

# Descarga de Água de Produção em Operações *offshore*: Modelagem Matemática, Aproximação Numérica e Simulação Computacional

Julio C. Vásquez<sup>1</sup>,

MAF, UCG, 15054-000, Goiania/GO.

João F. C. A. Meyer<sup>2</sup>,

DMA, IMECC – UNICAMP, 13083-859, Campinas/SP.

**Resumo.** Neste trabalho, é analisado o comportamento transiente da dispersão de água produzida decorrente da atividade *offshore*, através de simulação numérica. O processo de dispersão é modelado através de um sistema de E.D.P. que reúne as equações clássicas de Stokes e de Difusão-advvecção/reação em 3D, sendo que as velocidades obtidas na resolução numérica da I equação são usadas como parâmetro na equação de Difusão. Uma vez verificada existência e unicidade da solução da formulação variacional, são aplicados os métodos SUPG (de ordem 2) e Crank-Nicolson, para achar uma solução aproximada do problema original. Adicionalmente, estabelecemos algumas estimativas do erro induzido pelo método de Galerkin tanto no caso contínuo como no discreto no tempo.

**Palavras-chave:** *Equação de difusão-advvecção/reação; formulação variacional; equação de Stokes; elementos finitos; SUPG.*

---

<sup>1</sup>vasquez@ucg.br

<sup>2</sup>joni@ime.unicamp.br

# 1 Água de Produção: O Problema, Um Modelo

A poluição crônica das operações rotineiras dos navios representa muito mais perigo ao meio ambiente que a poluição aguda dos acidentes. Estudos realizados em 1990 mostram que entre 15 e 30% de todo o óleo despejado no Mar do Norte (19.080 toneladas) foi consequência de operações *off-shore*. Apesar das atividades *off-shore* ocorrerem longe da costa, a poluição decorrente gera alterações da qualidade ambiental. Principalmente o sufocamento do assoalho oceânico com alterações das comunidades bentônicas.

Traços de vários metais pesados, tais como Hg, Cd, Pb, Ni e Ag fazem parte deste efluente Oliveira e Oliveira (2000). Compostos orgânicos tais como os alifáticos, aromáticos, polares e ácidos graxos estão naturalmente presentes nas águas produzidas. Adicionalmente uma grande variedade de produtos químicos é adicionada para resolver ou prevenir problemas operacionais, embora estes últimos sejam necessários na fase inicial da produção, tornam-se complicações no processo de tratamento da água de produção.

## 1.1 Métodos de Tratamento da Água de Produção

Após o processo de separação gravitacional, a água produzida ainda possui um elevado teor de hidrocarbonetos que devem ser removidos antes do seu despejo no mar. Para tal, aplicam-se métodos diferenciados para remover compostos dispersos e compostos dissolvidos. A eficiência dessas tecnologias depende dos volumes envolvidos, constituição da água, e do espaço físico no caso de instalações *off-shore*, inevitavelmente limitados pelo custo operacional. Uma forma de avaliar a eficiência dos tratamentos da água oleosa é por meio da análise de amostras coletadas diariamente ao longo da planta de tratamento. Porém este procedimento tende a causar grandes alterações nas medidas do TOG e outros parâmetros que caracterizam a qualidade da água de produção Pereira e Travalloni (2000).

## 1.2 Impacto Ambiental

O impacto ambiental devido à água de produção é geralmente avaliado pela toxicidade dos constituintes e pela quantidade de compostos orgânicos e inorgânicos presentes nesta. De acordo com a PARCOM (Paris Commission on Operational Pollution) o Hg, Cd e seus compostos são as substâncias\* de toxicidade mais elevada. O despejo da água produzida no Brasil é regulado pelo IBAMA/CONAMA, a qual estabelece que o limite no caso de óleo e graxas é de 20(mg/L). Apesar das restrições relativas ao TOG, o efeito nocivo dos outros contaminantes não pode ser negligenciado.

## 1.3 O Modelo a ser Analisado

Logo que a água de produção é despejada no mar, as diferentes substâncias presentes nela experimentam processos de dispersão e, com alguma exceção de biodegradação, processos que, de acordo com as características desta atividade, acontecem devido ao fluxo, tanto pela difusão efetiva Marchuk (1986) como por advecção (decorrente da correnteza do mar), e também devido à volatilização e à absorção respectivamente. Isto nos levou a modelar o referido fenômeno através de sistemas que incluem a E.D.P de Difusão-Advecção/Reação.

Os efluentes da água de produção de uma unidade de produção irão geralmente afetar um volume de água do mar circunscrito a algumas centenas de metros de distância da unidade (Johnsen e *et al* (2000) e Kennicut e *et al* (1996)), cuja pluma se dispersará nas três dimensões, é plausível assumir que o domínio  $\Omega \subset R^3$  considerado é um paralelepípedo, tal como o ilustra a figura 1, a seguir.

Além disso, adotamos a seguir as seguintes notações:

$u(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}) \in \Omega_t = (0, T] \times \Omega$  representando a concentração de material presente na água de produção, na posição  $\mathbf{x} \in \Omega \subset R^3$  e no instante  $t$ .  $\alpha = \alpha(t, \mathbf{x}, u)$  é a função que descreve a difusividade efetiva desse material.

---

\*fazem parte da lista de produtos proibidos

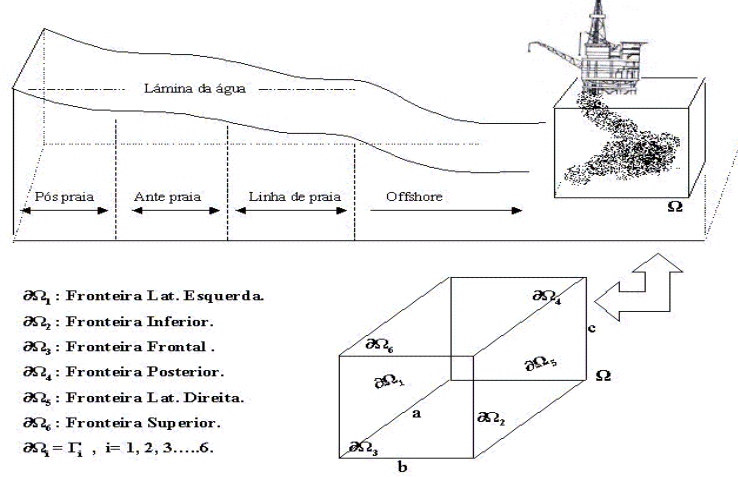


Figura 1: Domínio de Atuação

$W_1 = (w_1(\mathbf{x}, t), w_2(\mathbf{x}, t), w_3(\mathbf{x}, t))$  caracterizará o campo de velocidades do mar devido à circulação local, a marés e ventos. Denotamos com  $V$  a resultante da circulação local  $W_1$  e o campo  $W_2$  o qual é induzido pela natureza gravitatória das diferentes substâncias contaminantes que fazem seu ingresso no mar através da fonte  $f$ . Neste trabalho vamos considerar que a circulação local  $W_1$  tem comportamento estacionário e, sendo assim, consideraremos esse campo apenas como função da variável espacial. Apesar disto, é possível considerar a influência das marés através de uma mudança nas condições de fronteira<sup>†</sup> emulando a "variação temporal" da circulação local em torno da unidade *offshore*.

De um modo geral, se denotamos com  $\Gamma_N \subset \partial\Omega$  as fronteiras do oceano onde acontece a perda da substância, então esta é modelada através da condição

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} = k_N u, (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma_N, \quad (1.1)$$

<sup>†</sup>as quais permitem gerar  $W_1$  através da solução numérica das equações de Stokes

onde  $\eta$  é o vetor normal unitário exterior à superfície. Esta condição de tipo Robin indica que a taxa de passagem de contaminante através da fronteira é suposta diretamente proporcional à concentração da própria substância nesse local. Neste caso, temos que  $k_N = V \circ \eta$ . No caso em que  $k_{\Gamma_i} = 0$  temos que o fluxo através da fronteira  $\Gamma_i$  é nulo, i.e. não há perda nem ingresso da substância. No caso das fronteiras nas quais não se registra a presença das substâncias poluentes temos a condição de Dirichlet homogênea:

$$u = 0, (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma_D, \quad (1.2)$$

Assim,  $\partial\Omega = \Gamma = \overline{\Gamma_N \cup \Gamma_D}, \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ .

A função  $f : \Omega_t \rightarrow R$  representará o ingresso das substâncias contidas na água de produção, a mesma que acontece de maneira local ou pontual. A taxa da ação conjunta dos processos de volatilização, oxidação química e biodegradação dos constituintes do efluente será representada pela função  $\sigma = \sigma(t, \mathbf{x})$ .

As considerações acima permitem modelar nosso problema através da E.D.P.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - Div(-\alpha \nabla u + Vu) + \sigma u &= f, (t, \mathbf{x}) \in \Omega_t \\ u(0, \mathbf{x}) &= u_0(\mathbf{x}) \\ -\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial \eta} &= k_N u, (t, \mathbf{x}) \in \Gamma_N. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Neste, o campo de velocidades  $W_1$  corresponde à solução numérica das equações de Stokes:

$$\begin{aligned} \mu \Delta W_1 - grad(P) + f &= 0 \\ div W_1 &= 0 \\ W_1(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \\ \frac{\partial W_1}{\partial \eta} |_{\Gamma_h} &= h. \end{aligned}$$

Aqui,  $\Omega$  é um conjunto aberto e limitado do  $R^3$  tal que  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$  e  $\emptyset = \overline{\Gamma_g} \cap \overline{\Gamma_h}$ ,  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade,  $W_1$  é a velocidade,  $P$  é a pressão e  $f$  é a força do corpo (no nosso caso  $f = 0$ ).

A possibilidade de descontinuidade das funções correspondentes à fonte, aos parâmetros ou à condição inicial faz com que a equação (1.3) possa não admitir solução no sentido clássico. Em geral, as equações derivadas das leis de conservação não têm essa solução no sentido clássico (ver Evans (1993)), porém definem problemas bem postos considerando a definição de soluções generalizadas ou fracas.

## 2 A Formulação Variacional

As exigências de suavidade e diferenciabilidade sobre a função  $u$ , impostas por uma E.D.P. como (1.3) podem ser enfraquecidas através da introdução da derivada no sentido das distribuições, o que permite obter a formulação Variacional ou Fraca (F.V) associada a (1.3), formulação que apresenta diversas vantagens. A base teórica dos métodos de elementos finitos é a F.V. Introduzindo uma discretização do domínio de solução, aproximamos a solução contínua com uma apropriada função contínua por partes, e, com isto, o problema de resolvermos uma E.D.P se reduz a resolver sucessivos sistemas. A F.V associada a (1.3) é

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} | v\right)_\Omega - \alpha(\Delta u | v)_\Omega + (Div(Vu) | v)_\Omega = (f - \sigma u | v)_\Omega, \forall t \in (0, T], \quad (2.4)$$

$\forall v \in V \subset H^1(\Omega)$  e  $(\cdot | \cdot)_{(\Omega)}$  é o produto interno usual em  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ . De (4), com o recurso de instrumental analítico, obtem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} | v\right)_\Omega + \alpha(\nabla u | \nabla v)_\Omega + (V \circ \nabla u | v)_\Omega + k\langle u | v \rangle_{\Gamma_r} \\ = (f - \sigma u | v)_\Omega \quad \forall v \in V, \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aqui,  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Gamma_r}$  é o produto interno sobre a fronteira  $\Gamma_r$ . Um resultado devido a Lions (1961), garante a existência e unicidade de solução para uma

classe de problemas abstratos, e em particular para este, devidamente adequado aos objetivos deste trabalho.

## 2.1 Discretização Espaço-Temporal do Problema

Garantidas existência e unicidade da solução do problema variacional (2.5) em subespaços  $V$  de  $\mathcal{L}^2((0, T]; H^1(\Omega))$  podemos utilizar algum método numérico apropriado para aproximar adequadamente esta solução. O Método de Galerkin é um método que permite construir uma solução aproximada da F.V através de Elementos Finitos.

Seja  $V_h$  um subespaço de  $V$  de dimensão finita gerado pela base  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_h}\}$ . Assim podemos representar qualquer função deste espaço, e, por isso, a solução do problema (2.5) no subespaço  $V_h$ , como:

$$u_h(t, x) = \sum_{i=1}^{n_h} c_i(t) \varphi_i(x).$$

Substituindo  $u_h$  na formulação variacional (2.5) e uma vez que no método de Galerkin a formulação peso-residual é tal que as funções peso  $v$  são da mesma classe das funções base ou teste  $\varphi_i$ , temos :

$$\begin{aligned} \sum_i^{n_h} \frac{dc_i}{dt} (\varphi_i | \varphi_j)_\Omega + \sum_i^{n_h} \{ \alpha (\nabla \varphi_i | | \nabla \varphi_j)_\Omega + k \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle_{\Gamma_r} + (V \circ \nabla \varphi_i | \varphi_j)_\Omega \} c_i \\ = (f - \sigma \varphi_i | \varphi_j)_\Omega, \forall \varphi_j \in B, \end{aligned}$$

equação que equivale ao sistema linear de E.D.O.:

$$A(\varphi_i, \varphi_j) \dot{c}(t) + B(\varphi_i, \varphi_j) c(t) = d(f, \varphi_j), \quad (2.6)$$

onde  $B = (b_{ij})$ ,  $A = (a_{ij})$  e  $d = d_j$  são dados por :

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \alpha (\nabla \varphi_i | | \nabla \varphi_j)_\Omega + (V \nabla \circ \varphi_i | \varphi_j)_\Omega + \sigma (\varphi_i | \varphi_j)_\Omega + k \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle_{\Gamma_r}, \\ a_{i,j} &= (\varphi_i | \varphi_j)_\Omega, \quad d_j = (f | \varphi_j)_\Omega. \quad i, j = 1, 2, \dots, n_h. \end{aligned}$$

Dos diferentes tipos de elementos finitos que podem ser escolhidos para discretizar um determinado domínio bidimensional, em geral os triângulos

são os mais adequados para descrever domínios cuja geometria é mais irregular. Assim, para domínios tridimensionais, os tetraedros são uma extensão natural e conveniente desses elementos triangulares.

Denotemos com  $\{\Omega_e\}_{e=1}^{NT}$  uma família finita de  $NT$  tetraedros  $\Omega_e$ , dois a dois disjuntos ou tendo como interseção no máximo, uma face, uma aresta ou vértice e tais que :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{NT} \Omega_e,$$

e associamos a esta malha o parâmetro  $h$  dado por  $h = \max_e \{diam(\Omega_e)\}$  e. Denotamos então esta família  $\{\Omega_e\}_{e=1}^{NT}$  por  $\Upsilon_h$ . Consideramos  $V_h$  como o espaço das funções polinomiais de três variáveis de grau menor ou igual a 2 definidas em  $\Omega_e$ .

## 2.2 Estimativas de Erro

A estimativa abaixo corresponde ao erro cometido quando aplicado o Método de Galerkin contínuo no tempo para achar a solução aproximada  $u_h$  do problema (2.6).

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))}^2 &\leq e^{\lambda T} (C_0 \|u_0 - u_{h_0}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 - C_1 \|u - u_h\|_{\mathcal{L}^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \\ &\quad + C_2 (\|u - \phi\|_{\mathcal{L}^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|u - \phi\|_{\mathcal{L}^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + \|\frac{\partial(u - \phi)}{\partial t}\|_{\mathcal{L}^2(0,T;\mathcal{L}^2(\Omega))}^2) \quad \forall \phi \in \mathcal{L}^2(0, T; V_h), \end{aligned}$$

onde:

$$C_0 = \frac{1+2\epsilon+\frac{1}{2\epsilon}}{1-2\epsilon}, C_1 = \frac{\tilde{c}_1-2\epsilon(\lambda+1)}{1-2\epsilon}, C_2 = \frac{\tilde{c}_2+\tilde{c}_3+\frac{1}{2\epsilon}}{1-2\epsilon}, \quad e \quad \epsilon < 1/2.$$

Observe-se que a cota superior do erro cresce exponencialmente com o valor  $T$ . Do ponto de vista teórico isto indica uma dificuldade para as realizações de estimativas para períodos demasiado prolongados, o que não é o caso, pois nossos processos acontecem em intervalos de tempo relativamente curtos (Fay *in* Cantão (1998)). Douglas e Dupont (1970) obtêm outro limitante para



estimar o erro independentemente de  $T$  para o caso não linear e sob a hipótese de  $a$  ser continuamente Lipsitziana em  $v$ . Os autores fazem também algumas observações e simplificações decorrentes no caso em que a equação é linear.

A discretização temporal de (2.6), feita através do método de diferenças finitas de Crank-Nicolson, propocionará uma solução aproximada  $U$ . Para tal, consideramos a formulação desta equação em termos de  $t = (m + \frac{1}{2})\Delta t$  onde  $m$  é inteiro não negativo e  $\Delta t$  é o passo no tempo. É possível mostrar que

$$\begin{aligned} a_1 \|z_M\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 + lc_2^{-1}c_3\Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \|z_{m+\frac{1}{2}}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ + 2L\Delta t \sum_{m=0}^{M-1} a_2 \|(u - \phi)_{m+\frac{1}{2}}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{c_2^{-1}}{2\delta_1(\Delta t)^2} \sum_{m=1}^{M-1} \|(u - \phi)_{m+\frac{1}{2}} - (u - \phi)_{m-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 \\ + a_3 \|(u_0 - \phi(0, \cdot))\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\delta_2c_2} \|(u - \phi)_{M-1}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2\delta_3c_2} \|(u - \phi)_{\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 + \vartheta(\Delta t)^5, \end{aligned}$$

$$\forall \phi \in \mathcal{L}^2(0, T; V_h),$$

onde  $z_m = u_m - U_m$  e

- (i)  $a_1 = (F(\Delta t))^M - \frac{2\delta_2}{c_2}$ ,
- (ii)  $a_2 = (\mu_4 + \mu_5 + \mu_6)$  e
- (iii)  $a_3 = (1 + 2c_2^{-1}\delta_3 - l\Delta t)$ .

Em outras palavras, com este resultado, obtem-se um limitante como aquele que foi obtido anteriormente, só que, agora, para a aproximação de Galerkin discreta, garantindo a qualidade das aproximações numéricas pelos métodos escolhidos.

### 2.3 Oscilações Numéricas: SUPG

Existe a possibilidade de que as soluções numéricas obtidas através do Método de Galerkin sejam corrompidas por oscilações, e isto poderá acon-

tecer em casos de problemas com convecção ou advecção dominantes. Estas oscilações indesejáveis podem ser evitadas fazendo um adequado refinamento da malha, mas o preço a pagar é um alto custo computacional. Uma alternativa para esta opção é o método Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) introduzido por Brooks e Hughes (1982), no qual a ideia básica é modificar as funções peso residual para o termo convectivo do Método de Galerkin, perturbação que só atua na direção do fluxo, evitando a excessiva difusibilidade presente nas soluções obtidas através dos outros métodos, sem introduzir difusão artificial e perder consistência como alguns métodos Upwind. Assim, as funções modificadas são da forma:

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \psi_i,$$

onde  $\varphi_i$  são as funções que geram  $V_{h0}$ , e  $\psi_i$  são funções descontínuas que só atuam na direção do campo de velocidades, as quais dependem tanto de  $V$  como do número de Péclet. Como em Codina (1998), neste trabalho consideramos:

$$\psi_i = \tau V \circ \nabla \varphi_i,$$

onde  $\tau$  é um parâmetro, escolhido de tal forma a se obter uma solução nodalmente exata ou muito próxima desta. Para problemas de dimensão espacial maior que 1 uma estratégia amplamente adotada é proceder como no caso unidimensional, no qual se atinge uma solução nodalmente exata para elementos finitos lineares, quando:

$$\tau = (\coth(Pe) - \frac{1}{Pe}) \frac{1}{2|V|},$$

onde  $Pe = \frac{|V|h}{2\alpha}$  é o número de Péclet, sendo  $\alpha$  o coeficiente de difusão,  $V$  é a velocidade unidimensional respectivamente, e  $h$  representa o comprimento de um elemento da malha uniforme. O processo para calcular  $\tau_e$  é conforme o procedimento que aparece em Codina (1998); Codina et al. (1992), já incorporado com sucesso em diversos trabalhos correlatos (Cantão (1998) e De Oliveira (2003)).

## 2.4 Implementação:

Foram implementados programas em MATLAB versão 6.5 para a confecção da malha de elementos finitos e do campo de velocidades. Este último foi obtido através da solução numérica da equação de Stokes com as condições de fronteira:  $V(x, y, z) = (v_1(x, z), v_2, v_3)$ , onde:  $v_1(x, z) = \frac{V_0(a-x)(x+a)z(2c-z)}{(ac)^2}$ , sendo as duas últimas componentes constantes.

## 3 Resultados: Simulações

Devido à natureza diferente dos diversos compostos da água de produção, o estudo do comportamento espaço-temporal da pluma de água de produção é feito como em Johnsen e *et al* (2000) e Kennicut e *et al* (1996), através da análise individual dos grupos de constituintes mais representativos levando em consideração suas características físico-químicas durante sua descarga no ambiente aquático.

Nos diversos cenários é feita uma discretização do domínio  $\Omega$ , atribuindo aos parâmetros do domínio os seguintes valores:

Tabela 1: Parâmetros da discretização espacial do domínio

Parâmetros	Valores (km)
a	1.8
b	0.9
c	0.15
dx (nx=18)	0.1
dy (ny=9)	0.1
dz (nz =3)	0.05

O tamanho do passo do tempo adotado será  $dt = 0,03125$ , tal que 1 hora de simulação equivalente a 32 iterações (ou passos) no tempo. Além disso, consideramos uma fonte pontual e constante, localizada numa determinada profundidade, algo que corresponde à situação estudada.

As taxas de degradação biológica  $\sigma$  dos principais constituintes da água de produção, serão assumidas variáveis apenas com a profundidade. De tal forma que:

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_1 & 0 \leq z < \frac{c}{3} \\ \sigma_2 & \frac{c}{3} \leq z < \frac{2c}{3} \\ \sigma_3 & \frac{2c}{3} \leq z \leq c, \end{cases}$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  são constantes cujos valores são atribuídos de acordo com a natureza da substância em questão.

No caso do campo  $W_2$ , o qual é induzido pela natureza gravitatória das diferentes substâncias contaminantes que ingressam no mar através da fonte  $f$ , é considerado de tal forma que  $W(x, y, z) = (0, 0, v_3)$ , onde  $v_3$  é constante e seu valor dependerá exclusivamente da natureza da substância a ser analisada, podendo ser positiva, negativa ou nula, para o caso de substâncias leves como PAHs(2-3 Anéis), Metais pesados e óleo disperso respectivamente. A seguir, em (3.1) as simulações do óleo disperso, caso ilustrativo do trabalho feito nas três situações.

### 3.1 Dispersão de óleo

Óleo disperso é um dos constituintes da água de produção que mais atenção recebe por parte das entidades de fiscalização do meio ambiente. Está presente em gotículas e encontra-se suspenso na fase aquosa. Sua concentração na água de produção depende da sua densidade, da tensão superficial entre o óleo e as fases da água, do tipo e eficiência do tratamento químico (ver Site: Environmental Assessment Division (2004)). A natureza físico-química desta substância permite, neste cenário, considerarmos que não há maior influência da força gravitatória sobre ele, i.e., a componente vertical do campo  $W_2$  é nula.

Ressaltamos que neste cenário a fonte foi desligada após 3 três horas de funcionamento. Os valores adotados para a difusividade e o decaimento são da mesma ordem de grandeza que aqueles utilizados nos trabalhos de Cantão

Tabela 2: Parâmetros do modelo utilizados na simulação do óleo disperso

Parâmetro	Valor
$\alpha$	$0.003 km^2/h$
$\sigma$	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.02/h, \sigma_3 = 0.1/h$
$(k_N)$	$k_2 = k_6 = 0, k_N = V \circ \eta_N (km/h)$
Vazão(fonte)	$1 (g/L)/h$

(1998) e De Oliveira (2003). Para efeitos de uma melhor visualização e uma adequada análise dos resultados das diferentes simulações, achamos conveniente exibir o comportamento espaço-temporal da concentração de cada substância, num mesmo nível de altura  $z$ . Para todos os diferentes cenários foram considerados os níveis correspondentes a  $z = 0, z = \frac{c}{3}, z = \frac{2c}{3}$  e  $z = c$  sendo que o primeiro e último nível correspondem ao fundo do mar e à superfície respectivamente.

### 3.2 Comentários dos resultados

Na Figura 2, os gráficos (a) mostram que após três horas, a concentração do óleo na região que corresponde a  $z = \frac{c}{3}$  é maior que na altura correspondente a  $z = \frac{2c}{3}$  e a concentração de óleo nesta profundidade é menor do que na superfície ( $z = c$ ). Como a correnteza decresce com a profundidade, então a substância se dispersa mais na superfície do que em qualquer outro nível de profundidade provocando desta maneira uma menor concentração em cada ponto do domínio. Outro fator que contribui para isto é que a taxa de degradação é maior na superfície. Além disso, nos três casos temos um deslocamento da pluma, predominante na direção do eixo  $y$ , e isto se deve à correnteza ser predominante nessa direção.

Os gráficos (b) desta mesma figura correspondem à concentração do óleo na superfície após uma, duas e três horas respectivamente. Claramente apreciam-se os efeitos de difusão e de transporte ao longo do tempo, uma vez

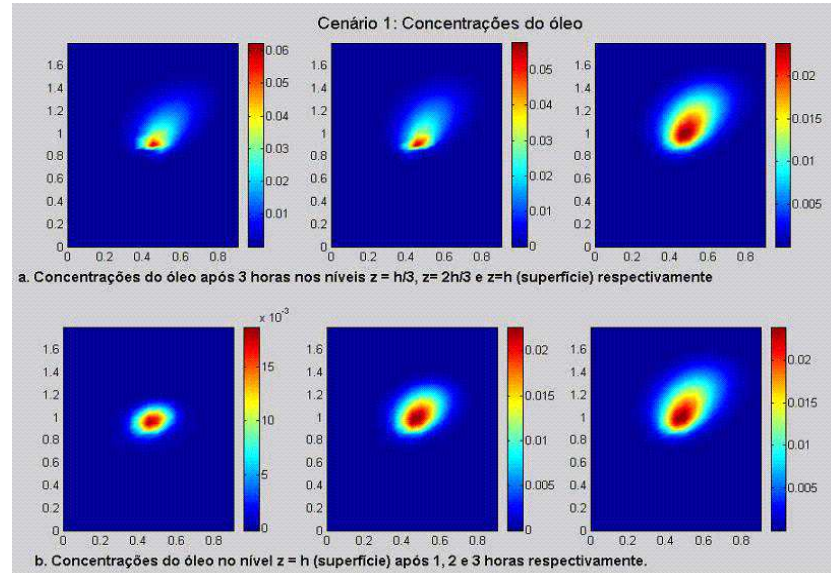


Figura 2: Concentração de óleo disperso

que a fonte se mantém ligada constantemente durante estas três horas.

## 4 Conclusões

Os gráficos das simulações dos diferentes cenários revelam resultados compatíveis com o esperado comportamento espaço-temporal das diversas substâncias mencionadas quando influenciadas por fenômenos de difusão e dispersão, sob determinadas condições de fronteira e seus respectivos parâmetros.

Por outro lado, este texto apresenta de modo original o tratamento teórico que leva à garantia de convergência dos métodos de Galerkin discreto e contínuo nas situações abordadas. Esta situação abrange a inclusão no modelo e no tratamento algorítmico da variabilidade do coeficiente das

degradações, da dependência espaço-temporal do perfil de velocidades, e, desde que de modo adequado, da dependência de alguns dos parâmetros da própria concentração do efluente.

Apesar de termos considerado um domínio bastante regular, é perfeitamente possível modelar o processo de dispersão da água de produção em domínios de geometrias irregulares, bastando para isto fazer pequenas modificações no programa principal cujo código numérico aparece no apêndice deste trabalho. Em outras palavras, os resultados não dependeram da geometria do domínio ainda que se apóiem no uso de tetraedros.

Acreditamos que este modelo, uma vez calibrado, venha poder ser instrumento de apoio na avaliação do impacto ao ambiente marinho devido à atividade *offshore*, inclusive na fase de projetos tanto no dimensionamento das unidades quanto aos efeitos resultantes da localização.

Como sabemos, o tipo de informação requerido pelas instituições de fiscalização da qualidade ambiental deve ser tanto quantitativo como qualitativo e determinado em tempo real. Uma vez que os resultados das simulações podem ser tanto qualitativos quanto quantitativos, e que o programa demanda alguns minutos (menos de 5 minutos<sup>‡</sup>) então podemos considerar este trabalho como uma ferramenta adicional na tomada de decisões e procedimentos para avaliação do impacto em ambientes marinhos devido à descarga de água de produção.

## Referências

Brooks, A. N. e Hughes, T. J. R. (1982). Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259.

---

<sup>‡</sup>Pentium 4, 2.4 GHz, 512 MB Memória Ram e Sistema Operacional Windows.

- Cantão, R. F. (1998). Modelagem e simulação numérica de derrames de óleo no canal de São Sebastião, SP. Dissertação de Mestrado, IMECC–UNICAMP, Campinas/SP.
- Codina, R. (1998). Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 156:185–210.
- Codina, R., Oñate, E., e Cervera, M. (1992). The intrinsic time for the streamline upwind/petrov-galerkin formulation using quadratic elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94:239–262.
- De Oliveira, R. F. (2003). *O comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na Baía de Ilha Grande/RJ: modelagem, análise numérica e simulações*. Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas/SP.
- Douglas, J. e Dupont, T. (1970). Galerkin methods for parabolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 7(4):1575–1626.
- Evans, L. C. (1993). *Partial Differential Equations*, volume 3A of *Berkeley Mathematics Lecture Notes*. Berkeley Univ. Press, San Francisco.
- Johnsen, S. e *et al* (2000). The environmental impact factor: A proposed tool for produced water reduction, management and regulation. Stavanger Norway. SPE-paper No. 61178. International Conference on Health, Safety and the Environment in Oil and Gas Exploration and Production.
- Kennicut, M. C. e *et al* (1996). Geochemical patterns in sediments near offshore production platforms. *Can. Journal Aquat. Science*, 53:2554–2566.
- Lions, J. L. (1961). *Equations Diffrentelles Operationelles et Problèmes aux Limites*. Springer, Berlin.
- Marchuk, G. I. (1986). *Mathematical models in environmental problems*, volume 16 of *Studies in Mathematical and its Applications*. North-Holland, Amsterdam.



Oliveira, G. R. e Oliveira, M. K. (2000). Remoção de contaminantes tóxicos dos efluentes líquidos oriundos da atividade de produção de petróleo no mar. *Bol. Tec. Petrobras*, 43(2):129–136.

Pereira, O. A. e Travalloni, A. M. (2000). Metodologia experimental de amostragem isocinética para efluentes. *Bol. Tec. Petrobras*, 43(1):62–68.

Site: Environmental Assessment Division (2004). A white paper describing produced water from production of crude oil, natural gas, and coal bed methane:. *URL*: [www.ead.anl.gov/pub/dsp\\$\\_detail.cfm?PubID=1715\\$](http://www.ead.anl.gov/pub/dsp$_detail.cfm?PubID=1715$).

