

Padrões de Turing em um Sistema Presa-Predador

Luiz Alberto D. Rodrigues,¹ Denilson J. Seidel² & Diomar C. Mistro³
Depto. de Matemática, CCNE – UFSM, Santa Maria/RS.

Resumo. Neste trabalho formulamos um modelo discreto espacialmente estruturado para um sistema presa-predador com efeito Allee fraco para as presas e competição intra-específica para os predadores. O modelo proposto utiliza Redes de Mapas Acoplados, onde o tempo e o espaço são considerados discretos e a variável de estado é contínua. Através de simulações verificamos que o modelo produz padrões espaciais heterogêneos estáveis quando o estado de equilíbrio homogêneo é perturbado.

Palavras-chave: *Formação de Padrões; Redes de Mapas Acoplados; Efeito Allee.*

1. Introdução

O problema de formação de estruturas espaciais heterogêneas a partir de um sistema inicialmente homogêneo, sem qualquer interferência do meio ambiente, foi estudado na década de 50 por Alan Turing (Turing, 1952). Embora o trabalho de Turing tenha sido apresentado no contexto da morfogênese, sua aplicabilidade e implicações são amplamente difundidas (Murray, 1993). Em sistemas ecológicos, estruturas regulares de diferentes tipos podem ser identificadas pois, em geral, as distribuições espaciais de indivíduos tendem a ser altamente heterogêneas. Os ingredientes essenciais considerados por Turing na formação de padrões são as interações entre as espécies e a difusão. Concluiu que, sob certas condições bem definidas, interações não lineares junto com difusão podem gerar estruturas espaciais complexas.

L. A. Segel e J. L. Jackson (Segel e Jackson, 1972) foram os primeiros a demonstrar que padrões podem ocorrer em Ecologia via instabilidade difusiva, estabelecendo uma analogia entre substâncias químicas que reagem e espécies que interagem em certos sistemas presa-predador.

¹luizdiaz@smail.ufsm.br

²denilsonjose@zipmail.com.br

³dcmistro@gmail.com

Em 1931, o ecologista Warder Clyde Allee chamou a atenção para o fato de algumas populações serem afetadas por uma relação positiva entre a taxa de crescimento e a densidade populacional. Em outras palavras, à medida que a densidade populacional aumenta, a sobrevivência e a taxa de reprodução também crescem (Wang e Kot, 2001).

Os modelos em dinâmica populacional, em geral, consideram o fator de crescimento como uma função decrescente da densidade da população. Esta dependência negativa da densidade justifica-se pela competição intra-específica. No entanto, esta hipótese pode não ser adequada em determinados casos. Se a população é muito pequena não há razão para que ocorra a competição por espaço e nutrientes. Assim, é razoável considerar, para densidades populacionais muito pequenas, o fator de crescimento como uma função crescente da densidade populacional. Este mecanismo é conhecido como efeito Allee (Wang e Kot, 2001).

Rodrigues et al. (2006) analisaram a formação de padrões espaciais em um sistema presa-predador com efeito Allee forte para as presas. Padrões espaciais heterogêneos foram obtidos para perturbações abaixo da densidade limiar do efeito Allee, o que indica que os padrões obtidos neste modelo não são gerados pelo mecanismo de Turing.

Neste trabalho propomos um modelo discreto equivalente ao modelo contínuo analisado por Segel e Jackson (1972). Consideramos um sistema presa-predador com efeito Allee fraco para as presas e mortalidade devido à competição intra-específica para os predadores.

2. Modelo presa-predador espacialmente estruturado

O modelo proposto é um reticulado de mapas acoplados (“Coupled Map Lattice”). O estado do sistema é descrito por uma matriz ou, de maneira equivalente, atribuindo valores para a densidade populacional em cada vértice de um reticulado plano. A dinâmica do modelo é composta por dois estágios distintos: uma fase de dispersão e uma fase de interação.

A cada geração, uma fração μ_N da população de presas e uma fração μ_P da população de predadores abandona seu sítio para colonizar equitativamente os quatro sítios mais próximos. As equações para a migração são expressas por:

$$N'_{i,j} = (1 - \mu_N)N_{i,j}^t + \sum_{(s,w) \in V_{i,j}} \frac{\mu_N}{4} N_{s,w}^t, \quad (2.1)$$

$$P'_{i,j} = (1 - \mu_P)P_{i,j}^t + \sum_{(s,w) \in V_{i,j}} \frac{\mu_P}{4} P_{s,w}^t, \quad (2.2)$$

onde $N_{i,j}^t$ e $P_{i,j}^t$ são as densidades populacionais das presas e predadores, respectivamente, no sítio (i, j) e no instante t , $N'_{i,j}$ e $P'_{i,j}$ representam as densidades populacionais após a movimentação e $V_{i,j} = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\}$ é a vizinhança do sítio (i, j) .

As equações que descrevem o processo de interação entre as espécies dentro de cada sítio são dadas pelo seguinte sistema de equações a diferenças adimensional:

$$N_{i,j}^{t+1} = \frac{(N'_{i,j})^2 + rN'_{i,j}}{1 + b(N'_{i,j})^2} \exp(-P'_{i,j}), \quad (2.3)$$

$$P_{i,j}^{t+1} = P'_{i,j} \exp \left[cN'_{i,j} - m(P'_{i,j})^2 \right]. \quad (2.4)$$

A dinâmica vital das presas no sistema (2.3) e (2.4), exibe um Efeito Allee fraco ($r > 1$) na ausência de predadores ($P = 0$), a qual é descrita pela função $f(N) = \frac{N^2 + rN}{1 + bN^2}$. O Efeito Allee forte ($r < 1$) introduz um limiar populacional: a população de presas precisa ultrapassar este limiar para crescer; abaixo dele, a população irá à extinção. Para o efeito Allee fraco não há limiar de extinção. A população mostra um fator de crescimento pequeno para baixas densidades populacionais. Este efeito pode surgir de uma baixa eficiência em procurar alimentos ou parceiros em baixas densidades (Wang e Kot, 2001). A dinâmica dos predadores inclui, além de crescimento dependente da densidade de presas representado pelo fator $\exp(cN)$, um fator de combate, isto é, competição intra-específica descrito por $\exp(-mP^2)$. Observamos que a competição é pequena para densidades baixas de predadores.

A solução de equilíbrio não trivial do modelo presa-predador sem dispersão, é dada implicitamente por

$$(N^*, P^*) = \left(\frac{m}{c} (P^*)^2, \ln \left[\frac{N^* + r}{1 + b(N^*)^2} \right] \right). \quad (2.5)$$

A idéia de Turing é simples: na ausência da difusão, N e P apresentam um estado de equilíbrio uniforme linearmente estável a pequenas perturbações. Quando a difusão está presente, o estado de equilíbrio uniforme torna-se instável a pequenas perturbações espaciais que podem conduzir a padrões espaciais heterogêneos fixos. Este mecanismo é conhecido como instabilidade difusiva.

3. Simulações

Com o intuito de verificar se há formação de padrões espaciais, consideramos um habitat de 50×50 sítios, com condições de fronteira reflexivas. A configuração inicial constitui-se de uma pequena perturbação na distribuição uniforme de ambas as populações correspondente ao valor de equilíbrio não-trivial sem dispersão (N^*, P^*) , obtido numericamente para cada conjunto de parâmetros escolhido. Além disso, para todas as simulações realizadas, o número de iterações é escolhido de forma a garantir que um novo estado de equilíbrio estável seja alcançado.

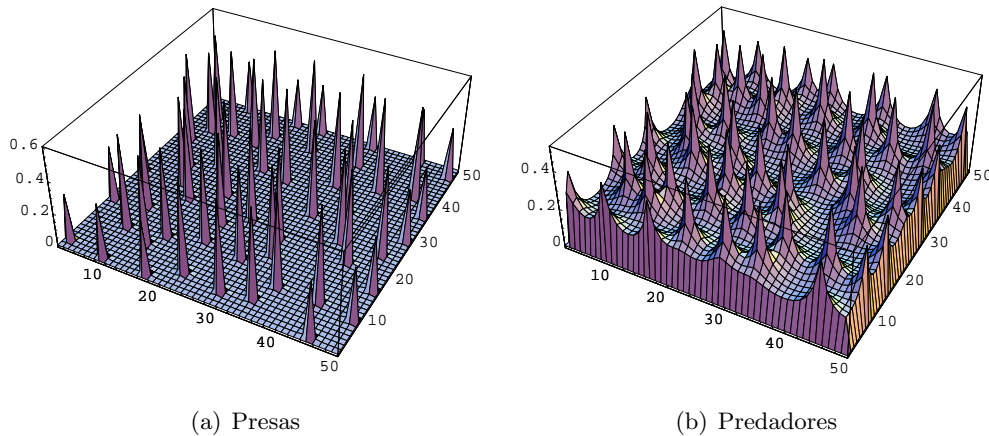


Figura 1: Densidade Populacional (a) de presas e (b) de predadores.

As figuras 1-3 ilustram os resultados da simulação com os parâmetros $r = 1, 15$, $b = 0, 8$, $c = 1$ e $m = 0, 5$. As taxas de movimentação, neste caso, foram $\mu_N = 0, 01$ e $\mu_P = 0, 95$, de modo que a movimentação do predador seja muito mais rápida do que a da presa (Holmes et al., 1994). A figura 1 mostra a densidade de presas e predadores após o novo equilíbrio ter sido alcançado, podemos observar que presas

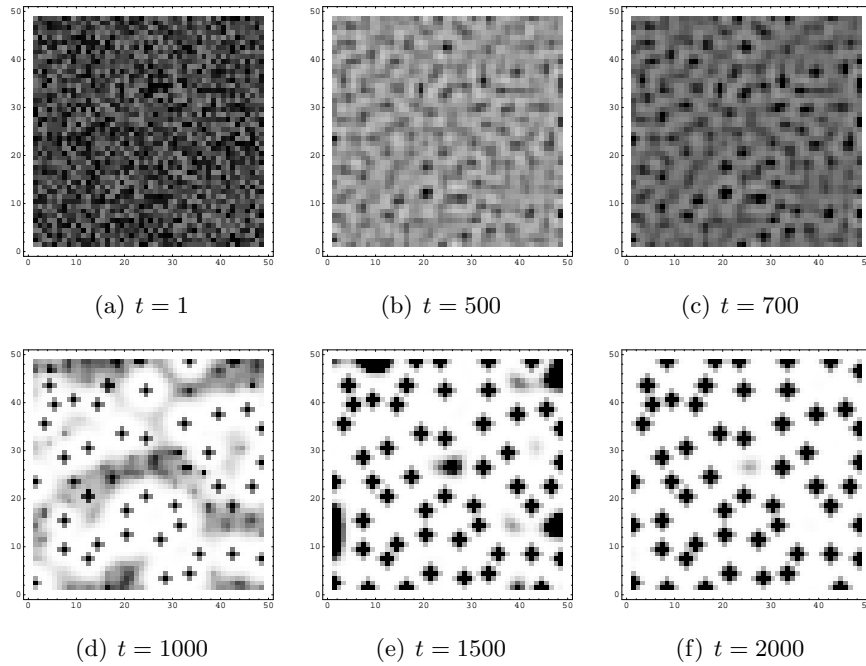


Figura 2: Distribuição espacial de presas em diferentes instantes de tempo.

concentram-se em determinadas regiões do habitat enquanto os predadores estão distribuídos por todo o domínio, apresentando picos de concentração nas regiões de maior densidade das presas. Na figura 2, estão ilustradas a distribuição espacial das presas em diferentes tempos e, na figura 3 a população total de presas e predadores. Há um aumento na população total de predadores enquanto que a população total de presas permanece aproximadamente no valor de equilíbrio.

A figura 4 ilustra o padrão espacial heterogêneo atingido por presas e predadores após a distribuição homogênea ter sido perturbada, para os parâmetros $r = 1, 2$, $b = 0, 5$, $c = 0, 2$, $m = 0, 5$ sendo, (a) com $\mu_N = 0, 1$ e $\mu_P = 0, 95$ e, (b) $\mu_N = 0$ e $\mu_P = 0, 95$. O padrão final depende, além dos parâmetros dinâmicos, das taxas de movimentação dos indivíduos. Taxas de movimentação muito baixas para as presas podem promover sua exclusão de determinadas regiões, como observado em Fig. 4(c).

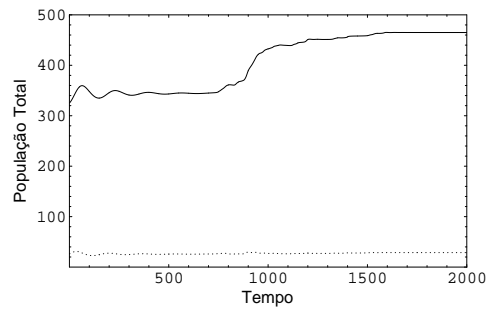


Figura 3: População total de presas (curva pontilhada) e de predadores (curva contínua).

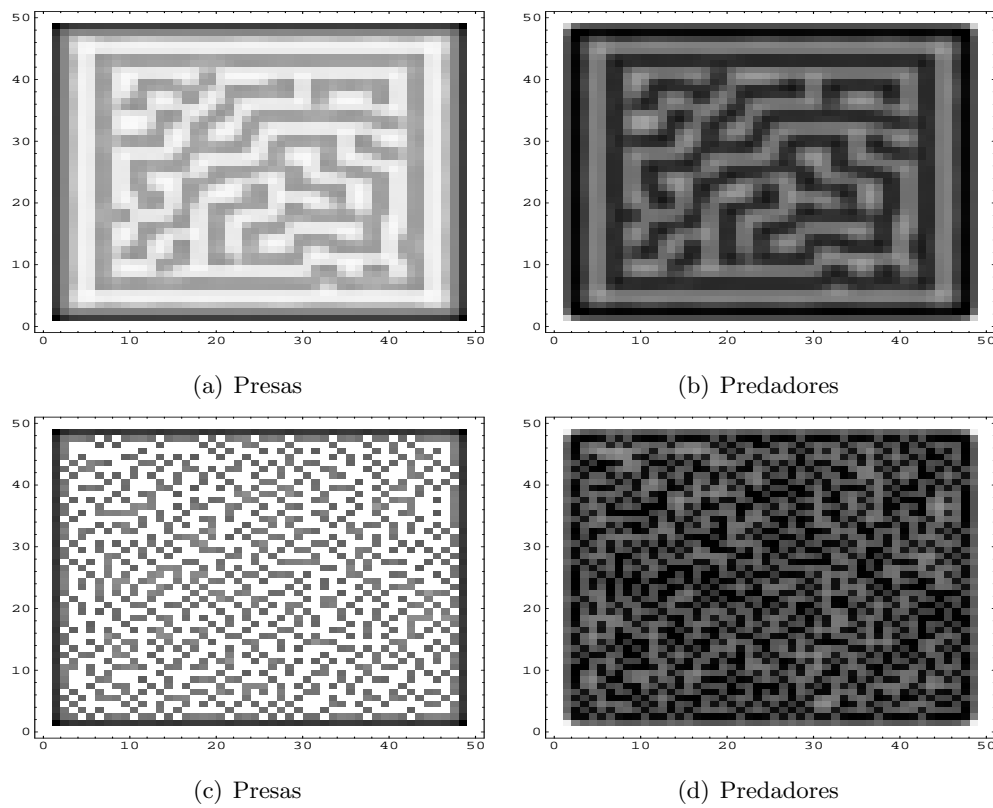


Figura 4: Distribuição espacial heterogênea de presas ((a) e (c)) e de predadores((b) e (d)).

4. Conclusões

Neste trabalho foi construído um modelo presa-predador, espacialmente estruturado, com Efeito Allee fraco para as presas e competição intra-específica para os predadores, utilizando Redes de Mapas Acoplados.

Os resultados obtidos sugerem que pequenas perturbações locais nas populações de presas e predadores podem ocasionar formação de diferentes padrões espaciais heterogêneos fixos do tipo Turing. O padrão resultante depende dos parâmetros dinâmicos e das taxas de movimentação. As duas espécies podem coexistir formando regiões de alta concentração de ambas espécies alternadas com regiões de baixas concentrações e pode ocorrer também a extinção das presas em determinadas regiões do habitat onde apenas os predadores persistem. Observamos que os picos de concentração das presas são mais pronunciados que dos predadores. Estes resultados alertam para o perigo de extinção de espécies que apresentam efeito Allee fraco. Uma pequena redução da população de presas, pode confiná-las a determinadas regiões. Neste cenário, sua mobilidade é um fator determinante. Taxas de movimentação suficientemente altas para as presas permitem que as regiões com baixas densidades possam ser recolonizadas havendo ou não formação de padrões heterogêneos. Estes resultados estão de acordo com os resultados obtidos com modelos contínuos análogos (Okubo e Levin, 2001).

Em trabalhos futuros, pretendemos obter condições analíticas para formação de padrões heterogêneos fixos.

Referências

- Holmes, E. E., Lewis, M. A., Banks, J. E., e Veit, R. R. (1994). Partial differential equations in ecology: Spatial interactions and population dynamics. *Ecology*, 75:17–29.
- Murray, J. D. (1993). *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 2 edition.
- Okubo, A. e Levin, S. (2001). *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*. Springer-Verlag, New York.

- Rodrigues, L. A. D., Seidel, D. J., e Mistro, D. C. (2006). Formação de padrões em um modelo presa-predador discreto. *BIOMATEMÁTICA*, 16:1–13.
- Segel, L. A. e Jackson, J. L. (1972). Dissipative structure: An explanation and an ecological example. *Journal of Theoretical Biology*, 37:545–559.
- Turing, A. M. (1952). The chemical basis of morphogenesis. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, 237(B):37–72.
- Wang, M. H. e Kot, M. (2001). Speeds of invasion in a model with strong or weak allee effects. *Math. Biosci.*, 171:83–97.