

Pontos Estacionários: I. Sistemas Dinâmicos P-fuzzy Unidimensionais

João de Deus Mendes da Silva¹,

DEMAT, CCET – UFMA, 65.080-040, São Luis/MA.

Rodney Carlos Bassanezi²,

DMA, IMECC – UNICAMP, 13083-859, Campinas/SP.

Resumo. Sistemas dinâmicos p-fuzzy são sistemas variacionais cuja dinâmica é obtida por meio de um sistema baseado em regras fuzzy. Neste artigo, particularmente abordaremos os sistemas p-fuzzy unidimensionais e apresentamos teoremas que estabelecem condições de existência e unicidade para pontos de equilíbrio. Além dos resultados analíticos apresentados, apresentamos exemplos que ilustram os resultados matemáticos obtidos.

Palavras-chave: *Sistemas dinâmicos; Sistemas p-fuzzy; Controlador*

1 Introdução

Sistemas baseados em regras fuzzy têm sido utilizados com êxito em várias áreas como controle, para tomadas de decisões, sistemas de identificação, etc. Este sucesso se deve principalmente à sua simplicidade, intuitividade e principalmente a sua inter-relação com a forma de raciocínio humano. Sistemas baseados em regras fuzzy são conceitualmente simples (Fullér, 1995). Tais sistemas consistem basicamente de três estágios (Figura 1) : um estágio de entrada-*fuzificador*, um estágio de processamento, composto por uma *base de regras fuzzy* e um *método de inferência* e um estágio de saída - *defuzificador*.

¹jdmsilva@demat.ufma.br

²rodney@ime.unicamp.br

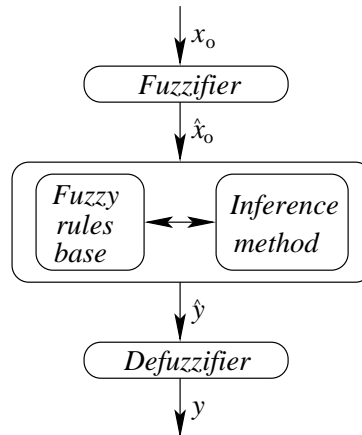


Figura 1: Esquema de um sistema baseado em regras fuzzy.

Os dois principais tipos de sistemas baseados em regras fuzzy são denominados sistemas fuzzy Mamdani e sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. A característica principal dos sistemas tipo Mamdani é que tanto o antecedente quanto o conseqüente são expressos por termos lingüísticos. Já os sistemas do tipo Takagi-Sugeno apenas o antecedente é expresso por termos lingüísticos e o conseqüente por funcionais.

Os sistemas do tipo Takagi-Sugeno são muito menos intuitivos do que os sistemas de Mamdani. Entretanto, devido à existência de métodos teóricos para a análise de estabilidade dos sistemas fuzzy do tipo Takagi-Sugeno Cuesta e Gordillo (1999); Feng (2004); Gupta (1985); Mikael et al. (1999); Tanaka et al. (1996); Tanaka e Sugeno (1993), esses sistemas, tornaram-se muito utilizados. Os sistemas do tipo Mamdani são utilizados como uma “caixa preta” e sofrem críticas devido à inexistência de um estudo analítico de sua estabilidade Ying (2005); Sugeno e Taniguchi (2004).

As equações variacionais fuzzy têm sido usadas por distintos métodos. Algumas tentativas de se contemplar subjetividade do tipo não aleatória já foram propostas tais como a derivada de Hokuvara, Inclusões diferenciais e Extensão de Zadeh Misukoshi (2004); Silva (2005). Nestes três métodos, o processo adotado para se estudar os sistemas variacionais é sempre derivado de sistemas clássicos determinísticos.

Neste artigo apresentamos os sistemas dinâmicos p-fuzzy. A dinâmica destes sistemas não se baseia em conceitos formais de variações provenientes das derivadas ou de diferenças explícitas ou de inclusões diferenciais. Nos sistemas p-fuzzy a dinâmica (processo iterativo) é obtida por meio de um sistema baseado em regras fuzzy do tipo Mamdani.

Um sistema *p-fuzzy* em \mathbb{R}^n é um sistema dinâmico discreto,

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_0 \text{ dado e } x_k \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

onde a função F é dada por $F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$ e $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ é obtido por meio de um sistema baseado em regras fuzzy. A arquitetura de um sistema *p-fuzzy* pode ser visualizada na Figura 2.

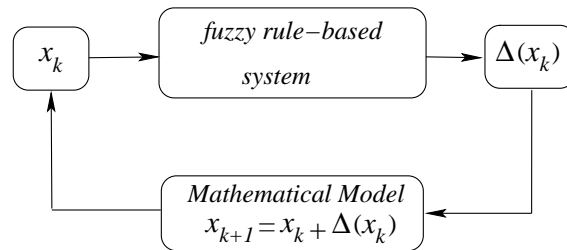


Figura 2: Arquitetura de um sistema *p-fuzzy*.

Neste artigo vamos nos focar nos sistemas p-fuzzy unidimensionais, os quais sempre estarão associado a um sistema fuzzy do tipo Mamdani onde o método de defuzzificação da saída é o cento de gravidade. Apresentamos teoremas que estabelecem condições necessárias e suficientes para existência de ponto de equilíbrio.

2 Preliminares

Nesta seção vamos introduzir os conceitos principais para o desenvolvimento da teoria aqui proposta.

2.1 Definições Preliminares

Definição 1 Dado $\alpha \in [0, 1]$ e U um subconjunto fuzzy de X , denominamos de α -nível do subconjunto fuzzy U , o subconjunto $[U]^\alpha \subset X$ definido por:

$$i) [U]^0 = \overline{\{x \in X; U(x) > 0\}}, \quad (\alpha = 0);$$

$$ii) [U]^\alpha = \{x \in X; U(x) \geq \alpha\}, \quad \text{se } \alpha \in (0, 1].$$

Definição 2 *Seja U um subconjunto fuzzy de X , o suporte de U , o qual denota-se, por $\text{supp}(U)$, é o subconjunto de X cujos elementos têm grau de pertinência não nulos em U , isto é,*

$$\text{supp}(U) = \{x \in X; U(x) > 0\}.$$

Definição 3 *Um subconjunto fuzzy $A \subset \mathbb{R}$ é chamado de número fuzzy se satisfaz às condições:*

$$(i) [A]^\alpha \neq \emptyset, \quad \forall \alpha \in [0, 1];$$

$$(ii) [A]^\alpha \text{ é um intervalo fechado, } \forall \alpha \in [0, 1];$$

(iii) *O suporte de A é limitado.*

Definição 4 *Considere um sistema p -fuzzy unidimensional*

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_0 \text{ dado e } x_k \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (2.1)$$

$F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$, dizemos que x^* é um ponto de equilíbrio de (2.1) se

$$F(x^*) = x^* \iff \Delta(x^*) = 0.$$

Definição 5 *Seja $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ uma família finita de subconjuntos fuzzy normais associados a uma variável lingüística x . Dizemos que $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ é uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos (Figura 3) se,*

$$i) \text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset, \quad \text{para cada } 1 \leq i < k;$$

$$ii) \bigcap_{j=i, i+2} \text{supp}(A_j) \text{ possui no máximo um elemento para cada } 1 \leq i < k - 1;$$

$$iii) \bigcup_{i=1, k} \text{supp}(A_i) = U, \quad \text{onde } U \text{ é o domínio da variável lingüística } x;$$

$$iv) \text{ dados } z_1 \in \text{supp}(A_i) \text{ e } z_2 \in \text{supp}(A_{i+1}), \text{ se } A_i(z_1) = 1 \text{ e } A_{i+1}(z_2) = 1 \text{ tem-se } z_1 < z_2 \text{ para cada } 1 \leq i < k.$$

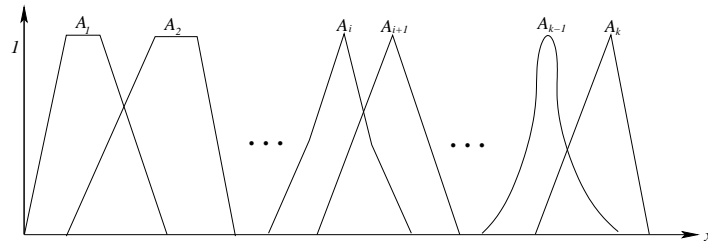


Figura 3: Família de subconjuntos fuzzy sucessivos.

Definição 6 Consideremos uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ que descreve o antecedente do sistema fuzzy associado ao sistema p-fuzzy (1.1). Se para algum $1 \leq i < k$, existem $z_1, z_2 \in [A_i \cup A_{i+1}]^0$ tais que $\Delta(z_1) \cdot \Delta(z_2) < 0$, então o subconjunto dado por: A^* , $A^* = [A_i \cap A_{i+1}]^0$, é denominado **conjunto viável de equilíbrio** do sistema p-fuzzy (1.1).

Um sistema p-fuzzy depende do sistema fuzzy associado a ele, isto é, da base de regras, do método de inferência e do método de defuzificação utilizado. Na Definição 6, uma condição suficiente para $\Delta(z_1) \cdot \Delta(z_2) < 0$ é que o sistema p-fuzzy esteja associado a um sistema fuzzy cuja a base de regras em $[A_i \cup A_{i+1}]^0$ é do tipo:

R_1 : Se x é A_i Então Δ é B ;

R_2 : Se x é A_{i+1} Então Δ é C .

onde $supp(B) \subset \mathbb{R}^-$ e $supp(C) \subset \mathbb{R}^+$ ou vice e versa. No caso de $supp(B) \subset \mathbb{R}^-$ e $supp(C) \subset \mathbb{R}^+$ diremos que o conjunto viável de equilíbrio, A^* , é do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$. Se, por outro lado, tivermos $supp(B) \subset \mathbb{R}^+$ e $supp(C) \subset \mathbb{R}^-$ diremos que A^* é do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (B, C)$.

Para compreender a dinâmica do sistema p-fuzzy precisamos entender como funciona o sistema baseado em regras ou mais precisamente, dado $x \in A^*$ como é o processo de obtenção de $\Delta(x)$. Na seção seguinte vamos explicitar este processo.

2.2 Defuzificação da saída do sistema fuzzy

Seja $A^* = [A_i \cap A_{i+1}]^0$, um conjunto viável de equilíbrio do sistema p-fuzzy é $A^* = [c_1, c_2]$. Para facilitar a notação indicaremos por r a função de pertinência

de A_i , por s a função de pertinência de A_{i+1} ,

$$z_1 = \min_{x \in \text{supp}(A_i)} \{r(x) = 1\} \quad \text{e} \quad z_2 = \max_{x \in \text{supp}(A_{i+1})} \{s(x) = 1\},$$

e por f e g as respectivas funções de pertinências de C e B (Figura 4). Vamos supor que o sistema p-fuzzy, no conjunto viável de equilíbrio A^* , é do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$.

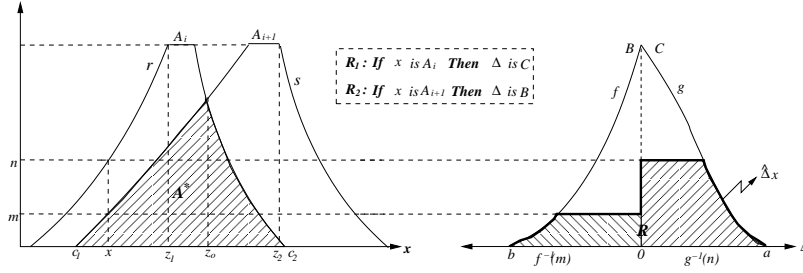


Figura 4: Processo de inferência de Mamdani para $[A^*]^0$ do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$.

Dado $x \in A^*$, o valor $\Delta(x)$ é a abscissa do centro de gravidade da região \mathbf{R} limitada pela função de pertinência da saída fuzzy $\hat{\Delta}x$ (veja Figura 4). Assim,

$$\Delta(x) = \frac{\int_b^{f^{-1}(m)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 mtdt + \int_0^{g^{-1}(n)} ntdt + \int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt}{\int_0^n g^{-1}(t)dt - \int_0^m f^{-1}(t)dt} \quad (2.2)$$

onde $(n, m) = (r(x), s(x))$. A Equação (2.2) ainda pode ser reescrita por:

$$\Delta(x) = \frac{h_1(n) + h_2(m)}{A(m, n)},$$

onde,

$$h_1(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} ntdt + \int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt \quad (2.3)$$

$$h_2(m) = \int_b^{f^{-1}(m)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 mtdt \quad (2.4)$$

$$A(m, n) = \int_0^n g^{-1}(t)dt - \int_0^m f^{-1}(t)dt \quad (2.5)$$

2.3 Resultados Preliminares

Os resultados que seguem se referem a um conjunto viável de equilíbrio do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$ (Figura 4). Para todos os resultados desta seção suporemos que as funções r , s , f e g (as quais representam respectivamente as funções de pertinências μ_{A_i} , $\mu_{A_{i+1}}$, μ_B e μ_C) são contínuas.

Lema 1 *A função h_1 (2.3) é crescente e sua imagem é dada por, $Im(h_1) = [0, \int_0^a tg(t)dt]$.*

Demonstração 1 *Como g é contínua em $[0, a]$ (portanto, limitada, o que implica que g^{-1} é limitada) então a função h_1 é derivável, e,*

$$h'_1(n) = \left(\int_0^{g^{-1}(n)} ntdt \right)' + \left(\int_{g^{-1}(n)}^a tg(t)dt \right)'$$

usando as propriedades de derivadas,

$$h'_1(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} tdt + n \left(\int_0^{g^{-1}(n)} tdt \right)' - \left(\int_a^{g^{-1}(n)} tg(t)dt \right)'$$

usando a Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo obtém-se

$$h'_1(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} tdt + ng^{-1}(n)(g^{-1})'(n) - ng^{-1}(n)(g^{-1})'(n)$$

donde,

$$h'_1(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} tdt = \frac{(g^{-1}(n))^2}{2} > 0.$$

e, portanto h_1 é crescente.

Agora,

$$h_1(0) = \int_0^{g^{-1}(0)} 0tdt + \int_{g^{-1}(0)}^a tg(t)dt = \int_a^a tg(t)dt = 0$$

e

$$h_1(1) = \int_0^{g^{-1}(1)} tdt + \int_{g^{-1}(1)}^a tg(t)dt = \int_0^a tg(t)dt.$$

Logo $Im(h_1) = [0, \int_0^a tg(t)dt]$.

Lema 2 A função h_2 é decrescente e sua imagem é dada por:

$$Im(h_2) = \left[\int_b^0 tf(t)dt, 0 \right].$$

Demonstração 2 Análoga à demonstração do Lema 1

Lema 3 Seja $\phi : I = [d_1, d_2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Se $\phi''(z) > 0$, $\forall z \in (d_1, d_2)$ e $\phi(d_1) < 0$, então ϕ possui no máximo uma raiz em I .

Demonstração 3 (Lema 3) Suponhamos que existam $z_1, z_2 \in I$ ($z_1 < z_2$) tal que $\phi(z_1) = \phi(z_2) = 0$. De $\phi''(z) > 0$, temos que ϕ não é constante. Daí, pelo Teorema de Rolle, $\exists c \in (z_1, z_2)$ tal que $\phi'(c) = 0 \Rightarrow c$ é ponto de mínimo, pois $\phi''(c) > 0$. Mas, $\phi(d_1) < 0 \Rightarrow \phi(c) > 0$. Como ϕ é contínua $\exists z_o \in (z_1, z_2)$ tal que $\phi(c) > \phi(z_o) > 0$, Absurdo! Logo ϕ tem no máximo uma raiz.

Lema 4 Se $g(t) > f(-t)$, $\forall t \in [0, -b]$ então $g^{-1}(k) > -f^{-1}(k) \forall k \in [0, 1]$.

Demonstração 4 Trivial (ver Figura 5).

Lema 5 Se $g(t) > f(-t)$, $\forall t \in [0, -b]$ então para $m, n \in [0, 1]$ com $m \leq n$ tem-se,

$$\Delta(x) = \frac{h_1(n) + h_2(m)}{A(m, n)} > 0.$$

Demonstração 5 Seja $H(m, n) = h_1(n) + h_2(m)$, é suficiente mostrarmos que $H(m, n) > 0$, pois $A(m, n) > 0$. Vamos mostrar inicialmente que dado $k \in [0, 1]$ tem-se $H(k, k) > 0$, para isto consideraremos dois casos.

Suponhamos primeiro que $k \in [0, 1]$ é tal que $g^{-1}(k) \leq -b$. Temos que,

$$H(k, k) = h_1(k) + h_2(k) = \int_0^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt$$

Usando o Lema 4 tem-se $\int_0^{g^{-1}(k)} ktdt = \int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt + \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt$, então,

$$H(k, k) = \int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt + \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt \quad (2.6)$$

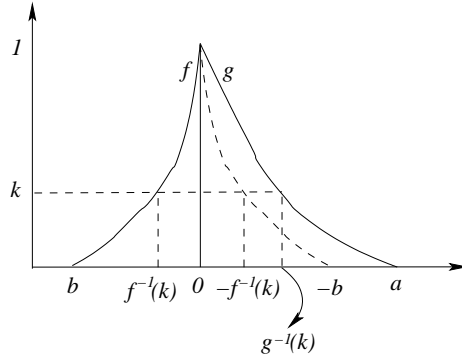


Figura 5: Saída do sistema p -fuzzy com $g(t) > f(-t)$.

Como $\int_0^{-f^{-1}(k)} kt dt = -\int_{f^{-1}(k)}^0 kt dt$ então de (2.6),

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} kt dt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t) dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t) dt \quad (2.7)$$

Temos que:

$$\int_b^{f^{-1}(k)} tf(t) dt = -\int_{-f^{-1}(k)}^{-b} tf(-t) dt = -\int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} tf(-t) dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t) dt,$$

pois $g^{-1}(k) \leq -b$. Substituindo este resultado em (2.7) tem-se,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} kt dt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t) dt - \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} tf(-t) dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t) dt \quad (2.8)$$

Podemos reescrever (2.8) da forma,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} [kt - tf(-t)] dt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t) dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t) dt \quad (2.9)$$

Como $a > -b$ de (2.9) tem-se,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} [kt - tf(-t)] dt + \int_{g^{-1}(k)}^{-b} [tg(t) - tf(-t)] dt + \int_{-b}^a tg(t) dt \quad (2.10)$$

Como $\forall t \in [0, -b]$ tem-se $k > f(t) = f(-t) \Leftrightarrow kt - tf(-t) > 0$ e do Lema 4 tem-se $tg(t) - tf(-t) > 0$ então todos os termos de (2.10) são positivos, portanto: $H(k, k) > 0$.

Se dado $k \in [0, 1]$ tivermos $g^{-1}(k) > -b$ a demonstração é análoga. Então, em qualquer caso, tem-se:

$$H(k, k) > 0 \quad (2.11)$$

Dados $m, n \in [0, 1]$, $m \leq n$ temos de (2.11) que $h_1(m) + h_2(m) > 0 \Leftrightarrow -h_2(m) < h_1(m)$. Como h_1 é crescente tem-se $-h_2(m) < h_1(m) \leq h_1(n)$. Logo $H(n, m) > 0 \Rightarrow \Delta(x) > 0$.

Lema 6 Se $g(t) < f(-t)$, $\forall t \in [0, a]$, e $m, n \in [0, 1]$ $m \geq n$ então $\Delta(x) < 0$.

Demonstração 6 Análoga à demonstração do Lema 5

3 Existência do ponto de equilíbrio

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos um teorema que garante a existência de ao menos um ponto de equilíbrio para cada conjunto viável de equilíbrio de um sistema p-fuzzy. Para isso, ainda usaremos a Figura 4 para motivar os resultados apresentados nesta seção.

Teorema 1 (Existência) Seja S um sistema p-fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$. Então, S possui ao menos um ponto de equilíbrio em A^* . Isto é, $\exists x^* \in A^*$ tal que $\Delta(x^*) = 0$.

Demonstração. Dado $x \in A^*$, pela Definição 4, x é ponto de equilíbrio se, e somente se,

$$\Delta(x) = 0 \iff h_1(n) + h_2(m) = 0.$$

Se $\mu_{A_i}(c_1) = 0$ então

$$\Delta(c_1) = h_1(\mu_{A_i}(c_1)) + h_2(\mu_{A_{i+1}}(c_1)) = h_1(0) + h_2(0) = 0,$$

e, portanto c_1 é ponto de equilíbrio. Se $\mu_{A_{i+1}}(c_2) = 0$ tem-se $\Delta(c_2) = 0$ donde c_2 é ponto de equilíbrio. Suponhamos que $\mu_{A_i}(c_1) > 0$ e $\mu_{A_{i+1}}(c_2) > 0$. Como $\mu_{A_{i+1}}(c_1) = 0$, então, do Lema 1 e Lema 2 $h_1(\mu_{A_i}(c_1)) > 0$ e $h_2(\mu_{A_{i+1}}(c_1)) = 0$. Daí,

$$\Delta(c_1) = h_1(\mu_{A_i}(c_1)) + h_2(\mu_{A_{i+1}}(c_1)) = h_1(\mu_{A_i}(c_1)) > 0.$$

Analogamente,

$$\Delta(c_2) = h_1(\mu_{A_i}(c_2)) + h_2(\mu_{A_{i+1}}(c_2)) = h_2(\mu_{A_{i+1}}(c_2)) < 0.$$

Como Δ é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário de Bolzano $\exists x^* \in [c_1, c_2]$ tal que $\Delta(x^*) = 0 \Rightarrow x^*$ é ponto de equilíbrio.

Observação 1 *Se considerarmos no Teorema 1 um conjunto viável de equilíbrio, A^* , do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (B, C)$ o resultado é análogo. Isto é, existe um ponto de equilíbrio $x^* \in A^*$.*

3.1 Determinação do ponto de equilíbrio local-saída simétrica

Se A^* é um conjunto viável de equilíbrio onde as funções de pertinências do conseqüente, B e C , são funções simétricas então, o ponto de equilíbrio deste conjunto viável de equilíbrio é único. Exceto possivelmente quando tivermos $\mu_{A_i}(c_1) = 0$ ou $\mu_{A_{i+1}}(c_2) = 0$. Senão vejamos,

Proposição 1 *Seja S um sistema p-fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$. Se as funções de pertinências de B e C , respectivamente μ_B e μ_C , são monótonas e simétricas, isto é $\mu_C(t) = \mu_B(-t)$, então um ponto de equilíbrio de S em A^* é:*

$$x^* = \mu_{A_i} \cap \mu_{A_{i+1}} = \max_{x \in A^*} [\min(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_{i+1}}(x))]^0.$$

Demonstração:

Como $\mu_B(t) = \mu_C(-t)$ então $\mu_B(-a) = \mu_C(a) = 0 = \mu_B(b) \Rightarrow b = -a$, pois μ_B é monótona. Temos ainda que, $\mu_B(t) = \mu_C(-t) \Rightarrow \mu_B^{-1}(\mu_C(t)) = -t = -\mu_B^{-1}(\mu_B(t)) \Rightarrow \mu_B^{-1}(y) = -\mu_C^{-1}(y)$.

Então, $\Delta(z_0) = 0$ se, somente se, $h_1(n) = -h_2(m)$. Como $b = -a$, da Equação (2.4),

$$h_2(m) = \int_{-a}^{\mu_B^{-1}(m)} t \mu_B(t) dt + \int_{\mu_B^{-1}(m)}^0 m t dt$$

fazendo a mudança de variável $u = -t$ tem-se,

$$h_2(m) = \int_a^{-\mu_B^{-1}(m)} u \mu_B(-u) du + \int_{-\mu_B^{-1}(m)}^0 m u du \Rightarrow$$

$$h_2(m) = \int_a^{\mu_C^{-1}(m)} u\mu_C(u)du + \int_{\mu_C^{-1}(m)}^0 mudu = -h_1(m).$$

Isto é, $h_2 = -h_1$. Daí, $h_1(n) = -h_2(m) \iff h_1(n) = h_1(m) \iff m = n$ (pois h_1 é crescente - Lema 1), portanto $x^* = \mu_{A_i} \cap \mu_{A_{i+1}}$.

Observação 2 *Observemos que se tivermos $\mu_{A_i}(c_1) \neq 0$ então $x^* = \mu_{A_i} \cap \mu_{A_{i+1}}$ é o único ponto de equilíbrio em A^* . Além disso, se o sistema S for $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (B, C)$, o resultado da Proposição 1 é o mesmo.*

4 Unicidade do ponto de equilíbrio

Nesta seção vamos enunciar e demonstrar teoremas que estabelecem condições suficientes para unicidade do ponto de equilíbrio de um sistema p -fuzzy unidimensional. Inicialmente consideraremos um caso mais simples, quando $A^* \subset [z_1, z_2]$ (Figura 4) onde

$$z_1 = \min_{x \in \text{supp}(A_i)} \{r(x) = 1\} \quad \text{e} \quad z_2 = \max_{x \in \text{supp}(A_{i+1})} \{s(x) = 1\}.$$

Teorema 2 *Seja S um sistema p -fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$. Se as funções μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ são monótonas por partes e $A^* \subset [z_1, z_2]$ então, existe um único ponto de equilíbrio em A^* .*

Demonstração. Dado um $x \in A^*$ temos que,

$$\Delta(x) = h_1(n) + h_2(m) = h_1(\mu_{A_i}(x)) + h_2(\mu_{A_{i+1}}(x)).$$

Usando os Lemas 1 e 2 e a regra da cadeia temos que a derivada de Δ é dada por,

$$\Delta'(x) = \frac{[\mu_C^{-1}(\mu_{A_i}(x))]^2}{2} \mu'_{A_i}(x) - \frac{[\mu_B^{-1}(\mu_{A_{i+1}}(x))]^2}{2} \mu'_{A_{i+1}}(x) \quad (4.12)$$

Como, em $A^* = [c_1, c_2]$, μ_{A_i} é não crescente e $\mu_{A_{i+1}}$ é não decrescente então $\mu'_{A_i}(x) \leq 0$ e $\mu'_{A_{i+1}}(x) \geq 0$ e, além disso, se $\mu'_{A_i}(x) = 0$ tem-se $\mu'_{A_{i+1}}(x) \neq 0$ e se $\mu'_{A_{i+1}}(x) = 0$ tem-se $\mu'_{A_i}(x) \neq 0$. Então, de (4.12), $\Delta'(x) < 0$ o que mostra que Δ é decrescente. Como, pelo Teorema 1, existe um ponto de equilíbrio em A^* , ele é único.

Consideraremos agora o caso mais geral, quando $A^* \notin [z_1, z_2]$. Dividiremos em dois teoremas. Inicialmente consideraremos o caso em que as funções de pertinência μ_C e μ_B são tais que $\mu_C(t) > \mu_B(-t)$, em seguida o caso em que tem-se $\mu_C(t) < \mu_B(-t)$

4.1 Caso 1: $\mu_C(t) > \mu_B(-t)$

Teorema 3 (Unicidade) *Seja S um sistema p-fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$. Se as funções μ_{A_i} , $\mu_{A_{i+1}}$, μ_B , $\mu_C \in C^1$; μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ são monótonas por partes, μ_B e μ_C estritamente monótonas, tais que:*

- (i) $\mu_C(t) > \mu_B(-t)$, $\forall t \in (0, -b)$;
- (ii) $\frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} < \frac{p^3}{q^3}$, $\forall p \in \text{supp}(B)$, $q \in \text{supp}(C)$ e $\mu_B(p) > \mu_C(q)$;
- (iii) $\left[\frac{\mu'_{A_{i+1}}(x)}{\mu'_{A_i}(x)} \right]' \leq 0$, $\forall x \in (z_o, c_2)$, $\mu_{A_i}(x) \neq \mu_{A_{i+1}}(x)$.

Então S possui um único ponto de equilíbrio, x^* em A^* , e $x^* \in (z_o, c_2]$.

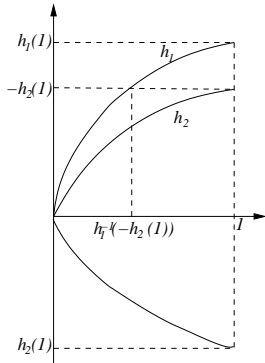


Figura 6: Função h_1 e h_2 .

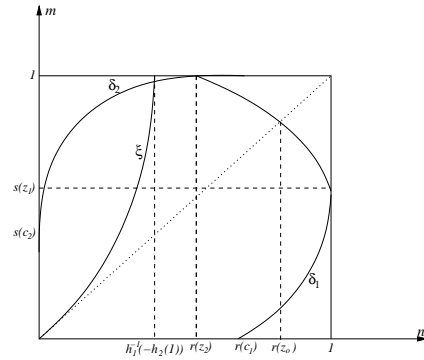


Figura 7: Função ξ , δ_1 e δ_2 .

Demonstração. Por motivo de simplicidade de notação consideraremos $r = \mu_{A_i}$, $s = \mu_{A_{i+1}}$, $f = \mu_B$ e $g = \mu_C$.

Inicialmente, observemos que dado $x \in (z_o, c_2]$ (Figura 4), x determina um único par $(n, m) \in [0, 1]^2$ tal que $n = r(x)$ e $m = s(x)$. Pela monotonicidade de

r , temos que para cada $n \in [0, r(z_o))$ existe um único $m \in [0, 1]$ tal que $n = r(x)$ e $m = s(x)$. Ou seja, cada par (n, m) nestas condições, determina um único $x \in (z_o, c_2]$.

Pelo Teorema 1 existe um ponto de equilíbrio $x^* \in [c_1, c_2] = [c_1, z_o] \cup (z_o, c_2]$. Dado $x \in [c_1, z_o] \Rightarrow m = s(x) \leq n = r(x)$. Então, pelo Lema 5 $x^* \notin [c_1, z_o] \Rightarrow x^* \in (z_o, c_2]$. Ou equivalentemente, existe um único (n^*, m^*) com $n^* \in [0, r(z_o))$ tal que $H(n^*, m^*) = 0$.

Como para cada $n \in [0, r(z_o))$, existe um único $m \in [0, 1]$ tal que $n = r(x)$ e $m = s(x)$, então podemos definir uma função $\delta_2 : [0, r(z_o)) \rightarrow [0, 1]$ tal que $m = \delta_2(n)$ (Figura 7). Observe também que δ_2 é contínua, pois r e s são contínuas Lima (1999a). Utilizando a regra da cadeia, a derivada de δ_2 é dada por:

$$\delta_2'(n) = \frac{s'(x)}{r'(x)} \xrightarrow{(iii)} \delta_2''(n) \leq 0, \forall n \in D_{\delta_2} \quad (4.13)$$

Pelo Lema 1 e Lema 2, h_1 e $-h_2$ são crescentes e pela condição (i), segue que (Figura 6):

$$\int_0^a tg(t)dt > - \int_b^0 tf(t)dt \Leftrightarrow h_1(1) > -h_2(1)$$

Então, dado $n \in [0, h_1^{-1}(-h_2(1))]$, existe um único $m \in [0, 1]$ tal que $h_1(n) = -h_2(m) \Leftrightarrow h_1(n) + h_2(m) = 0$. Daí, pode-se definir uma função injetiva ξ , $m = \xi(n)$ (Figura 7) tal que,

$$H^{-1}(0) = \{(n, m); m = \xi(n)\},$$

onde $H : [0, h_1^{-1}(-h_2(1))] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $H(n, m) = h_1(n) + h_2(m)$.

Como já vimos (Lema 1) que $\frac{\partial H}{\partial n} = h_1'(n) = \frac{(g^{-1}(n))^2}{2} > 0$ e (Lema 2) $\frac{\partial H}{\partial m} = h_2'(m) = -\frac{(f^{-1}(m))^2}{2} < 0$ então, pelo Teorema da Função Implícita (Lima, 1999a, pg. 160), ξ é k vezes diferenciável e, além disso:

$$\xi'(n) = -\frac{\frac{dh_1}{dn}}{\frac{dh_2}{dm}} = \left[\frac{g^{-1}(n)}{f^{-1}(m)} \right]^2 > 0, \forall n \in (0, h_1^{-1}(-h_2(1))), m \in (0, 1) \text{ e } m = \xi(n) \quad (4.14)$$

Logo, ξ é uma função estritamente crescente e como

$$H(0, 0) = 0 \text{ e } H(h_1^{-1}(-h_2(1)), 1) = 0$$

então $D_\xi = [0, h_1^{-1}(h_2(1))]$ e $Im_\xi = [0, 1]$.

Dado $m, n \in (0, 1)$ existe um único $p \in (b, 0)$ tal que $p = f^{-1}(m)$ e existe um único $q \in (0, a)$ tal que $q = g^{-1}(n)$, pois f e g são estritamente monótonas, por hipótese.

Do Lema 5 temos que $m \leq n \Rightarrow H(m, n) > 0$. Daí $H(m, n) = 0 \Rightarrow m > n$. Portanto, estamos interessados nos pares (m, n) tais que, $m > n$. Temos que,

$$m > n \Leftrightarrow f(p) > g(q) \quad (4.15)$$

Como f e g são monótonas, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange (ver Lima, 1999b, pg. 213–216), têm-se:

$$p = f^{-1}(m) \Leftrightarrow (f^{-1})'(m) = \frac{1}{f'(p)} \quad (4.16)$$

e

$$q = g^{-1}(n) \Leftrightarrow (g^{-1})'(n) = \frac{1}{g'(q)} \quad (4.17)$$

Então,

$$m > n \stackrel{(4.15)}{\Leftrightarrow} f(p) > g(q) \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \frac{g'(q)}{f'(p)} < \frac{p^3}{q^3} \stackrel{(4.16) \text{ e } (4.17)}{\Leftrightarrow} \frac{(f^{-1})'(m)}{(g^{-1})'(n)} < \frac{[f^{-1}(m)]^3}{[g^{-1}(n)]^3}.$$

Portanto,

$$m > n \Rightarrow (f^{-1})'(m)[g^{-1}(n)]^3 - (g^{-1})'(n)[f^{-1}(m)]^3 > 0. \quad (4.18)$$

Derivando ξ' , de (4.14), tem-se

$$\xi''(n) = \frac{-2g^{-1}(n)}{[f^{-1}(m)]^5} \{(f^{-1})'(m)[g^{-1}(n)]^3 - (g^{-1})'(n)[f^{-1}(m)]^3\}$$

e como $\frac{-2g^{-1}(n)}{[f^{-1}(m)]^5} > 0, \forall m, n \in (0, 1)$, de (4.18) tem-se,

$$\xi''(n) > 0, \forall n \in \overset{\circ}{D}_\xi \quad (4.19)$$

Tomemos agora $I = D_\xi \cap D_{\delta_2} = D_\xi \cap [0, r(z_o))$ e definamos a função $\phi : I \rightarrow [0, 1]$ tal que,

$$\phi(n) = \xi(n) - \delta_2(n) \quad (4.20)$$

Então, de (4.13) e (4.19) tem-se $\phi''(n) > 0, \forall n \in \overset{\circ}{I}$. Como $\xi(0) = 0$ e a condição (iv) $\Rightarrow \delta_2(0) > 0$, então tem-se $\phi(0) < 0$. Daí, em virtude do *Lema 3* temos que existe um único $n^* \in I$ tal que,

$$\phi(n^*) = 0 \stackrel{(4.20)}{\Leftrightarrow} \xi(n^*) = \delta_2(n^*) \quad (4.21)$$

Como $\xi = H^{-1}(0)$ então, temos que

$$0 = H(n^*, \xi(n^*)) \stackrel{(4.21)}{=} H(n^*, \delta_2(n^*))$$

Logo, existe um único $x^* \in (z_o, c_2]$, $n^* = r(x^*)$ e $m^* = \delta_2(n^*) = s(x^*)$ tal que,

$$\Delta(x^*) = \frac{H(n^*, m^*)}{A(n^*, m^*)} = 0,$$

o que conclui a demonstração do teorema.

4.2 Caso 2: $\mu_C(t) < \mu_B(-t)$

Teorema 4 (*Unicidade*) *Seja S um sistema p -fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$. Se as funções $\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}, \mu_B, \mu_C \in C^1$; μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ são monótonas por partes, μ_B e μ_C estritamente monótonas, tais que:*

- (i) $\mu_C(t) < \mu_B(-t), \forall t \in (0, a)$;
- (ii) $\frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} > \frac{p^3}{q^3}, \forall p \in \text{supp}(B), q \in \text{supp}(C)$ e $\mu_B(p) < \mu_C(q)$;
- (iii) $\left[\frac{\mu'_{A_i}(x)}{\mu'_{A_{i+1}}(x)} \right]' \leq 0, \forall x \in (c_1, z_o), \mu_{A_i}(x) \neq \mu_{A_{i+1}}(x)$.

Então S possui um único ponto de equilíbrio, x^* em A^* , e $x^* \in [c_1, z_o)$.

Demonstração 7 *Análoga à demonstração anterior.*

4.3 Comentários sobre os teoremas de unicidade

Quando não temos $\mu_C(t) > \mu_B(-t)$ ou $\mu_C(t) < \mu_B(-t)$ não é possível estabelecer condições gerais para unicidade do ponto de equilíbrio, como fizemos

nos casos anteriores. Por exemplo, consideremos um sistema p-fuzzy ilustrado na Figura 8. Este sistema possui um conjunto viável de equilíbrio, A^* , $A^* = A_1 \cap A_2$.

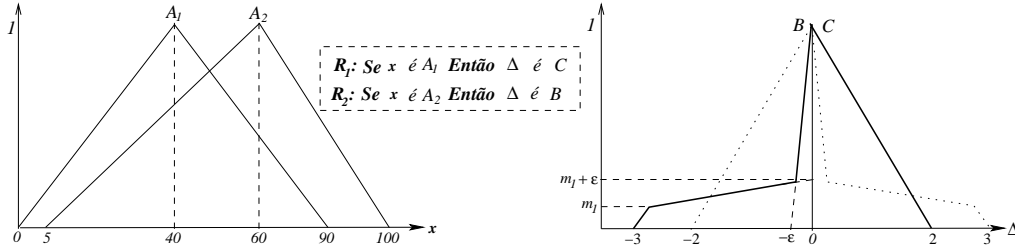


Figura 8: Sistema p-fuzzy: existência de mais de um ponto de equilíbrio.

Os conjuntos que descrevem a variável de entrada têm como funções de pertinências:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{40}x, & \text{se } 0 < x \leq 40 \\ \frac{-1}{50}x + \frac{9}{5}, & \text{se } 40 < x \leq 90 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e} \quad \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{55}x - \frac{1}{11}, & \text{se } 5 < x \leq 60 \\ \frac{-1}{40}x + \frac{5}{2}, & \text{se } 60 < x \leq 100 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e os conjuntos fuzzy que descrevem a variável de saída têm como funções de pertinências: $\mu_C(t) = \frac{-1}{2}t + 1$ e

$$\mu_B(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t + 1, & \text{se } -3 < t \leq 3(m_1 - 1) \\ \frac{\varepsilon}{3(m_1 - 1)}t + m_1 + \varepsilon, & \text{se } 3(m_1 - 1) < t \leq \frac{3\varepsilon(\varepsilon + m_1 - 1)(m_1 - 1)}{3(m_1 - 1) + \varepsilon^2} \\ \frac{1}{\varepsilon}t + 1, & \text{se } \frac{3\varepsilon(\varepsilon + m_1 - 1)(m_1 - 1)}{3(m_1 - 1) + \varepsilon^2} < t \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.22)$$

Se tomarmos em (4.22), por exemplo, $m_1 = 0.1$ e $\varepsilon = 0.1$ o sistema p-fuzzy obtido possui três pontos de equilíbrio em A^* , os quais podem ser visualizados na Figura 9, onde podemos observar a o gráfico da função Δ .

Observação 3 Observe que a função μ_B não é derivável em todos os pontos de $\text{supp}(B)$, exigência feita nos casos anteriores. Entretanto, claramente pode se construir uma função μ_B que seja derivável em todos os pontos de $\text{supp}(B)$. Por

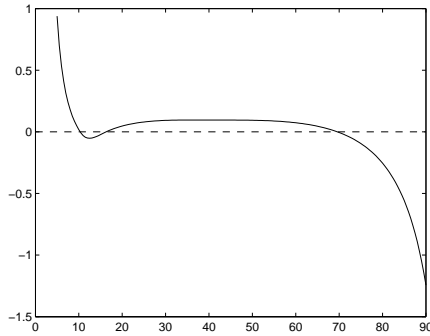


Figura 9: Função Δ com $m_1 = 0.1$ e $\varepsilon = 0.1$.

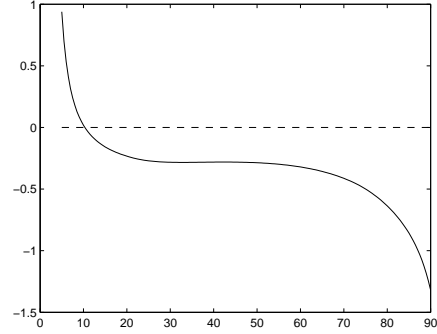


Figura 10: Função Δ com $\varepsilon = 0.4$ e $m_1 = 0.1$.

exemplo, se substituirmos a segunda sentença de μ_B por um polinômio de quarto grau adequado, obviamente μ_B será derivável em $\text{supp}(B)$.

Observação 4 *Se tomarmos, por exemplo, $\varepsilon = 0.3$ e $m_1 = 0.3$ temos que o sistema p -fuzzy obtido possui somente um ponto de equilíbrio (Figura 10). O que mostra que os Teoremas 3 e 4 estabelecem apenas condições suficientes para unicidade do ponto de equilíbrio.*

4.4 Aplicações dos teoremas de unicidades

Nesta seção, vamos listar algumas conseqüências importantes, referentes aos Teoremas 3 e 4 dados anteriores. Mostraremos que para funções de pertinências do tipo triangulares ou trapezoidais o ponto de equilíbrio é único em A^* . Antes porém,

Lema 7 *Se $\mu_B(p) > \mu_C(q)$ então $q > -p$, onde $p = \mu_B^{-1}(m)$ e $q = \mu_C^{-1}(n)$.*

Demonstração:

De fato, temos que $\mu_B(p) > \mu_C(q) \Rightarrow m > n$ daí usando o Lema 4 e o fato de $-\mu_B^{-1}$ ser decrescente, pois μ_B é crescente, então:

$$q = \mu_C^{-1}(n) > -\mu_B^{-1}(n) > -\mu_B^{-1}(m) = -p$$

Lema 8 Se $\mu_B(p) < \mu_C(q)$ então $q < -p$, onde $p = \mu_B^{-1}(m)$ e $q = \mu_C^{-1}(n)$.

Demonstração: Análoga à anterior.

Corolário 1 Seja S um sistema p -fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S . Se μ_{A_i} , $\mu_{A_{i+1}}$, μ_B e μ_C forem números fuzzy triangulares então S possui um único ponto de equilíbrio em A^* .

Demonstração:

Demonstraremos o caso em que S é $(\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}) \rightarrow (\mu_C, \mu_B)$. Se S for $(\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}) \rightarrow (\mu_B, \mu_C)$ a demonstração é análoga.

Se $a = b$ então μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ são simétricas, pela Proposição 1 o ponto de equilíbrio é único,

$$x^* = \mu_{A_i} \cap \mu_{A_{i+1}} = \max_{x \in A^*} [\min(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_{i+1}}(x))].$$

Suponhamos que $a > b$, então μ_{A_i} , $\mu_{A_{i+1}}$, μ_B e μ_C satisfazem o Teorema 3. De fato, (i) e (iii) são triviais. Como $\mu_B(t) = -\frac{1}{b}t + 1$ e $\mu_C(t) = -\frac{1}{a}t + 1$ então $\mu_B(p) > \mu_C(q) \Rightarrow \frac{b}{a} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} < \frac{p}{q}$. Do Lema 7 temos que $q > -p \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{p^3}{q^3}$ e, portanto tem-se $\frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} < \frac{p^3}{q^3}$ o que satisfaz (ii).

Suponhamos agora que $a < b$ então μ_{A_i} , $\mu_{A_{i+1}}$, μ_B e μ_C satisfazem o Teorema 4. De fato, (i) e (iii) são triviais e $\mu_B(p) < \mu_C(q) \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} > \frac{p}{q}$. Do Lema 8 temos que $q < -p \Rightarrow \frac{p}{q} > \frac{p^3}{q^3}$ e, portanto tem-se $\frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} > \frac{p^3}{q^3}$ o que satisfaz (ii). O que conclui a demonstração.

Corolário 2 Seja S um sistema p -fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S . Se μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ são números fuzzy trapezoidais e μ_B e μ_C são triangulares então S possui um único ponto de equilíbrio em A^* .

Demonstração: Análoga à demonstração do Corolário 1.

5 Exemplos

Nesta seção vamos apresentar alguns experimentos computacionais que comprovam a teoria matemática apresentada nas seções anteriores. Os experimentos

foram realizados no software Matlab[®]. Para o experimento consideraremos o que chamamos de sistemas p-fuzzy unidimensionais inibidos. Estes sistemas podem ser utilizados para modelar situações em que a variável de estado é crescente (respectivamente decrescente) com uma capacidade suporte (respectivamente limiar inferior). Situações que, em dinâmica populacional são descritas por modelos inibidos tais como: o de Gompertz, o de Verhulst, o de Von Bertalanffy, o Exponencial Assintótico etc.

O sistema p-fuzzy unidimensional inibido consiste das variáveis “população” (Figura 11) e “Variação” (Figura 12) e como base de regra:

1. Se população é *Baixa*(A_1) então variação é *Baixa positiva*(C);
2. Se população é *Média baixa*(A_2) então variação é *Média positiva*(D);
3. Se população é *Média*(A_3) então variação é *Alta positiva*(E);
4. Se população é *Média alta*(A_4) então variação é *Média positiva*(D);
5. Se população é *Alta*(A_5) então variação é *Baixa positiva*(C);
6. Se população é *Altíssima*(A_6) então variação é *Baixa negativa*(B);

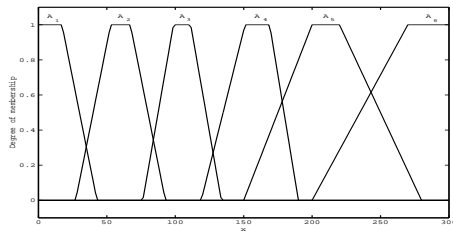


Figura 11: População (x).

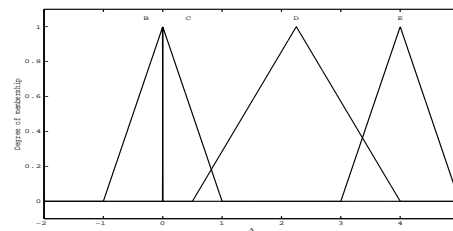


Figura 12: Variação (Δ): $\mu_C(t) = \mu_B(-t)$

5.1 Exemplo 1

Neste sistema as funções de pertinência de B e C são $\mu_B(t) = t + 1$ e $\mu_C(t) = 1 - t$ as quais são simétricas (Figura 12). Observando as regras podemos identificar uma região de equilíbrio, $A^* = [200, 280]$, onde $A^* = A_5 \cap A_6$ e cujas as funções de pertinências são:

$$\mu_{A_5}(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}(x - 150), & \text{se } 150 < x \leq 200 \\ 1, & \text{se } 200 < x \leq 220 \\ \frac{-1}{60}(x - 280), & \text{se } 220 < x \leq 270 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e } \mu_{A_6}(x) = \begin{cases} \frac{1}{70}(x - 200), & \text{se } 200 < x \leq 270 \\ 1, & \text{se } 270 < x \leq 300 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Um cálculo simples mostra que $\mu_{A_5} \cap \mu_{A_6} = 243.07$, o qual é o ponto de equilíbrio do sistema p-fuzzy, conforme proposição 1. O que confere com os experimentos numéricos dados na figura 15, onde é possível observar a solução do sistema p-fuzzy com condição inicial $x_o = 50$ convergindo para o ponto de equilíbrio $x^* = 243.07$ (curva em linha pontilhada).

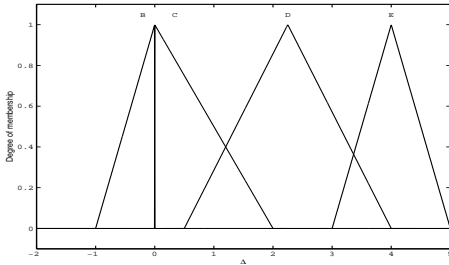


Figura 13: Variação (Δ): $\mu_C(t) > \mu_B(-t)$

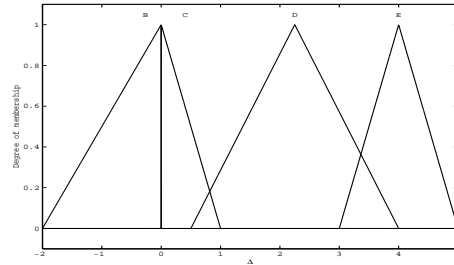


Figura 14: Variação (Δ): $\mu_C(t) < \mu_B(-t)$

5.2 Exemplo 2

Uma pequena modificação, apenas na função de pertinência do conjunto fuzzy C , $\mu_C(t) = \frac{-1}{2}(x - 2)$, temos $\mu_C(t) > \mu_B(-t)$ (figura 13). Obtemos um sistema p-fuzzy onde o ponto de equilíbrio é $x^* = 274.25 \in [243.07, 280]$, como pode ser visto na figura 15 (curva em linha contínua), o que está em conformidade com o teorema 3.

5.3 Exemplo 3

Ainda considerando o sistema p-fuzzy inicial, mudando apenas a função de pertinência do conjunto fuzzy B , $\mu_B(t) = \frac{1}{2}(x + 2)$ tem-se $\mu_C(t) < \mu_B(-t)$ (figura 14). Para este sistema o ponto de equilíbrio é $x^* = 206.42 \in [200, 243.07]$ como

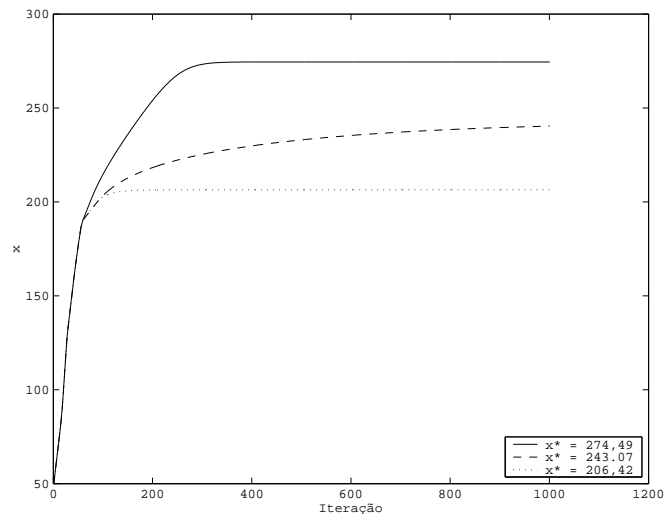


Figura 15: Equilíbrio dos sistemas p-fuzzy

pode ser visto na figura 15 (curva em linha tracejada), o que está em conformidade com o teorema 4.

6. Conclusões

Desenvolvemos novos conceitos e técnicas para modelagem, usando sistemas baseados em regras fuzzy. Enunciamos e demonstramos teoremas que estabelecem condições de existência e unicidade de ponto de equilíbrio num dado conjunto de equilíbrio de um sistema p-fuzzy unidimensional.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao apoio financeiro da CAPES.

Referências

Cuesta, F. e Gordillo, F. (1999). Stability analysis of nonlinear multivariable takagi-sugeno fuzzy control systems. *IEEE Trans. On Fuzzy Systems*, No.5

- Oct.*, 7 (5).
- Feng, G. (2004). Stability analysis of discrete-time fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE, Trans. on Fuzzy Systems*, No.1 Feb, 12.
- Fullér, R. (1995). Neural fuzzy systems. *IEEE, Trans. on Fuzzy Systems*, No.1 Feb.
- Gupta, M. M. (1985). Energetic stability of dynamic systems. *IEEE, Trans. on Fuzzy Systems, Man, and Cybernetics*, 15 (6).
- Lima, E. L. (1999a). *Curso de análise*, volume 2 of *Projeto Euclides*. SBM-IMPA, Rio de Janeiro/RJ.
- Lima, E. L. (1999b). *Curso de análise*, volume 1 of *Projeto Euclides*. SBM-IMPA, Rio de Janeiro/RJ.
- Mikael, J., Anders, R., e Karl, E. A. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems.
- Misukoshi, M. T. (2004). *Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP.
- Silva, J. D. M. (2005). *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos P-fuzzy com Aplicações em Biomatemática*. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP.
- Sugeno, M. e Taniguchi, T. (2004). On improvement of stability conditions for continuous mamdani-like fuzzy systems. *IEEE Trans. on Syst. and Cyber.*, 34:120–131.
- Tanaka, K., Griffin, M. F., e Wang, H. O. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE, Trans. on Fuzzy Systems*, 4 (1):116–132.
- Tanaka, K. e Sugeno, M. (1993). *Concept of Stability Margin for Fuzzy Systems and Design of Robust Fuzzy Controllers*, in “IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems”, San Francisco California, páginas 29–34.

Ying, H. (2005). Structure and stability analysis of general mamdani fuzzy dynamic models. *International Journal of Intelligent Systems*, 20:103–125.