através do cálculo $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ em (2.2), é dado por:

$$P_* = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} P_\infty. \quad (3.5)$$

O tempo de inflexão t_* , obtido a partir das expressões (3.4) e (3.5), é dado pela expressão:

$$t_* = -\frac{\ln \left[\frac{\gamma - 1}{\left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{1-\gamma} - 1} \right]}{\beta(1-\gamma)}. \quad (3.6)$$

Num modelo mais realista, devemos considerar a taxa de catabolismo β variável com o tempo, uma vez que quando o animal envelhece, hipoteticamente, a sua perda de energia depende de seus hábitos, como por exemplo se ele foi criado solto ou em regime de confinamento.

Da equação (3.4), podemos explicitar β em função de t :

$$\beta = -\frac{\ln \left[\frac{\left(\frac{P}{P_\infty}\right)^{1-\gamma} - 1}{\left(\frac{P_0}{P_\infty}\right)^{1-\gamma} - 1} \right]}{(1-\gamma)t}. \quad (3.7)$$

A relação que permite o cálculo constante de anabolismo pode ser obtida através da expressão (3.3):

$$\alpha = \beta P_\infty^{1-\gamma}. \quad (3.8)$$

A equação (3.5) nos fornece uma expressão que calcula, implicitamente, o parâmetro de alometria desde que P_* seja conhecido:

$$y = \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{P_*}{P_\infty}\right). \quad (3.9)$$

Vale observar a sutileza da relação (3.9) quando o parâmetro $\gamma \rightarrow 1$: quando a razão $\frac{P_*}{P_\infty}$ é maior que $\frac{1}{e} \approx 0.3679$ não é possível ajustar os dados utilizando este modelo.

4. Simulações Numéricas

O parâmetro alométrico $\gamma = 2/3$, obtido por von Bertalanffy para peixes (Bassanezi e Ferreira Jr, 1978), foi estimado como sendo igual a $\gamma = 3/4$ no caso de mamíferos por West (West et al., 2002) e utilizado por Oliveira no seu trabalho com suínos de corte (Oliveira et al., 2007). Os demais estudos com curvas de crescimento em peso animal encontrados na literatura e referenciados no presente trabalho consideram o parâmetro alométrico $\gamma = 2/3$.

Por ser um parâmetro relacionado à área corporal, acreditamos ser mais coerente que cada animal, ou mesmo a classe a que pertence, possua um valor próprio para este parâmetro, não necessariamente igual a $2/3$ ou $3/4$.

Portanto, levamos em conta todas estas possibilidades em nossos cálculos e simulações, com o intuito de encontrar os parâmetros que melhor se adequam ao modelo e à classe animal correspondente.

Inicialmente, calculamos o peso máximo P_∞ utilizando o método de Ford-Walford (Walford, 1976), tomando os valores finais de peso, a partir do ponto de inflexão P_* .

Ajustamos a curva solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (2.2) aos dados de idade-peso através de implementação computacional do modelo, procurando estimar experimentalmente os parâmetros α , β , γ e, conseqüentemente, P_∞ para cada espécime.

Para obtenção dos parâmetros referentes à suíno utilizamos dados experimentais de crescimento em peso do Agroceres PIC de Ponte Nova-MG, referentes ao desempenho da progênie Camborough 22 e AGPIC 412 TG, em boas condições de manejo e nutrição, separada por sexo e destinada à produção de cevados com peso elevado (Oliveira et al., 2007). A dispersão dos dados ao longo do tempo pode ser observada na Figura 1.

O valor do peso máximo estimado para Suíno Macho P_∞ , tomando os últimos 11 dados de peso (ponto de inflexão $P_* \cong 88.480$ kg) foi de $P_\infty = 220.402$ Kg. Oliveira, utilizando o mesmo método para o cálculo

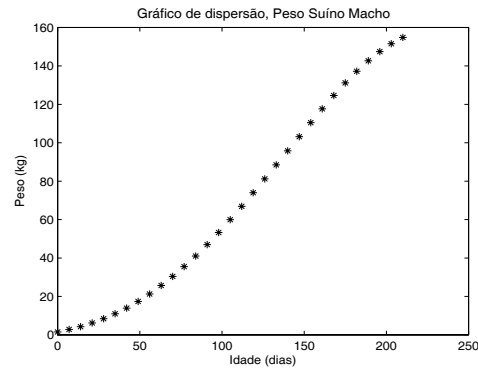


Figura 1: Curva de dispersão do dados de peso p versus tempo t para Suíno Macho.

da capacidade suporte obteve $P_\infty = 192.125$ Kg considerando os últimos 9 dados. Através de testes, chegamos a $P_\infty = 192.126$ kg utilizando os últimos 8 dados de peso.

As simulações do ajuste da solução do modelo de von Bertalanffy generalizado aos dados de crescimento em peso de Suíno Macho foram as seguintes:

Simulação 1:

Parâmetros iniciais: $P_\infty = 192.126$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$.

Parâmetros após ajuste: $\alpha = 1.0758$, $\beta = 1$, $\gamma = 0.9861$.

Simulação 2:

Parâmetros de partida: $P_\infty = 192.126$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.1612$ e $\beta = 0.0433$

Simulação 3:

Parâmetros de partida: $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$. Parâmetros após ajuste:

$\alpha = 0.1522$, $\beta = 0.0689$, $\gamma = 0.8569$ e $P_\infty = 254.261$ kg

Simulação 4:

Parâmetros iniciais: $P_\infty = 220.402$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$.

Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.6813$, $\beta = 0.6096$, $\gamma = 0.9794$.

Simulação 5:

Parâmetros de partida: $P_\infty = 220.402$ kg, $\alpha = 0.1276$, $\beta = 0.0306$, $\gamma = 3/4$ (fixo).

Parâmetros após ajuste: $\alpha = 0.1491$, $\beta = 0.0387$.

As respectivas curvas podem ser observadas na Figura 2.

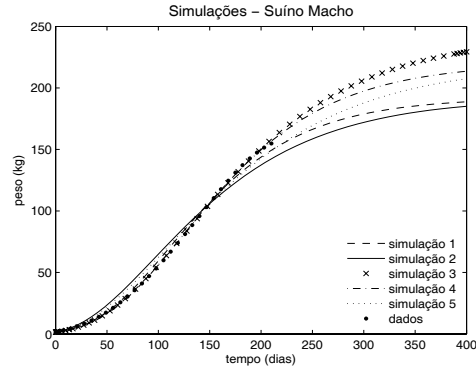


Figura 2: Ajuste da função $P(t)$, solução do modelo de von Bertalanffy generalizado (3.4), aos pares peso-idade de Suíno Macho.

Observando os parâmetros obtidos nas simulações, notamos que o coeficiente de alometria γ tende a ser maior que o valor $3/4$ utilizado por Oliveira quando não é mantido fixo. Os ajustes referentes às simulações 3 e 4 ofereceram menor diferença entre os dados fornecidos e a curva ajustada, sendo este último o que apresentou melhor aproximação, segundo o cálculo do erro. Porém, considerando a interpretação biológica dos resultados, notamos que o ajuste referente à simulação 3 é mais coerente com a realidade, uma vez que β geralmente não assume valores altos, por se tratar do gasto energético do animal.

Utilizando a expressão do parâmetro de metabolismo β (3.7) e os valores de p_∞ e γ estimados pela simulação 3, calculamos a curva de tendência para $\beta(t)$, ilustrada na Figura 3.

O mesmo procedimento foi tomado para cada indivíduo, possibilitando verificar que a conjectura inicial de que haveria um padrão de metabolismo por classe animal não acontece, ocorrendo, inclusive, distinção entre machos e fêmeas de uma mesma espécie, como é o caso do peru. Hipoteticamente, a perda de energia está relacionada com os hábitos de cada animal.

Notamos a ocorrência de tendências no comportamento da curva $\beta(t)$: β diminui com t ; β aumenta com t , depois diminui; β estabiliza com t ; β aumenta com

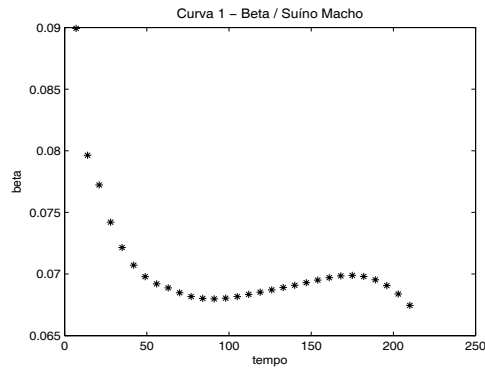


Figura 3: Curva de tendência para $\beta(t)$ de Suíno Macho com os seguintes parâmetros: $P_\infty = 254.2606$ kg e $\gamma = 0.8569$.

t . Geralmente, em animais confinados para engorda a tendência de β é diminuir com o passar do tempo. Outra suposição baseia-se no comportamento de animais semi-confinados, onde a tendência de β é estabilizar com o passar do tempo. Por último, a tendência de β aumentar com t pode estar relacionada com o comportamento referente à animais soltos.

Ao trabalhar com ajuste de curvas em crescimento animal é importante observar a interpretação biológica dos resultados obtidos com o modelo, do contrário estaremos pura e simplesmente fazendo um ajuste de curvas. Devemos procurar obter parâmetros com respaldo biológico, como por exemplo o ponto de inflexão, que no caso, indica o momento a partir do qual o peso começa a estabilizar e a partir de onde procuramos calcular a capacidade suporte.

Nota-se, que pequenas alterações na capacidade suporte causam mudanças significativas nos parâmetros, uma vez que são muito sensíveis a modificações. Os ajustes, em sua maioria, têm melhor resultado quando é fornecido previamente o valor limite p_∞ que o peso pode atingir.

Quando trabalhamos com dados experimentais de crescimento animal nos vemos em situações onde necessitamos estimar o comportamento da curva ao longo da vida de um determinado espécime. Fatalmente, o caminho entre a medida realizada no indivíduo, seja ela em seu peso, comprimento, idade, etc., até a solução obtida com o experimento/simulação a partir dos dados, está repleto de impre-

cisões, por mais cuidado que tenhamos no tratamento destas informações. Como os parâmetros são obtidos através de observações e experimentos seria interessante que pudessem admitir uma "faixa de valores" que considerasse as incertezas presentes no processo de obtenção desta solução.

Para tentar solucionar este problema e tornar plausível a solução obtida através das simulações realizadas, utilizamos como ferramenta de apoio a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, que nos permite trabalhar com as incertezas inerentes à modelagem de maneira razoável.

Considerando o modelo de von Bertalanffy generalizado como um PVI fuzzy, do tipo *fuzziness ambiental* (incerteza nos parâmetros) (Barros e Bassanezi, 2006), aplicamos o princípio de extensão de Zadeh (Zadeh, 1965) à solução determinística obtida através da resolução clássica, obtendo a solução fuzzy.

5. Solução fuzzy do Modelo generalizado

Considerando a solução determinística do modelo de von Bertalanffy generalizado

$$P_t(P_0, \beta, \gamma, P_\infty) = P_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) e^{-\beta(1-\gamma)t} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad (5.1)$$

os α -níveis da solução fuzzy, considerando o caso em que o parâmetro de alometria é fuzzy, são:

$$[\widehat{P}_t(\widehat{\gamma})]^\alpha = P_\infty \left\{ 1 + \left[\left(\left(\frac{P_0}{P_\infty} \right)^{1-[\widehat{\gamma}]^\alpha} - 1 \right) e^{-\beta(1-[\widehat{\gamma}]^\alpha)t} \right] \right\}^{\frac{1}{1-[\widehat{\gamma}]^\alpha}}. \quad (5.2)$$

Retomando a expressão determinística para P_∞

$$P_\infty(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$

podemos observar que considerar qualquer um dos parâmetros α , β ou γ fuzzy é equivalente a tomar P_∞ desta forma, uma vez que são interdependentes.

Nas soluções fuzzy optamos por fuzzificar o parâmetro de alometria, devido ao fato de acreditarmos que por este ser um parâmetro relacionado à área corporal, talvez seja mais coerente que cada espécime possua um valor próprio.

A solução fuzzy obtida pela extensão de Zadeh de (5.1) aplicada à suínos, utilizando $\hat{\gamma} = (0.9787/0.9794/0.9799)$, pode ser vista na Figura 4. Na Figura 5 podemos observar a comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e da solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado.

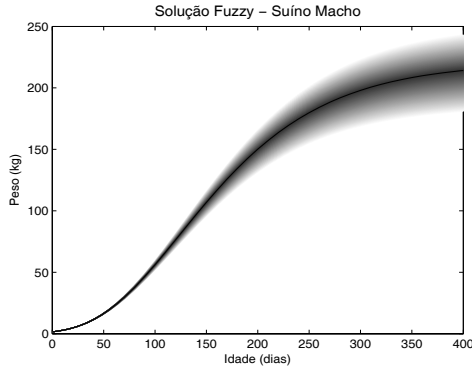


Figura 4: Solução fuzzy do modelo de von Bertalanffy generalizado, com o parâmetro alométrico fuzzy: $\hat{\gamma} = (0.9787/0.9794/0.9799)$.

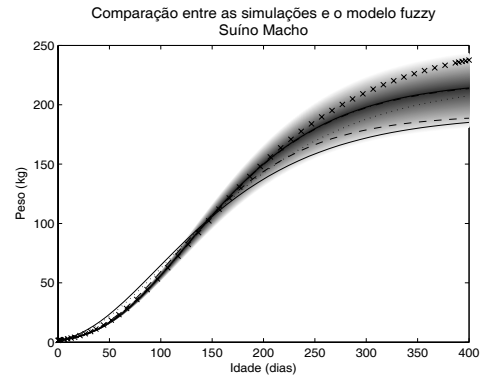


Figura 5: Comparação entre as soluções obtidas através das simulações do modelo clássico e do modelo fuzzy da solução do modelo de von Bertalanffy generalizado.

6. Conclusões

Conforme esperado, o modelo mostrou-se adequado para relacionar peso e idade, principalmente por possuir parâmetros com interpretação biológica, que têm fundamental importância para ressaltar características relevantes do crescimento, como por exemplo o parâmetro de catabolismo β , que mede o gasto energético do animal.

A conjectura inicial de que haveria um padrão metabólico por classe animal não se verificou, porém ao considerarmos β variável em relação ao tempo t no decorrer desta verificação, foi possível estimar o comportamento metabólico individual de cada espécime, bem como notar a ocorrência de tendências em comum para animais de classe distintas.

Conforme podemos observar na Figura 5, a solução fuzzy do modelo estima com graus de pertinência em relação à curva do modelo determinístico, inserindo assim, as variações que de fato ocorrem nos dados reais e no decorrer do processo de modelagem, imprimindo maior confiabilidade à solução obtida.

Uma vez que a qualidade do ajuste de um modelo a uma espécie animal é, entre outros fatores, dependente do número de pares de peso e idade avaliados, do sexo, da raça, do manejo e da idade do animal em que os últimos pesos são obtidos, a expectativa é de que as estimativas de parâmetros obtidas neste trabalho, sejam usadas como valores iniciais em situações específicas daqueles que a utilizarem, bem como em trabalhos futuros.

Referências

- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2006). *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 of *Textos Didáticos*. Coleção IMECC, Campinas/SP.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. Ed. Contexto, S. Paulo.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). *Equações diferenciais com aplicações*. Ed. Harbra, S. Paulo.
- Bertalanffy, L. (1983). A quantitative theory of organic growth. *Human Biology*, 2(10):181–213.
- Chávez, E. A. (1973). Estudio sobre la tasa de crecimiento del camarón blanco (*pennaeus vannamei boone*) de la región sur del golfo de california. *Ciência pesquera*, XXVIII(2):79–85.
- Freitas, A. R. (2007). Estimativas de curvas de crescimento na produção animal. *Embrapa Pecuária Sudeste. Documentos*, 68.
- Guedes, M. H. P., A.Muniz, J., R.O.Perez, J., e Silva, F. F., de Aquino, L. H., e dos Santos, C. L. (2004). Estudo daas curvas de crescimento de cordeiro das raças santa inês e bergamácia considerando heterogeneidade de variâncias. *Ciência e Agrotecnologia*, 28(2):381–388.

- Leite, A. L. F. (2003). Modelagem matemática aplicada ao crescimento em peso de aves de corte. Monografia apresentada para conclusão do Curso de Matemática, UFOP, Ouro Preto/MG.
- Oliveira, L., Brandão, A. J. V., e Bassanezi, R. C. (2007). Modelo de von bertlanffy generalizado aplicado ao crescimento de suínos de corte. *Biomatemática*, 17:101–109.
- Pereira, C. S. (2000). Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça guzerá. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, 35(9):1843–1851.
- Rodrigues, M. L., Lima, S. L., Moura, O. M., Agostinho, C. A., Silva, J. H. V., R.B.Cruz, G., Campos, V. M., Campos, V. M., P.Casali, A., Mendes, R. R. B., e Albuquerque, A. G. (2007). Curva de crescimento em rã-touro na fase de recria. *Archivos de Zootecnia*, 56(214):125–136.
- Walford, L. A. (1976). A new graphic method of describing the growth of animals. *Biological Bulletin*, 90(2):141–147.
- West, G. B., Woodruff, W. H., e Brown, J. H. (2002). Allometric scaling of metabolic rate from molecules and mitochondria to cells and mammals. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United of American*, 99:2473–2478.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353.