

# Programação matemática *fuzzy* aplicada a problemas de poluição do ar

Luiza A. Pinto Cantão<sup>1</sup>,

Depto. de Eng. Ambiental, UNESP, Av. Três de Março nº 511, 18087-180,  
Sorocaba/SP.

Renato F. Cantão<sup>2</sup>,

Thorus Scisoft, Estrada Telebrás/UNICAMP km 97, 13081-970, Campinas/SP.

**Resumo.** Neste trabalho apresentamos o uso de um problema de Programação Matemática Fuzzy como ferramenta para avaliação de cenários relacionados à políticas de controle de poluição do ar. A técnica apresentada foi aplicada com dados sintéticos à cidade de Sorocaba.

**Palavras-chave:** Programação Matemática; Teoria Fuzzy; Poluição do Ar.

## 1. Introdução

Em CETESB (2005), CETESB (2006), CETESB (2007) e Muramoto et al. (2004), caracterizam-se ultrapassagens dos limites legais de ozônio\* na região de Sorocaba, fazendo com que sua região urbana fosse a primeira em uma cidade do interior do Estado de São Paulo a ser estudada de maneira abrangente pela CETESB (Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental).

Este fato, unido a um perfil industrial bastante diversificado, uma população de 500.000 habitantes, uma taxa de urbanização de 98.53% e uma frota composta por cerca de 230.000 veículos automotores<sup>†</sup> tornam Sorocaba uma escolha atraente para este tipo de modelagem.

---

<sup>1</sup>luiza@sorocaba.unesp.br

<sup>2</sup>cantao@thorus-scisoft.com.br

\*Poluente secundário, originado de reações físico-químicas envolvendo NO<sub>x</sub> (óxido de nitrogênio) e COVs (compostos orgânicos voláteis).

<sup>†</sup>Junho de 2003, pela PRODESP (Companhia de Processamento de Dados do Estado de São Paulo, [www.prodesp.sp.gov.br](http://www.prodesp.sp.gov.br)).

## 2. Objetivos

Neste contexto, apresentaremos aqui a aplicação do modelo desenvolvido por Sommer e Pollatschek (1978) para a região de Sorocaba – SP. Note-se que o tipo específico de poluente não faz parte da modelagem, pois a finalidade é a de inserir a região de estudo nesta problemática.

Na seção 3 discutiremos a formulação do modelo em Sommer e Pollatschek (1978), na seção 4 o desenvolvimento do exemplo para a região de Sorocaba – SP e os resultados obtidos. Finalmente, na seção 5 as conclusões e trabalhos futuros.

## 3. Metodologia

Um dos aspectos a serem estudados na problemática de poluição do ar são as políticas de controle. No contexto de otimização estas políticas de controle aparecem como um problema de controle de poluição que atenda aos padrões estabelecidos, mas levando em conta os custos associados à implementação destes métodos de controle.

Em Sommer e Pollatschek (1978) esta discussão é apresentada de maneira simples e bastante genérica. Os pontos que devem ser levados em consideração neste tipo de problema são:

- Há uma expressão para cada fonte que forneça a concentração de poluentes em uma determinada localidade geográfica conhecida como *função de transferência*, que depende apenas da fonte e de sua localização;
- A redução na emissão é viável, mas limitada;
- Os padrões de qualidade do ar são fixados pelas fontes reguladoras governamentais e estes **não** podem ser ultrapassados.

Os tópicos listados acima são muito convenientes em modelagem matemática, mas em problemas reais as informações podem ser vagas ou pouco precisas. Assim, o objetivo em Sommer e Pollatschek (1978) é o de introduzir a Programação Matemática Fuzzy para problemas de políticas de poluição do ar.

No exemplo que segue, considera-se:

- Um único tipo de poluente, obtido de várias fontes na área de controle;
- Os padrões de qualidade do ar dados devem ser atingidos em pontos de controle chamados receptores, dentro da área de estudo;
- As condições climáticas são ignoradas neste modelo.

A função de transferência  $s_j$  existe para cada fonte  $j$  ( $j = 1, \dots, J$ ) indicando a concentração de poluentes no nível do solo com coordenadas  $(x_1, x_2)$ . Esta função pode ser generalizada pela função Gaussiana:

$$s_j(x_1, x_2) = \alpha_j e^{-\beta_j}$$

onde  $\alpha_j = \alpha_j(x_1, x_2)$  e  $\beta_j = \beta_j(x_1, x_2)$  são parâmetros conhecidos relacionados a cada fonte poluente. A taxa de concentração em um ponto receptor  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) provocado pela fonte  $j$  é:

$$s_{ij} = s_j(x_1^i, x_2^i)$$

onde  $(x_1^i, x_2^i)$  são coordenadas dos pontos-receptores  $i$ .  $s_{ij}$  são dados estabelecidos e expressam a taxa atual de concentração.

Seja  $E_j \in [0, 1]$  a variável de decisão que indica a redução do poluente na fonte  $j$ , assim:

- $E_j$  é a taxa de redução;
- $(1 - E_j) s_{ij}$  é a taxa de concentração depois da redução.

Finalmente, supondo que a concentração total em um ponto receptor seja a soma da concentração de poluentes que são liberados de todas fontes, temos:

$$S_i = \sum_{j=1}^J (1 - E_j) s_{ij}.$$

A partir das equações descritas acima, podemos pensar no problema de Programação Matemática Fuzzy.

A primeira restrição fuzzy é: para cada ponto-receptor  $i$ ,  $S_i$  não exceda o padrão  $d$  mas tente manter-se menor do que  $e_i$  que é um padrão desejável neste ponto receptor  $i$ . Matematicamente:

$$\sum_{j=1}^J (1 - E_j) s_{ij} \lesssim e_i; d \quad \forall i \tag{3.1}$$

A Figura 1 expressa graficamente a função de pertinência associada ao símbolo  $\lesssim$ . A notação  $e_i; d$  denota que  $e_i$  é o nível de poluição desejável e  $d$  o padrão permitido de emissão do poluente.

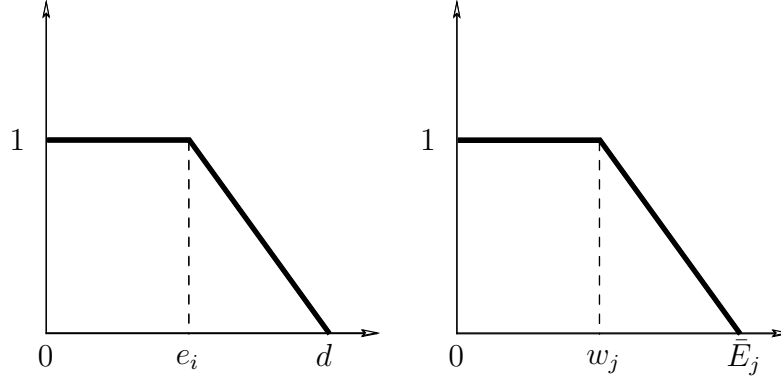


Figura 1: Violação das restrições (3.1) e (3.2), respectivamente.

A segunda restrição fuzzy é: garantida, para cada fonte  $j$  que a taxa de redução não exceda  $\bar{E}_j$  e tente manter-se abaixo de  $w_j$ . Matematicamente:

$$E_j \lesssim w_j; \bar{E}_j \quad \forall j \quad (3.2)$$

onde  $\bar{E}_j, w_j \in [0, 1]$ . Finalmente, a função objetivo é dada por:

$$z = \min \sum_{j=1}^J c_j E_j \quad (3.3)$$

e  $c_j$  é custo total da redução para a fonte  $j$ .

Como o conjunto de restrições é fuzzy, a função objetivo passa a ser interpretada como: Minimize  $\sum c_j E_j$  mas considere todas as funções de pertinência  $\mu_i$  e  $\mu_j$ .

As restrições (3.1) e (3.2) possuem o mesmo tipo de desigualdade fuzzy ( $\lesssim$ ), e para cada uma delas a seguinte função de pertinência que caracteriza a sua natureza fuzzy é dada a seguir:

$$\mu_i(E_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (1 - E_j)s_{ij} < e_i \\ \frac{d - (1 - E_j)s_{ij}}{d - e_i} & \text{se } (1 - E_j)s_{ij} \in [e_i, d] \end{cases}$$

e

$$\mu_j(E_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } E_j < w_j \\ \frac{\bar{E}_j - E_j}{\bar{E}_j - w_j} & \text{se } E_j \in [w_j, \bar{E}_j] \end{cases}$$

Uma restrição do tipo  $\lesssim$  é formulada como duas desigualdades usando uma variável de folga  $s_i \geq 0$ , para a restrição (3.1):

$$\forall i \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^J (1 - E_j) s_{ij} - s_i \leq e_i \\ s_i \leq d - e_i \end{array} \right. \quad (3.4)$$

e  $t_j \geq 0$  para (3.2):

$$\forall j \left\{ \begin{array}{l} E_j - t_j \leq w_j \\ t_j \leq \bar{E}_j - w_j \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Agora, as funções de pertinência para a restrição (3.4),  $\forall i$ , e para (3.5),  $\forall j$ , são:

$$\mu_i = 1 - \frac{s_i}{d - e_i} \quad \text{e} \quad \mu_j = 1 - \frac{t_j}{\bar{E}_j - w_j}$$

A não-negatividade das variáveis também deve ser garantida, ou seja:  $E_j \geq 0$ ,  $t_j \geq 0$ ,  $\forall j$  e  $s_i \geq 0$ ,  $\forall i$ .

A função de pertinência da função objetivo (3.3) é dada por:

$$\mu_0 = \begin{cases} 1 & \text{se } z < \alpha_0 \\ 1 - \frac{\alpha_0 - z}{\beta_0 - \alpha_0} & \text{se } z \in [\alpha_0, \beta_0] \\ 0 & \text{se } z > \beta_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

A Figura 2 ilustra a função acima (3.6).

Ao contrário das funções de restrições (3.1) e (3.2), onde os limites de satisfação de cada restrição são dados, temos de determinar os limites inferior e superior,  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ , respectivamente, para a função de pertinência da função objetivo.

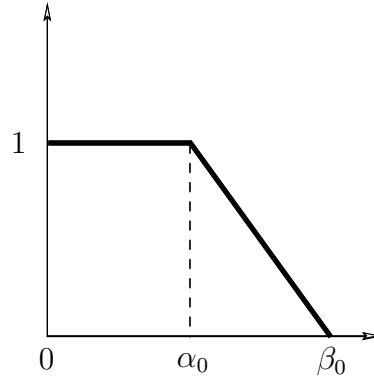


Figura 2: Violação da função objetivo (3.3) – função de pertinência (3.6).

### 3.1 Determinação de $\alpha_0$

O valor de  $\alpha_0$  pode ser obtido através da solução do problema

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{j=1}^J c_j E_j \\
 \sum_{j=1}^J (1 - E_j) s_{ij} & \leq d \quad \forall i \\
 E_j & \leq \bar{E}_j \quad \forall j \\
 E_j & \geq 0 \quad \forall j
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Supondo que  $E_j^*$  seja a solução de (3.7), então assumimos que

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^J c_j E_j^*$$

O problema (3.7) fornece o melhor valor possível para a função objetivo, já que todas as restrições podem atingir os valores padrão máximos  $d$ .

### 3.2 Determinação de $\beta_0$

O valor da função objetivo deve ser menor do que  $\underline{z}$ , onde  $\underline{z} = \sum_{j=1}^J c_j \underline{E}_j$ , e  $\underline{E}_j$ , para  $\forall j$ , é a solução ótima do problema. Assim,  $\beta_0 = \underline{z}$  da função objetivo

do problema que inclua as pertinências das restrições mas exclua a pertinência da função objetivo e a própria função objetivo. Assim, resolvemos o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^I \frac{s_i}{d - e_i} + \sum_{j=1}^J \frac{t_j}{\bar{E}_j - w_j} \\
 \text{S. a} \quad & \sum_{j=1}^J (1 - E_j) s_{ij} - s_i \leq d \quad \forall i \\
 & s_i \leq d - e_i \quad \forall i \\
 & E_j - t_j \leq \bar{E}_j \quad \forall j \\
 & t_j \leq \bar{E}_j - w_j \quad \forall j \\
 & E_j, t_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & s_i \geq 0 \quad \forall i
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

O problema (3.8) fornece o pior valor possível para a função objetivo, já que suas restrições levam em conta os valores desejáveis  $s_i$ , menores – e portanto mais estritos – que os padrões  $d$ .

### 3.3 O Problema

Adicionando a função de pertinência da função objetivo em (3.8), temos:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^I \frac{s_i}{d - e_i} + \sum_{j=1}^J \frac{t_j}{\bar{E}_j - w_j} + \sum_{j=1}^J \frac{c_j E_j}{\beta_0 - \alpha_0} \\
 \text{S. a} \quad & \sum_{j=1}^J (1 - E_j) s_{ij} - s_i \leq d \quad \forall i \\
 & s_i \leq d - e_i \quad \forall i \\
 & E_j - t_j \leq \bar{E}_j \quad \forall j \\
 & t_j \leq \bar{E}_j - w_j \quad \forall j \\
 & E_j, t_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & s_i \geq 0 \quad \forall i
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

## 4. Resultados

Usando o mapa da região de Sorocaba como base (figura 3), foram colocadas duas fontes poluidoras ( $s_1$  e  $s_2$ ) e três pontos receptores ( $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ ).

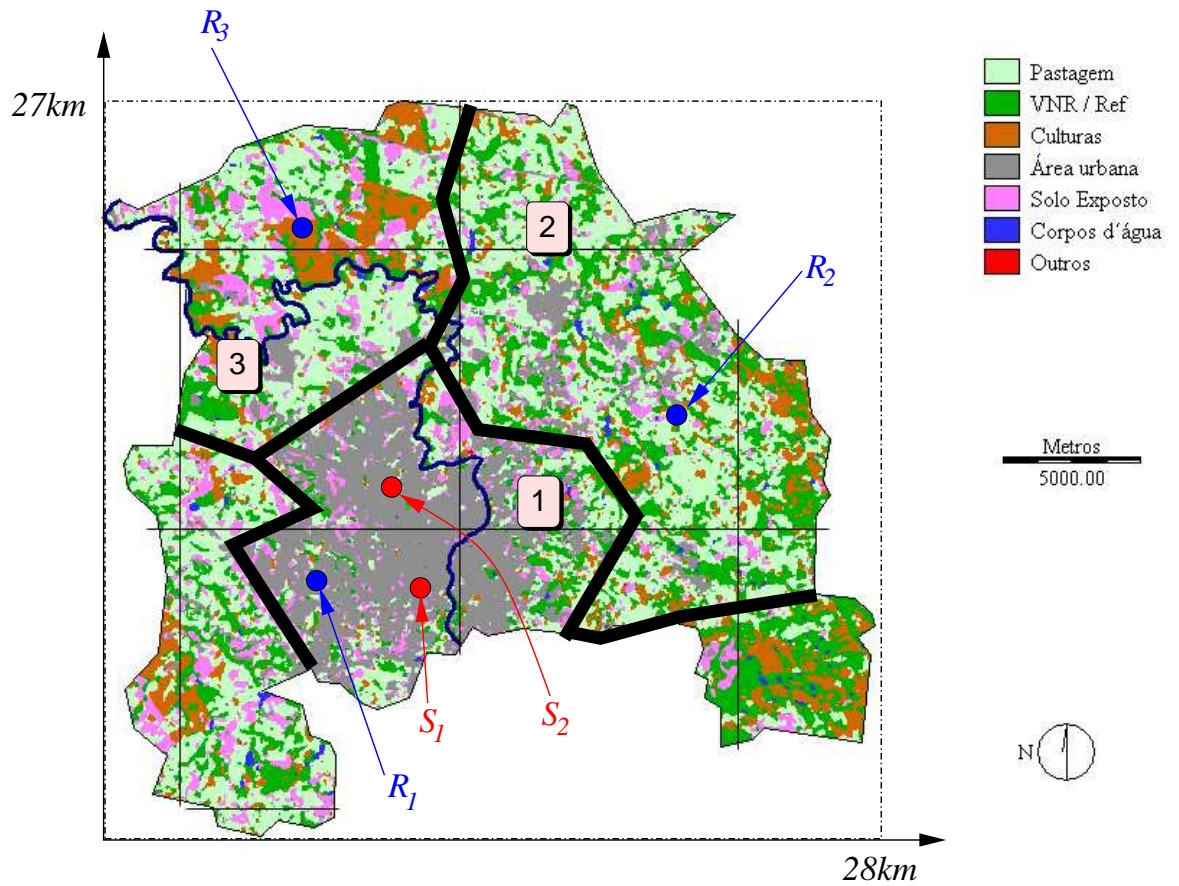


Figura 3: Mapa da região de Sorocaba.

Para cada fonte, calculamos as funções de transferência usando funções cujas curvas de nível são elipses e cujo decaimento é exponencial. Assim:

$$s(x_1, x_2) = e^{(-A)}$$



sendo:

$$A = \frac{(x_1 \cos t - x_2 \sin t)^2}{a^2} + \frac{(x_1 \sin t + x_2 \cos t)^2}{b^2}$$

Note que,  $(x_1, x_2)$  é o centro da elipse (coordenadas das fontes poluidoras),  $(a, b)$  são os eixos e  $t$  o ângulo de rotação. Assim:

	$s_1$	$s_2$
$(x_1, x_2)$	(11.34, 9.02)	(9.9, 12.33)
$(a, b)$	(16, 6)	(17, 5)
$t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$

Como mostra a Figura 3, o mapa foi dividido em três regiões: urbana, pastagem e culturas –  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , respectivamente. Cada região possui um total de poluentes permitidos  $d$  e um total desejável  $e_i$ , como segue na Tabela 1. Como dados das fontes  $s_1$  e  $s_2$  temos  $\bar{E}_j$ , a taxa de redução permitida,  $w_j$ , a taxa de redução desejada e  $c_j$ , o custo da redução. A Tabela 2 apresenta estes dados. A Tabela 3 apresenta o índice de poluentes nas fontes receptoras.

	Área	$e_i$	$d$
1	$R_1$ : Urbana	0.8	1
2	$R_2$ : Pastagem	0.55	1
3	$R_3$ : Culturas	0.5	1

Tabela 1: Concentração de poluente desejado e permitido.

$j$	$c_j$	$\bar{E}_j$	$w_j$
1	2	0.2	0.05
2	3	0.3	0.12

Tabela 2: Taxas de redução desejada, esperada e custo de redução.

Pontos Receptores e suas Coordenadas			Emissão de Poluentes nas Fontes		$\sum_{j=1}^2 s_{ij}$
$i$	$x_1^i$	$x_2^i$	$s_{1i}$	$s_{2i}$	
1	7.2	9.02	0.762	0.524	1.2865
2	18.8	15.5	0.675	0.031	0.706
3	7.2	22.0	0.014	0.561	0.576

Tabela 3: Dados do problema.

Para o tratamento numérico, a equação (3.4) é reformulada como:

$$\forall i \begin{cases} \sum_{j=1}^J E_j s_{ij} + s_i \geq \sum_{j=1}^J s_{ij} - e_i \\ s_i \leq d - e_i \end{cases} \quad (4.10)$$

O valor de  $\alpha_0$  é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2E_1 + 3E_2 \\ \text{S. a} \quad & 0.762E_1 + 0.524E_2 \geq 0.2865 \\ & E_1, E_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

As demais restrições foram excluídas do problema pois, neste caso, estas já apresentam um somatório inferior à taxa de concentração desejável. O resultado deste problema nos dá:

$E_1$	$E_2$	$z = \alpha_0$
0.2	0.256	1.167

Tabela 4: Solução do problema (4.11).

O valor de  $\beta_0$  é pelo problema:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 5s_1 + 2.22s_2 + 2s_3 + 6.67t_1 + 5.56t_2 \\
 \text{S. a} \quad & 0.762E_1 + 0.524E_2 + s_1 \geq 0.4865 \\
 & s_1 \leq 0.2 \\
 & 0.675E_1 + 0.031E_2 + s_2 \geq 0.156 \\
 & s_2 \leq 0.45 \\
 & 0.014E_1 + 0.561E_2 + s_3 \geq 0.076 \\
 & s_3 \leq 0.5 \\
 & E_1 - t_1 \leq 0.05 \\
 & t_1 \leq 0.15 \\
 & E_2 - t_2 \leq 0.12 \\
 & t_2 \leq 0.18 \\
 & E_1, E_2, s_1, s_2, s_3, t_1, t_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

A solução do problema (4.12) apresenta-se na Tabela 5.

$E_1$	$E_2$	$z = \beta_0$
0.2	0.256	2.7852

Tabela 5: Solução do problema (4.12).

A partir das Tabelas 1, 2, 3, 4 e 5 e da discussão apresentada até aqui, apre-

sentamos o problema completo.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 5s_1 + 2.22s_2 + 2s_3 + 6.67t_1 + 5.56t_2 + 1.24E_1 + 1.85E_2 \\
 \text{S. a} \quad & 0.762E_1 + 0.524E_2 + s_1 \geq 0.4865 \\
 & s_1 \leq 0.2 \\
 & 0.675E_1 + 0.031E_2 + s_2 \geq 0.156 \\
 & s_2 \leq 0.45 \\
 & 0.014E_1 + 0.561E_2 + s_3 \geq 0.076 \\
 & s_3 \leq 0.5 \\
 & E_1 - t_1 \leq 0.05 \\
 & t_1 \leq 0.15 \\
 & E_2 - t_2 \leq 0.12 \\
 & t_2 \leq 0.18 \\
 & E_1, E_2, s_1, s_2, s_3, t_1, t_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Finalmente, a solução ótima para o problema de poluição do ar (4.13) é apresentada na Tabela 6.

$E_1^*$	$E_2^*$	$z^*$
0.2	0.256	3.50715

Tabela 6: Solução do problema (4.13).

Note que, para  $E_2$  conseguimos uma taxa de emissão abaixo do permitido (conforme Tabela 2).

**Nota:** os problemas lineares foram resolvidos usando o software `lp_solve`<sup>‡</sup>, versão 5.5, e GNU Octave<sup>§</sup> versão 2.1.69 em sistema operacional GNU/Linux.

<sup>‡</sup>[tech.groups.yahoo.com/group/lp\\_solve/](http://tech.groups.yahoo.com/group/lp_solve/)

<sup>§</sup>[www.octave.org](http://www.octave.org)

## 5. Conclusões

Este modelo é bastante simples e genérico, pois o tipo de poluente é omitido, bem como condições atmosféricas. Dados sintéticos foram usados na validação do modelo. Porém, fica clara a flexibilidade existente em problemas reais e propõe-se uma resolução usando a Teoria Fuzzy.

Para trabalhos futuros, analisaremos a emissão de  $\text{NO}_x$  em dois locais da região de Sorocaba: no centro da cidade e a emissão de uma empresa, em Votorantim – SP. Ambas medidas serão obtidas através dos relatórios CETESB (2005), CETESB (2006), CETESB (2007) e Muramoto et al. (2004). Suas respectivas plumas serão aproximadas através de um modelo bidimensional simplificado de dispersão de poluentes atmosféricos Bean (1993), Cantão (2004).

## Agradecimentos

Agradeço ao apoio e colaboração na coleta de informações sobre Poluição do Ar da Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Maria Lucia Pereira Antunes e ao constante apoio do Prof. Dr. Akebo Yamakami e Msc. Ricardo Coelho Silva.

## Referências

- Bean, S. E. P. C. (1993). Modelagem matemática e aproximação numérica do estudo de poluentes aerossóis. Master's thesis, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas.
- Cantão, R. F. (2004). *Construção de um Software de Elementos Finitos Usando Programação Genérica/Generativa: Considerações sobre C++, Performance e Generalidade*. PhD thesis, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas.
- CETESB (2005). Relatório de qualidade do ar no estado de são paulo. Technical report, CETESB – Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, [www.cetesb.sp.gov.br](http://www.cetesb.sp.gov.br).

CETESB (2006). Relatório de qualidade do ar no estado de são paulo. Technical report, CETESB – Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, [www.cetesb.sp.gov.br](http://www.cetesb.sp.gov.br).

CETESB (2007). Relatório de qualidade do ar no estado de são paulo. Technical report, CETESB – Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, [www.cetesb.sp.gov.br](http://www.cetesb.sp.gov.br).

Muramoto, C. A., Fialho, R. C., de Souza, J. B., Chamani, M. C., Gallo, G. I., e Benavente, A. C. M. B. (2004). Estudos investigativos da ocorrência de ozônio troposférico na região de sorocaba – sp. Technical report, CETESB – Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental, [www.cetesb.sp.gov.br](http://www.cetesb.sp.gov.br).

Sommer, G. e Pollatschek, M. A. (1978). A fuzzy programming approach to an air pollution regulation problem. In Trappl, R., Klir, G. J., e Ricciardi, L., editors, *Progress in Cybernetics and Systems Research*, volume III, páginas 303–313. John and Sons.