

Um modelo diferencial de recrutamento de formigas

Raul Abreu de Assis¹

Luciana Mafalda Elias de Assis²

Dep. de Matemática, UNEMAT, 78390-000 – Barra do Bugres/MT.

Resumo. Neste trabalho apresentamos um sistema de equações diferenciais para modelar o comportamento de recrutamento de formigas. É apresentada a análise de estabilidade sistema linearizado.

Palavras-chave: *Recrutamento; Modelagem; Colônia de Formigas; Fuzzy; Equações Estocásticas;*

1 Introdução

Desconsiderando as aplicações em robótica, otimização e inteligência artificial, ainda assim o estudo de sistemas auto-organizados estaria justificado pela curiosidade científica e o senso de estética. Desvendar quais são os mecanismos reguladores da ordem em sistemas complexos pode ser desafiador e elucidativo.

Como as formigas escolhem uma rota? Como os cupins se organizam para construir seu ninho? Como os insetos sociais com um repertório de comportamentos sociais relativamente simples, podem atingir uma organização tão perfeita de maneira a responder de forma coletiva às variações de clima, demanda de comida, ameaça de predadores e outros fatores inesperados?

Modelos matemáticos desempenham um papel fundamental no entendimento desses fenômenos. Com eles, podemos fazer hipóteses simples e simular ou analisar o comportamento do sistema sob essas hipóteses. A criação de modelos para o comportamento de insetos sociais possibilitou, por exemplo, a criação de novos algoritmos de otimização e roteamento de dados (Bonabeau et al., 1999).

Neste trabalho, apresentamos um modelo de equações diferenciais para o experimento da ponte binária (Denebourg et al., 1989; Bonabeau et al., 1999), um

¹raulassis@yahoo.com

²lucianabbg@unemat.br

experimento pioneiro que foi capaz de isolar os principais mecanismos pelos quais uma colônia de formigas é capaz de efetuar escolhas de caminho “inteligentes”. Aqui, escolha “inteligente” é para ser entendida como a melhor sob um determinado parâmetro, isto é, caminho de menor comprimento, fonte de alimento de melhor qualidade, *etc.*

2 O modelo

O experimento da ponte binária consiste basicamente de uma montagem experimental em que se oferecem dois caminhos a uma colônia de formigas, variando-se as condições experimentais. Nas diferentes montagens, pode-se variar o comprimento de cada caminho, a qualidade da fonte em cada caminho, *etc.* Esquemas de exemplos de montagens são apresentadas na figura 1. O experimento é descrito em detalhe em (Denebourg et al., 1989; Bonabeau et al., 1999).

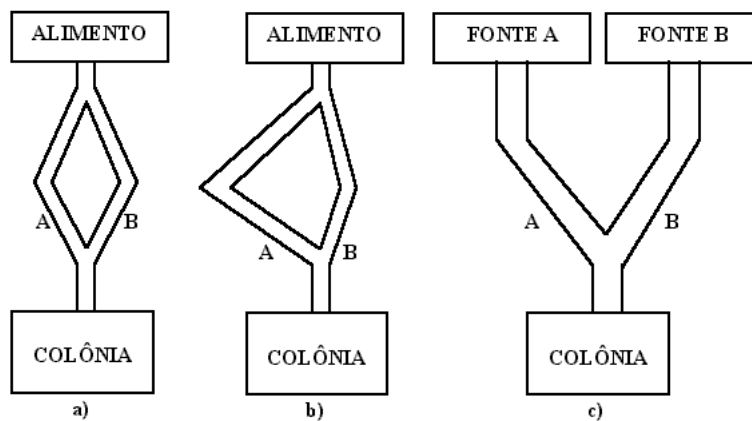


Figura 1: Esquemas de montagem para o experimento da ponte binária. a) dois ramos de mesmo comprimento. b) ramos de comprimentos distintos. c) ramos de mesmo comprimento e fontes de qualidades distintas.

Várias espécies de formigas utilizam uma substância química para se orientar, denominada *feromônio* Hölldobler e Wilson (1990). Definindo f_A como a quantidade de feromônio no ramo A e f_B a quantidade no ramo B , temos que quanto maior

for a diferença *relativa* entre f_A e f_B , maior será a chance das formigas escolherem trafegar pelo ramo A . Uma forma de modelar essa probabilidade é simplesmente tomar:

$$P_A(f_A, f_B) = \frac{(f_A + k)^n}{(f_A + k)^n + (f_B + k)^n} \quad (2.1)$$

onde k é um parâmetro que representa um limiar de comparação com um ramo não marcado por feromônio, (isto é, se a quantidade de feromônio em um ramo ultrapassar k , ele pode ser considerado significativamente atrator com relação a um ramo não-marcado) e n é um parâmetro que representa a sensibilidade das formigas.

O resultados de simulações de Monte Carlo utilizando essa função para modelar a escolha de ramo pelos agentes levaram a resultados coerentes com as observações experimentais (Denebourg et al., 1989; Assis, 2003; Assis e Jr., 2003). Para modelar o sistema utilizando equações diferenciais, tomaremos como variáveis dependentes do tempo as quantidades de feromônio em cada ramo: x correspondendo ao ramo A e y correspondendo ao ramo B .

Faremos então as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. a quantidade de feromônio em cada ramo decai exponencialmente na ausência de depósito.
2. existe um fluxo constante F de agentes por unidade de tempo realizando a escolha entre os ramos A e B
3. a cada ramo corresponde uma taxa de depósito por agente que pode variar de acordo com as condições do experimento. α é quantidade de depósito de feromônio por agente no ramo A , β quantidade de depósito por agente no ramo B

Com relação ao item 3, os coeficientes podem variar por duas razões: qualidade da fonte de alimento e comprimento do ramo. No caso da qualidade da fonte, existem evidências (Sudd e Franks, 1987) que espécies de formigas podem modular a quantidade de feromônio depositado em função da riqueza da fonte. Com relação ao comprimento, temos que se um ramo é mais comprido que o outro, então a taxa de depósito médio no ramo mais curto, para quantidades iguais de feromônio em cada ramo, é maior que no ramo mais longo, pois os agentes completam seu percurso mais

rapidamente. Uma forma de representar esse fator é aumentando a taxa de depósito por agente em cada ramo, na seção 4, mostramos que, de fato, uma modelagem levando em conta o comprimento dos ramos é análoga à variação dos parâmetros α e β . Assim, as quantidades α e β são uma representação da “qualidade” (levando-se em conta comprimento e/ou qualidade de fonte) dos ramos A e B , respectivamente.

Para modelar a dinâmica do sistema, sugerimos as equações:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \alpha F - \lambda x \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y^2}{x^2 + y^2} \beta F - \lambda y\end{aligned}\tag{2.2}$$

Note que nos primeiros termos das equações do sistema 2.2, acima temos termos na forma $\frac{x^2}{x^2 + y^2} \alpha F$, que representa a fração do tráfego que flui pelo ramo A vezes o fluxo F de agentes multiplicado pela quantidade de feromônio depositado por agente no ramo A . A soma das frações do tráfego que flui sobre os ramos é sempre um, como pode ser visto facilmente. Existem outras formas de se modelar a distribuição do tráfego em resposta às quantidades de feromônio. Se p_A representa a fração do tráfego que flui pelo ramo A , dadas a quantidades x e y de feromônio em cada ramo, utilizando a forma geral

$$p_A(x, y) = \frac{x^n}{x^n + y^n}$$

temos que existe uma mudança crítica de comportamento para $n = 1$, enquanto para todos os valores maiores que um o comportamento é similar ao de $n = 2$. Dessa forma, analisaremos o caso $n = 2$ ciente de que ele representa uma ampla classe de respostas de distribuição de tráfego em função da quantidade de feromônio em cada ramo. A análise da mudança de comportamento para $n = 1$ fica reservada para trabalhos futuros.

Utilizando a adimensionalização $x^* = x/\alpha$, $y^* = y/\alpha$ e $t^* = \lambda t$ e retirando os asteriscos, ficamos com o seguinte sistema adimensionalizado:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} f - x \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y^2}{x^2 + y^2} \gamma f - y\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde $f = F/\lambda$ é um parâmetro adimensional que representa o fluxo e $\gamma = \beta/\alpha$ representa a proporção de depósito por agente entre o ramo B e o ramo A . Dessa

forma, γ representa a relação de qualidade entre os ramos B e A , por exemplo, $\gamma = 1/2$ representa que A é melhor que B , $\gamma = 2$ representa B melhor que A e $\gamma = 1$ representa ramos de igual qualidade.

Por hora apenas observaremos que o sistema possui uma singularidade na origem. Na verdade, mostraremos mais adiante que essa singularidade não apresenta obstáculo para os propósitos do modelo, podendo ser corrigida e também porque ela deixa de existir para pontos arbitrariamente próximos da origem.

O pontos de equilíbrio do sistema são $(x_0, y_0) = (f, 0)$, $(x_1, y_1) = (0, \gamma f)$ e $(x_2, y_2) = \left(\frac{\gamma^2 f}{\gamma^2 + 1}, \frac{\gamma f}{\gamma^2 + 1}\right)$. Para encontrar o último ponto estacionário, basta observar que, para $x = \gamma y$, temos que $\frac{dy}{dx} = 1/\gamma$, de onde temos uma trajetória em linha reta sobre a reta $x = \gamma y$ e $y(t)$ satisfaz a equação:

$$\dot{y} = \frac{\gamma f}{\gamma^2 + 1} - y \quad (2.4)$$

de onde extraímos o ponto estacionário (x_2, y_2) e também observamos que o ponto é atrator sobre essa reta. Da solução $y(t) = \frac{\gamma f}{\gamma^2 + 1} - y_0 e^{-t}$ temos que um dos autovalores do sistema linearizado no ponto (x_2, y_2) é -1 . Na figura 2 apresentamos um plano de fase em que $\gamma = 1$ e $f = 1$.

A análise de estabilidade dos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é trivial e mostram que ambos são estáveis com autovalor -1 com multiplicidade 2 em ambos casos. Para o ponto (x_2, y_2) já sabemos que um dos autovalores é igual a -1 . Se tomamos $y = \gamma(f - x)$, temos que:

$$\dot{y} = \frac{f\gamma^3(f-x)^2}{x^2 + \gamma^2(f-x)^2} - \gamma(f-x) = -\gamma\dot{x}$$

de onde temos novamente uma trajetória em linha reta, conforme indicado pelo plano de fase da figura 2.

Escrevendo a equação para \dot{x} , ficamos com:

$$\dot{x} = \frac{x^2}{x^2 + \gamma^2(f-x)^2} - x = \frac{x(f-x)(x-x_2)}{(x^2 + \gamma^2(f-x)^2)(\gamma^2 + 1)} = h(x) \quad (2.5)$$

com $x_2 = g^2 f / (g^2 + 1)$, a coordenada x do ponto estacionário (x_2, y_2) . Da equação 2.5, acima, determinamos os pontos estacionários de x sobre a reta $y = \gamma(f - x)$,

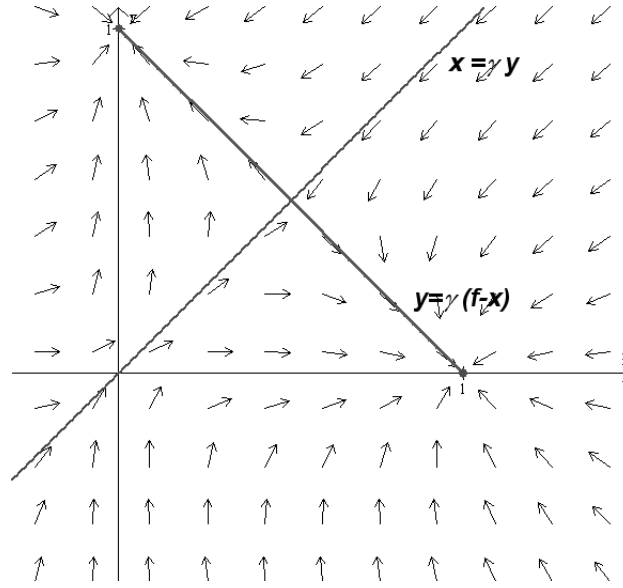


Figura 2: Plano de fase para o sistema 2.3. A separatriz $x = \gamma y$, determina a região atratora dos ramos A e B .

$x = 0, x = f$ e $x = x_2$. Observando que $x_2 < f$ e analisando o sinal da função $h(x)$, temos que:

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow h(x) > 0 \\ 0 < x < x_2 \Rightarrow h(x) < 0 \\ x_2 < x < f \Rightarrow h(x) > 0 \\ f < x \Rightarrow h(x) > 0 \end{cases}$$

Pelas relações de sinal acima, temos que $x = 0$ é estável, $x = x_2$ é instável e $x = f$ é estável. Logo, o ponto estacionário (x_2, y_2) é ponto de sela, independentemente dos valores de f e γ .

Interpretando biologicamente esses resultados, temos que o ponto $(f, 0)$, representa a escolha da colônia pelo ramo A e sua estabilidade significa que mesmo que uns poucos indivíduos errem o caminho, a escolha permanece estável. Analogamente, o ponto $(0, \gamma f)$ representa a escolha do ramo B . O ponto instável, $(x_2, y_2) = \left(\frac{\gamma^2 f}{\gamma^2 + 1}, \frac{\gamma f}{\gamma^2 + 1}\right)$ representa uma distribuição do tráfego entre os ramos (por exemplo, se $\gamma = 1$, então teríamos 50% de tráfego em cada ramo), a instabilidade desse ponto significa que a colônia acaba por escolher apenas *um* dos ramos, concentrando o

seu tráfego. Em particular, para a espécie do experimento da ponte binária, *Linepithema humile*, isso é exatamente o que acontece, prevalecendo o tráfego sobre um único ramo (Denebourg et al., 1989).

O parâmetro adimensional γ controla a inclinação da separatriz $x = \gamma y$, portanto, regulando a região atratora de cada um dos pontos que representam a escolha do ramo A ou B . Na figura 3 esboçamos um plano de fase com $\gamma = 2$, representando a situação em que o ramo B tem maior qualidade que o ramo A , note como a região atratora do ramo B aumenta em relação a região do ramo A .

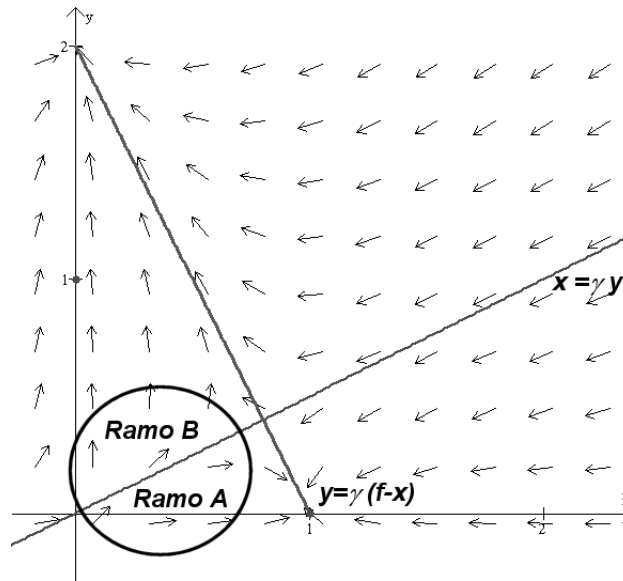


Figura 3: Plano de fase para o sistema 2.3 com $\gamma = 2$ e $f = 1$. No início do processo o fator aleatório predomina sobre a escolha dos ramos, fazendo com que a condição inicial para o sistema seja representada por uma região.

Dessa forma, como durante o início do processo de distribuição do tráfego o fator aleatório ainda predomina sobre a marcação com feromônio, o tamanho da região atratora determina a probabilidade de escolha de cada ramo. Para representar matematicamente essa idéia, poderíamos adotar uma condição inicial estocástica e analisar a evolução dessa condição inicial, resultando em probabilidades de convergência para os ramos.

Essa abordagem fica reservada para trabalhos futuros, e indicamos a possibil-

idade de utilizarmos também uma modelagem de condições iniciais *fuzzy*.

3 Removendo a singularidade

A função utilizada pelos autores no experimento original da ponte binária Denebourg et al. (1989) para modelar a probabilidade de escolha do ramo A pelo agente, dadas as quantidades f_A e f_B nos ramos A e B , respectivamente, foi:

$$P_A = \frac{(f_A + k)^n}{(f_A + k)^n + (f_B + k)^n}$$

Dessa forma, podemos modelar o fluxo médio de agentes em cada ramo por fP_A e fP_B , resultando no sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{(x+k)^2}{(x+k)^2 + (y+k)^2} f - x \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{(x+k)^2}{(x+k)^2 + (y+k)^2} \gamma f - y \end{aligned} \quad (3.6)$$

observe que, quando $k = 0$, obtemos o sistema 2.2. O que desejamos mostrar é que o comportamento do sistema 3.6 é qualitativamente idêntico ao do sistema 2.3 quando $k \approx 0$. Isto é, para remover a singularidade do sistema original, basta realizar uma pequena perturbação.

Para perceber isso, observamos, em primeiro lugar, que se (x^*, y^*) é um ponto estacionário, então (multiplicando a primeira equação por γ e somando-se a segunda) $y^* = \gamma(f - x^*)$. Logo, a existência de pontos estacionários está restrita à essa reta. Observe que o ponto de singularidade do sistema original está removido e não é ponto estacionário.

Além disso, temos que se $y = \gamma(f - x)$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\gamma$, de onde a trajetória que tenha como ponto inicial qualquer ponto sobre essa reta permanece sobre ela. Dessa forma, obtemos uma equação diferencial somente em x :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(x+k)^2 f}{(\gamma(f-x) + k)^2 + (x+k)^2} - x$$

e essa equação pode ser escrita como $\dot{x} = h(x)/s(x)$, onde:

$$h(x) = -x(F-x)(\gamma^2 f - x\gamma^2 - x) - 2x(\gamma-1)(f-x)k + (f-2x)k^2 \quad (3.7)$$

e

$$s(x) = (\gamma(f - x) + k)^2 + (x + k)^2; \quad (3.8)$$

Como $s(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, os pontos estacionários sobre a reta $y = \gamma(f - x)$ são definidos pelos zeros da função $h(x)$. Sabemos que, para $k = 0$, temos as seguintes raízes: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1}$ e $x_2 = f$. Na verdade, como k é um parâmetro variável, podemos olhar a função h como uma função de duas variáveis $p(x, k)$, contínua, pois é polinomial em ambas variáveis.

Na verdade, a continuidade de $p(x, k)$ já nos dá a idéia de que as raízes de $p(x, k) = 0$ dependerão continuamente dos parâmetros dessa função, de forma que uma pequena perturbação em k leva a uma pequena perturbação na localização das raízes (supondo que as mesmas existam para um certo valor de k). Entretanto, como existem bifurcações, surgimento de raízes e desaparecimento de raízes conforme k ultrapassa certos valores críticos, a seguir demonstramos rigorosamente a existência de um k para o qual os pontos estacionários do sistema original estão tão próximos quanto o do sistema 3.6 quanto se queira. Na figura 4 esboçamos a idéia da demonstração.

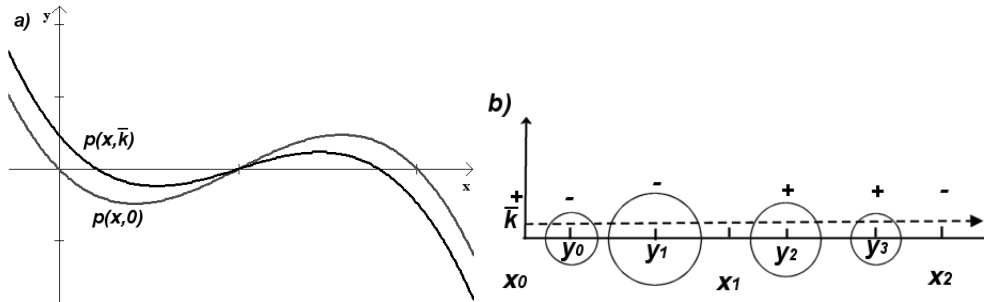


Figura 4: a) Gráfico dos polinômios $p(x, 0)$ e $p(x, \bar{k})$. Uma pequena perturbação em k leva a um pequeno deslocamento dos pontos estacionários, sem alterar sua estabilidade. b) Esquema para a construção da demonstração, toma-se o menor dos raios para a construção de \bar{k} .

A função $p(x, k)$ é contínua em ambas variáveis e sabemos que:

$$\begin{cases} p(x_0, 0) = p(x_1, 0) = p(x_2, 0) = 0 \\ p(x, 0) < 0 \text{ se } x \in (x_0, x_1) \\ p(x, 0) > 0 \text{ se } x \in (x_1, x_2) \end{cases} \quad (3.9)$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, sejam $y_0 \in (x_0, x_1)$ t.q. $|x_0 - y_0| < \epsilon$, $y_1 \in (x_0, x_1)$ t.q. $|x_1 - y_1| < \epsilon$, $y_2 \in (x_1, x_2)$ t.q. $|x_1 - y_2| < \epsilon$ e $y_3 \in (x_1, x_2)$ t.q. $|x_2 - y_3| < \epsilon$. Por 3.9 e pela continuidade de $p(x, k)$, temos que existem $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ positivos tais que:

$$\begin{cases} \|(x, k) - (y_0, 0)\| < \delta_0 \Rightarrow p(x, k) < 0 \\ \|(x, k) - (y_1, 0)\| < \delta_1 \Rightarrow p(x, k) < 0 \\ \|(x, k) - (y_2, 0)\| < \delta_2 \Rightarrow p(x, k) > 0 \\ \|(x, k) - (y_3, 0)\| < \delta_3 \Rightarrow p(x, k) > 0 \end{cases}$$

Assim, tomando $\bar{k} < \delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, temos que:

1. $p(x_0, \bar{k}) > 0$, pois $\frac{\partial p}{\partial k} \Big|_{(x_0, 0)} = 0$ e $\frac{\partial^2 p}{\partial k^2} \Big|_{(x_0, 0)} = f > 0$
2. $p(y_i, \bar{k}) < 0$, pois $\|(y_i, \bar{k}) - (y_i, 0)\| < \delta$, $i = 0, 1, 2, 3$
3. $p(x_2, \bar{k}) < 0$, pois $\frac{\partial p}{\partial k} \Big|_{(x_2, 0)} = 0$ e $\frac{\partial^2 p}{\partial k^2} \Big|_{(x_2, 0)} = -f < 0$.

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, concluímos que, para, para $k = \bar{k}$, existem três pontos estacionários para $h(x)$, $x_0^* \in (x_0, y_0)$, $x_1^* \in (y_1, y_2)$ e $x_2^* \in (y_3, x_2)$. Pela preservação de sinal, a estabilidade dos pontos de é mesma que do sistema original, isto é, x_0^* e x_2^* são estáveis e x_1^* é instável. Dessa forma, o sistema é qualitativamente idêntico ao sistema 2.3 original.

4 Modelando Comprimentos distintos

Na seção 2, nos referimos à situação em que temos ramos de comprimento distintos, afirmando que poderíamos adotar o mesmo modelo variando-se os parâmetros α e β para representar a diferença de comprimento.

Como vamos levar em conta o comprimento de cada ramo, a quantidade absoluta de feromônio em cada ramo já não é adequada para modelar as probabilidades de escolha do caminho pelos agentes, uma vez que a mesma quantidade em uma ramo mais comprido, representa uma *densidade* menor. Assim, as variáveis x e y representam agora a *densidade* de feromônio em cada ramo.

As taxas de variação \dot{x}, \dot{y} são dadas pelo fator de evaporação e pelo acréscimo de feromônio no ramo, dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} F(\alpha/C_A) - \lambda x \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y^2}{x^2 + y^2} F(\beta/C_B) - \lambda y\end{aligned}\tag{4.10}$$

onde F é o fluxo constante de agentes, α a quantidade de feromônio depositada por agente no ramo A e C_A o comprimento do ramo A . Fazendo $a = \alpha/C_A$ e $b = \beta/C_B$, temos que o sistema adimensionalizado resultante será exatamente do tipo 2.3.

Dessa forma, podemos encarar o parâmetro γ como um “medida” da qualidade do ramo, que leva tanto em conta a qualidade da fonte quanto o comprimento do ramo.

5 Agradecimentos

Agradecemos a Geraldo Lúcio Diniz, pelo incentivo à publicação e a Rodney Carlos Bassanezi pela fecunda troca de idéias.

Referências

- Assis, R. A. (2003). Modelos em estratégias de forrageamento de formigas. Master’s thesis, IMECC – Unicamp.
- Assis, R. A. e Jr., W. C. F. (2003). Um modelo computacional de recrutamento de formigas. *Biomatemática*, 13:21–31.
- Bonabeau, E., Dorigo, M., e Theraulaz, G. (1999). *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*. Oxford University Press, Oxford, UK.
- Denebourg, J. L., Goss, S., Franks, N., e Pasteels, J. M. (1989). The blind leading the blind: modeling chemically mediated army ant raid patterns. *J. of Insect Behavior*, 2:719–725.
- Hölldobler, B. e Wilson, E. O. (1990). *The Ants*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, USA.

Sudd, J. H. e Franks, N. R. (1987). *The Behavioural Ecology of Ants*. Chapman and Hall, Cambridge, Massachusetts, USA.