

# Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado ao crescimento de suínos de corte

Lucas de Oliveira<sup>1</sup>

Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-MG  
Belo Horizonte-MG, Brasil

Adilson J. V. Brandão<sup>2</sup> e Rodney C. Bassanezi<sup>3</sup>

Universidade Federal do ABC - UFABC  
Centro de Matemática, Computação e Cognição - CMCC  
Santo André-SP, Brasil

**Resumo.** Neste trabalho estudamos a evolução do peso de suínos de corte utilizando o modelo de von Bertalanffy generalizado onde a taxa de catabolismo é dependente do tempo. Este modelo matemático, utilizado para o estudo do crescimento em peso de aves apresenta uma taxa de catabolismo variável, na forma de uma função exponencial assintótica. No caso de suínos obtivemos como taxa de catabolismo uma função logística, tanto para machos quanto para fêmeas. Este resultado nos levou a conjecturar que a taxa de catabolismo é característica da classe dos animais. Para a obtenção dos parâmetros utilizamos dados experimentais do AGROCERES PIC de Ponte Nova (MG), referentes ao desempenho previsto da progênie Camborough 22 e AGPIC 412 TG, em boas condições de manejo e nutrição, separada por sexo e destinada à produção de cevados com peso elevado.

**Palavras-chave:** *Modelagem matemática; Modelo de von Bertalanffy generalizado; Modelo logístico.*

## 1. Introdução

No início dos anos setenta von Bertalanffy propôs o seguinte modelo para o estudo de crescimento em peso de peixes (veja [rodney1]):

---

<sup>1</sup>lucasdeoliveira1@gmail.com

<sup>2</sup>adilson.brandao@ufabc.edu.br

<sup>3</sup>rodney.bassanezi@ufabc.edu.br

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^{2/3} - \beta P, \\ P(0) = P_0, \end{cases}$$

onde  $P = P(t)$  é a massa do peixe em função do tempo  $t$ ,  $P_0$  é a massa inicial,  $\alpha$  é a constante de anabolismo (representando a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal) e  $\beta$  é a constante de catabolismo (que representa a taxa de diminuição da massa por unidade de massa). Notemos que, o termo  $2/3$  é proveniente de uma relação alométrica do peso com a área corporal do peixe.

Em Bassanezi (2002) é apresentada a seguinte generalização para estudo do crescimento em peso de um animal qualquer:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \alpha P^\gamma - \beta P, \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde agora  $P = P(t)$  é a massa do animal em função do tempo  $t$ ,  $P_0$  é a massa inicial,  $\alpha$  e  $\beta$  são as constantes de anabolismo e catabolismo respectivamente e  $\gamma$  é um parâmetro alométrico a ser estimado.

Esta generalização do Modelo de Bertalanffy foi aplicada no estudo de crescimento em peso de perús (Bassanezi, 2002) e frangos (Leite, 2003).

Nosso objetivo neste trabalho é aplicar o modelo de von Bertalanffy generalizado ao estudo do crescimento em peso de suínos de corte e obter uma expressão para a taxa de catabolismo  $\beta = \beta(t)$  dependente do tempo, a partir de dados experimentais. Além disso fazemos uma comparação entre este modelo e alguns modelos clássicos (Logístico e Gompertz), que usam a taxa  $\beta$  constante.

## 2. Aplicação do Modelo

O parâmetro alométrico de  $\gamma = 2/3$ , obtido por von Bertalanffy para peixes (Bassanezi e Ferreira Jr., 1988), foi estimado como sendo igual a  $3/4$  no caso de mamíferos (West et al., 2002). Consideramos então para o crescimento em peso de suínos  $\gamma = 3/4$ .

A equação (1.1) é do tipo Bernoulli e pode ser facilmente resolvida:

$$P(t) = P_{\infty} \left\{ 1 + \left[ \left( \left( \frac{P_0}{P_{\infty}} \right)^{1/4} - 1 \right) e^{-\frac{\beta}{4}t} \right]^4 \right\}, \quad (2.2)$$

onde  $P_{\infty}$  é o peso máximo do animal, satisfazendo a relação  $P_{\infty} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^4$ .

Visando obter um modelo mais realista, consideramos a taxa de catabolismo  $\beta$  como sendo variável em relação ao tempo. Esta hipótese é razoável se considerarmos que, quando o animal envelhece, sua perda de energia tende a ser mais elevada.

Um forma mais simples de modelar tal situação é considerar diretamente na equação (2.2) a taxa  $\beta$  variável, ou seja,

$$P(t) = P_{\infty} \left\{ 1 + \left[ \left( \left( \frac{P_0}{P_{\infty}} \right)^{1/4} - 1 \right) e^{-\frac{\beta(t)}{4}t} \right]^4 \right\}, \quad (2.3)$$

Consideramos, para verificação do modelo, a tabela de dados da Agrocerec PIC de Ponte Nova-MG ?? dada pela tabela 1.

A partir destes dados vamos estimar o parâmetros  $P_{\infty}$  e a função  $\beta(t)$  no caso dos suínos machos.

**Peso Máximo:** Calcularemos  $P_{\infty}$  pelo método de Ford-Walford [rodney1] considerando os últimos nove dados da tabela, quando o peso do animal está se estabilizando.

Ajustando estes dados linearmente obtemos a seguinte reta:

$$P(t+1) = 17,9718 + 0,906458P(t)$$

Como  $P(t+1) = P(t)$  no equilíbrio, obtemos o peso limite para machos  $P_{\infty} = 192,125$  Kg.

**Cálculo da função beta:** A partir de (2.3) obtemos formalmente

$$\beta[P(t), t] = -4 \frac{\ln \left[ \frac{\left( \frac{P(t)}{P_{\infty}} \right)^{1/4} - 1}{\left( \frac{P_0}{P_{\infty}} \right)^{1/4} - 1} \right]}{t}. \quad (2.4)$$

Através dos dados da tabela 1 e de (2.3) calculamos uma tabela para  $\beta(t)$  (veja tabela 2) e seu diagrama de dispersão (veja figura 1).

Tabela 1: Tabela de peso dos suínos. Fonte: Agroceres PIC de Ponte Nova/MG

| Idade (em dias) | Peso do macho (em Kg) | Peso da fêmea (em Kg) |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| 0               | 1,50                  | 1,50                  |
| 7               | 2,80                  | 2,80                  |
| 14              | 4,23                  | 4,23                  |
| 21              | 6,18                  | 6,18                  |
| 28              | 8,37                  | 8,37                  |
| 35              | 10,94                 | 10,94                 |
| 42              | 13,92                 | 13,89                 |
| 49              | 17,36                 | 17,26                 |
| 56              | 21,28                 | 21,07                 |
| 63              | 25,70                 | 25,33                 |
| 70              | 30,42                 | 29,83                 |
| 77              | 35,52                 | 34,67                 |
| 84              | 41,05                 | 39,89                 |
| 91              | 46,98                 | 45,47                 |
| 98              | 53,29                 | 51,40                 |
| 105             | 59,94                 | 57,65                 |
| 112             | 66,87                 | 64,16                 |
| 119             | 73,96                 | 70,81                 |
| 126             | 81,18                 | 77,59                 |
| 133             | 88,48                 | 84,42                 |
| 140             | 95,81                 | 91,29                 |
| 147             | 103,16                | 98,17                 |
| 154             | 110,47                | 105,00                |
| 161             | 117,65                | 111,71                |
| 168             | 124,59                | 118,18                |
| 175             | 131,15                | 124,29                |
| 182             | 137,22                | 129,92                |
| 189             | 142,68                | 134,97                |
| 196             | 147,48                | 139,38                |
| 203             | 151,54                | 143,07                |
| 210             | 154,83                | 146,02                |

Tabela 2: Tabela para a função beta.

| Idade (em dias) | Peso do macho (em Kg) | beta (macho) |
|-----------------|-----------------------|--------------|
| 1               | 1,50                  | 0,0000       |
| 7               | 2,80                  | 0,03499      |
| 14              | 4,23                  | 0,03452      |
| 21              | 6,18                  | 0,03526      |
| 28              | 8,37                  | 0,03496      |
| 35              | 10,94                 | 0,03483      |
| 42              | 13,92                 | 0,03484      |
| 49              | 17,36                 | 0,03502      |
| 56              | 21,28                 | 0,03532      |
| 63              | 25,70                 | 0,03572      |
| 70              | 30,42                 | 0,03605      |
| 77              | 35,52                 | 0,03640      |
| 84              | 41,05                 | 0,03683      |
| 91              | 46,98                 | 0,03732      |
| 98              | 53,29                 | 0,03788      |
| 105             | 59,94                 | 0,03848      |
| 112             | 66,87                 | 0,03914      |
| 119             | 73,96                 | 0,03980      |
| 126             | 81,18                 | 0,04049      |
| 133             | 88,48                 | 0,04122      |
| 140             | 95,81                 | 0,04197      |
| 147             | 103,16                | 0,04279      |
| 154             | 110,47                | 0,04366      |
| 161             | 117,65                | 0,04457      |
| 168             | 124,59                | 0,04550      |
| 175             | 131,15                | 0,04642      |
| 182             | 137,22                | 0,04729      |
| 189             | 142,68                | 0,04804      |
| 196             | 147,48                | 0,04865      |
| 203             | 151,54                | 0,04904      |
| 210             | 154,83                | 0,04916      |

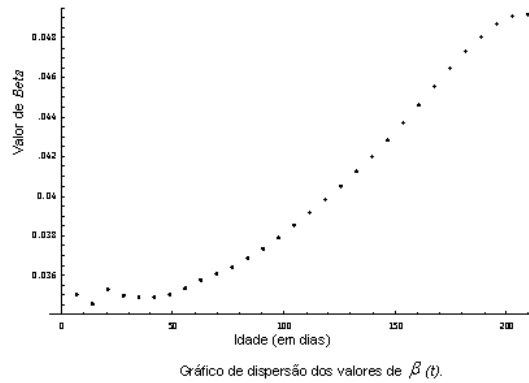


Figura 1: Diagrama de dispersão de  $\beta$  para o crescimento em peso de suínos

Observando a figura 1 notamos que a curva  $\beta(t)$  tem as mesmas características de uma curva Logística. Fazendo o ajuste dos dados de  $\beta$  para a curva Logística obtemos:

$$\beta(t) = \frac{0.014343}{338.289e^{-0.0440671t} + 1} + 0.03484. \quad (2.5)$$

Substituindo  $P_\infty$  e  $\beta(t)$  na equação (2.3) obtemos:

$$P(t) = 192.125 \left\{ 1 - 0,69375 \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{0,014343}{338,289e^{-0,0440671t} + 1} + 0,03484 \right) t \right] \right\}^4. \quad (2.6)$$

O gráfico da função  $P(t)$ , dada pelo modelo (2.6) para os suínos machos comparada com os dados da tabela 1 pode ser visto na figura 2.

De modo análogo ao caso dos suínos machos, calculamos  $P(t)$  para os suínos fêmeas:

$$P(t) = 165.698 \left\{ 1 - 0.682208 \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{0.0217369}{311.746e^{-0.00367647t} + 1} + 0.037 \right) t \right] \right\}^4. \quad (2.7)$$

O gráfico correspondente ao modelo (2.7) pode ser visto na figura 3.

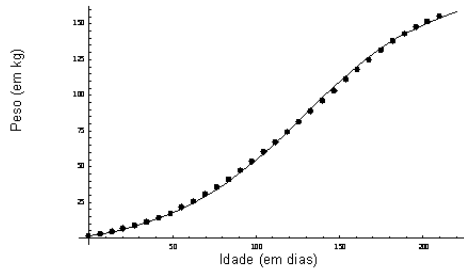


Figura 2: A curva  $P(t)$  do modelo (2.6) para suínos machos

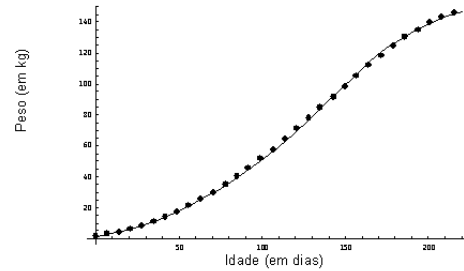


Figura 3: A curva  $P(t)$  do modelo (2.7) para suínos fêmeas

### 3. Comparação com outros modelos e conclusões

A função  $P(t)$  para o modelo Logístico com os dados da tabela 1, no caso dos suínos machos é dada por:

$$P(t) = \frac{173.922}{31.770e^{-0.026793t} + 1}$$

e o gráfico comparativo está na figura 4.

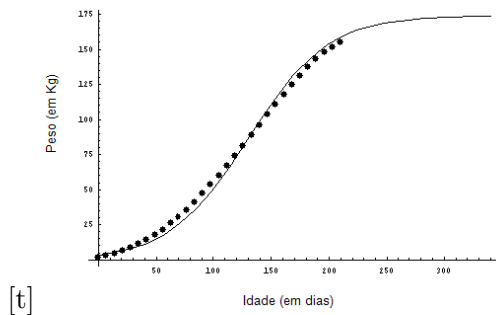


Figura 4: Modelo Logístico dos machos comparado com os dados

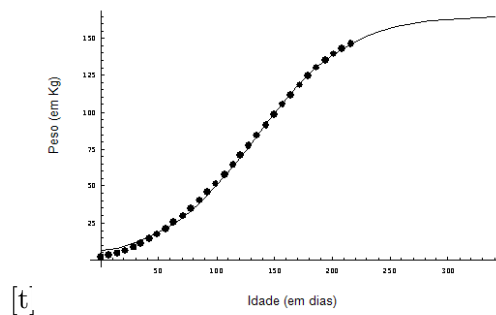


Figura 5: Modelo Logístico das fêmeas comparado com os dados

De forma análoga temos a função peso para os suínos Fêmeas:

$$P(t) = \frac{165.698}{47.7711e^{-0.0281433t} + 1}$$

O gráfico correspondente está na figura 5.

A função  $P(t)$  para o modelo de Gompertz com os dados da tabela 1, no caso dos suínos machos é dada por:

$$P(t) = 191.643 \left( \frac{1.5}{191.643} \right)^{e^{-0.026793t}}$$

e seu gráfico comparativo com os dados está na figura 6.

No caso das fêmeas:

$$P(t) = 170.64 \left( \frac{1.5}{170.64} \right)^{e^{-0.0148142t}}$$

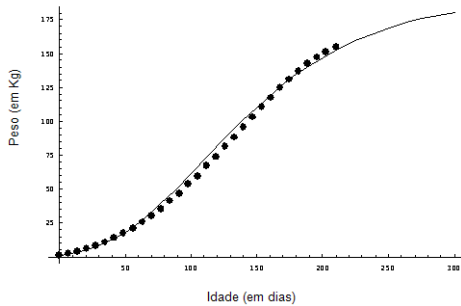


Figura 6: Modelo de Gompertz dos machos comparado com os dados

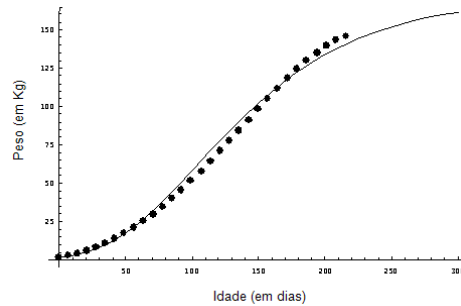


Figura 7: Modelo de Gompertz das fêmeas comparado com os dados

Verificamos, por meio de testes estatísticos (de Oliveira, 2006), que o modelo de von Bertalanffy generalizado foi o que melhor se ajustou aos dados em relação aos modelos logístico e de Gompertz.

É fato notável que, ao aplicarmos o modelo de von Bertalanffy generalizado aos dados da tabela de suínos com a função  $\beta(t)$  ajustada pela função logística, obtemos melhores resultados do que se aplicarmos diretamente o modelo logístico à função peso  $P(t)$ .

Observamos que, no caso do crescimento em peso de suínos, a função  $\beta(t)$  logística ajustou muito bem os dados. No caso do crescimento em peso de aves a função mais adequada para  $\beta(t)$  mostrou ser a exponencial assintótica (Bassanezi, 2002; Leite, 2003). Seria sempre assim para mamíferos e aves? E para peixes e insetos?



## Referências

- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. Contexto, São Paulo.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações Diferenciais com Aplicações*. Harbra, São Paulo.
- de Oliveira, L. (2006). Modelagem matemática no crescimento de suínos de corte. Relatório de iniciação científica – PIBIC. Departamento de Matemática, UFOP, Ouro Preto/MG.
- Leite, A. L. F. (2003). Modelagem matemática aplicada ao crescimento em peso de aves de corte. Monografia (Graduação) – Curso de Matemática, Departamento de Matemática, UFOP, Ouro Preto/MG.
- West, G. B., Woodruff, W. H., e Brown, J. H. (2002). Allometric scaling of metabolic rate from molecules and mitochondria to cells and mammals. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 99:2473–2478.

