

Um Modelo Presa-Predador e a Morte Súbita dos Citros

Magda S. Peixoto,¹ Laécio C. Barros,² Rodney C. Bassanezi³
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC - UNICAMP,
13083-859, Campinas/SP.

Resumo. Nesse artigo estudamos a interação entre pulgões (supostos insetos transmissores do vírus da Morte Súbita dos Citros) e joaninhas (insetos predadores de pulgões) por meio de um sistema do tipo presa-predador, baseado em regras fuzzy. A partir do retrato de fase obtido, um modelo clássico do tipo Holling-Tanner é ajustado com o objetivo de encontrar seus parâmetros, os quais têm importantes interpretações biológicas.

Palavras-chave: conjuntos fuzzy, base de regras fuzzy, pulgões, joaninhas.

1. Introdução

A Morte Súbita dos Citros (MSC) é uma doença que vem causando sérios prejuízos aos citricultores, chegando ao extremo de provocar a morte de grandes plantações no Estado de São Paulo.

A subenxertia, técnica de substituição do porta-enxerto de espécie intolerante por outro tolerante, tem sido a solução para o controle da MSC.

¹magdapeixoto@yahoo.com.br

²laeciocb@ime.unicamp.br

³rodney@ime.unicamp.br

Para as árvores contaminadas, pesquisas mostram que os vasos do floema do porta-enxerto, que levam os produtos gerados na fotossíntese para as raízes, ficam bloqueados e degenerados. Sem alimento, as raízes apodrecem, a árvore definha e morre (Bassanezi et al., 2004).

Pesquisadores acreditam que tal doença seja causada por um vírus transmitido por insetos conhecidos como pulgões (FAPESP, 2004). Dentre os predadores mais conhecidos em citros, as joaninhas, pertencentes à Ordem *Coleoptera* e Família *Coccinellidae*, são importantes agentes de controle biológico, pois se alimentam de pulgões. Consideraremos heterogeneidade na classe dos predadores, já que temos informações que, dependendo do estágio, cada indivíduo tem potencial de predação bastante diferenciado. Na verdade, sabe-se que cada larva desses predadores pode consumir até 200 pulgões/dia e os adultos predam uma média de 20 pulgões/dia (Gravena, 2003).

2 Preliminares

Para um melhor entendimento do artigo faremos um pequeno resumo sobre o que será aqui utilizado da lógica fuzzy (Barros e Bassanezi, 2005; Peixoto, 2005; Pedrycz e Gomide, 1998).

Um subconjunto (clássico) A do universo U pode ser representado por sua função característica dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Assim, a função característica descreve completamente o conjunto A , uma vez que indica quais elementos do conjunto U são elementos de A .

Permitindo uma espécie de “relaxamento” no conjunto imagem da função característica de um conjunto foi que Zadeh formulou matematicamente um subconjunto fuzzy (Zadeh, 1965).

Definimos um subconjunto fuzzy A de U , ou simplesmente conjunto fuzzy, por meio da função de pertinência $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$, em que o número

$\mu_A(x)$ representa o grau de pertinência do elemento x ao subconjunto fuzzy A .

Um sistema baseado em regras fuzzy possui, basicamente, quatro componentes: um processador de entrada (ou fuzzificador), um conjunto de regras linguísticas, um método de inferência fuzzy e um processador de saída (ou defuzzificador), gerando um número real como saída. A Figura 1 ilustra um sistema fuzzy.

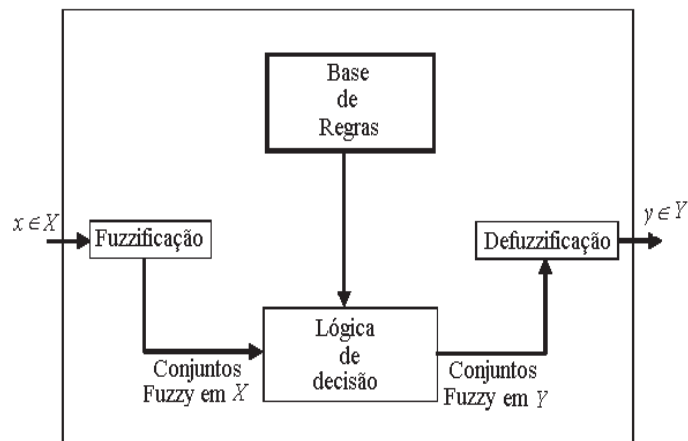


Figura 1: Arquitetura de sistemas baseados em regras fuzzy.

A fuzzificação é o processo pelo qual os valores de entrada do sistema são convertidos para conjuntos fuzzy, com as respectivas faixas de valores onde estão definidos. É um mapeamento do domínio de números reais para o domínio fuzzy.

A base de regras caracteriza os objetivos e a estratégia utilizados por especialistas na área, por meio de um conjunto de regras linguísticas. Um especialista humano, entrevistado para ajudar a formular o conjunto de regras fuzzy, pode articular *associações de entradas/saídas linguísticas*. Assim, sistemas fuzzy podem produzir estimativas de um sistema não linear complexo sem recorrer a modelos matemáticos. Nesse escopo, a metodologia fuzzy é um método de estimativa de entrada e saída livre de modelos matemáticos

(Shaw e Simões, 1999). É justamente esse nosso objetivo, modelar a interação presa-predador sem uso de equações, apenas com regras construídas com o auxílio de especialistas. Por exemplo, considere um controlador fuzzy simples de 2 entradas e 1 saída, consistindo de apenas duas regras:

$$R_1: \text{SE } x \text{ é } A_1 \text{ E } y \text{ é } B_1 \text{ ENTÃO } z \text{ é } C_1$$

$$R_2: \text{SE } x \text{ é } A_2 \text{ E } y \text{ é } B_2 \text{ ENTÃO } z \text{ é } C_2$$

onde A_i, B_i, C_i são conjuntos fuzzy.

A lógica de tomada de decisões, incorporada na estrutura de inferência da base de regras, usa implicações fuzzy para simular tomadas de decisão humanas. Ela gera ações - conseqüentes - inferidas a partir de um conjunto de condições de entrada - antecedentes.

O método de inferência que utilizaremos em nosso trabalho é o de Mamdani Pedrycz e Gomide (1998), que agrega as regras por meio do operador lógico OU, modelado pelo operador máximo \vee e, em cada regra, os operadores lógicos E e ENTÃO são modelados pelo operador mínimo \wedge . Para ilustrar o método vamos usar apenas duas regras genéricas, do tipo daquelas que aparecem na base de regras do exemplo acima, cada uma com duas entradas e uma saída (Figura 2).

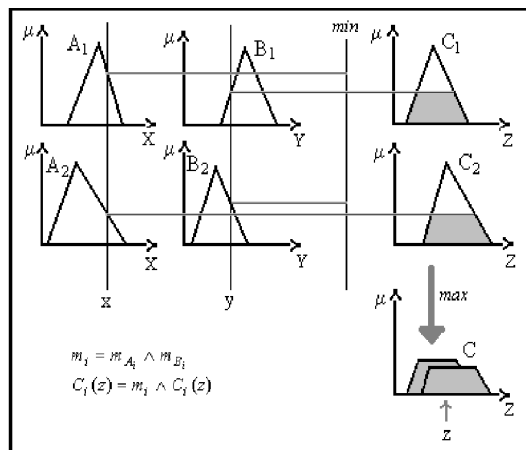


Figura 2: Método de Inferência de Mamdani.

Por fim, na defuzzificação, o valor da variável lingüística de saída, inferida pelas regras fuzzy, é traduzida num valor real. O objetivo é obter-se um único número real que melhor represente os valores fuzzy inferidos da variável lingüística de saída. Para selecionar o método apropriado pode-se utilizar um enfoque baseado no centróide ou nos valores máximos que ocorrem na função de pertinência resultante.

O método do Centro de Gravidade ou Centróide é a técnica de defuzzificação mais comumente usada. Pode ser compreendido como uma média ponderada, onde $\mu_A(x)$ funciona como o peso do valor x .

Se x é discreto, então a defuzzificação do conjunto fuzzy A é dada por:

$$\bar{z} = \frac{\sum_x \mu_A(x)x}{\sum_x \mu_A(x)}.$$

Da mesma forma, se x é contínuo, então,

$$\bar{z} = \frac{\int \mu_A(x)x dx}{\int \mu_A(x) dx}.$$

3 O Modelo

Nesse trabalho propomos um modelo do tipo presa-predador, baseado em regras fuzzy, que represente a interação entre pulgões (presa) e joaninhas (predador) na citricultura. Levando em conta que cada larva desses predadores pode consumir até 200 pulgões/dia e os adultos predam uma média de 20 pulgões/dia, consideramos que os predadores são diferenciados de acordo com sua força de predação, segundo uma função de pertinência à classe dos predadores como,

$$P_{y_i} = \begin{cases} 1, & \text{se larva;} \\ 0.1, & \text{se adulto} \end{cases}$$

e o **potencial de predação** de uma população de predadores como sendo $P_y = p_1 + 0.1 * p_2$, onde p_1 é a quantidade de larvas desta população, p_2 é a população de adultos.

As variáveis de estado, entradas do sistema, são quantidade de presas e a potencialidade dos predadores. As saídas são as variações das entradas. Porém, um conhecimento preciso envolvendo as variáveis de entradas e suas taxas de variação não está disponível. O que se tem sobre o fenômeno não é suficiente para expressar as taxas de variações como funções dos estados. Isso implica a impossibilidade de modelar a dinâmica do sistema por meio de um sistema de equações diferenciais como é feito de costume. Por outro lado, a partir de informações qualitativas, dadas por especialistas, em particular entomologistas, é possível propor regras que relacione ainda que parcialmente, as variáveis de estado, com suas variações. Nesse sentido, o que se propõe aqui é a substituição das clássicas equações diferenciais por uma base de regras fuzzy para se estudar a evolução do fenômeno. As regras são do tipo: “*Se a quantidade de presa é alta e o potencial de predação é muito baixo, então a variação de presas aumenta pouco e a variação do potencial de predação aumenta muito*”.

Utilizamos o Método de Inferência de Mamdani e o método de defuzzificação do Centro de Gravidade para obter as taxas de variação de presas e do potencial de predação.

Em cada instante t , o número de presas e o potencial de predação são dados pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s)ds \\ P_y(t) = P_y(t_0) + \int_{t_0}^t P_y'(s)ds \end{cases} \quad (3.1)$$

Nas simulações numéricas realizadas procuramos observar a variação da quantidade de presas e do potencial de predação. Para isso consideramos um número inicial x_0 de presas e um número inicial P_{y0} de potencial de predação. A partir das condições iniciais o sistema fuzzy produz as saídas x' e P_y' . Com esses últimos valores, atualizamos x e P_y em cada iteração fazendo:

$$\begin{cases} x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(s) ds \\ P_y(t_{i+1}) = P_y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P'_y(s) ds \end{cases} \quad (3.2)$$

Finalmente, para resolver as integrais acima utilizamos a Regra dos Trapézios, já que o sistema fuzzy fornece x' e P'_y em cada iteração t_i . Assim o sistema (3.2) passa a ser:

$$\begin{cases} x(t_{i+1}) = x(t_i) + \frac{1}{2}[x'(t_{i+1}) + x'(t_i)] \\ P_y(t_{i+1}) = P_y(t_i) + \frac{1}{2}[P'_y(t_{i+1}) + P'_y(t_i)] \end{cases} \quad (3.3)$$

Agora, utilizando (3.3) e sendo $t_i = t_0 + i$ e $t_0 = 0$, obtemos os valores de x e P_y , e assim sucessivamente.

A evolução dos contingentes populacionais de presas e potencial de predação ao longo do tempo para o modelo fuzzy, juntamente com o respectivo plano de fase, estão representados nas Figuras 3 e 4, para diferentes condições iniciais.

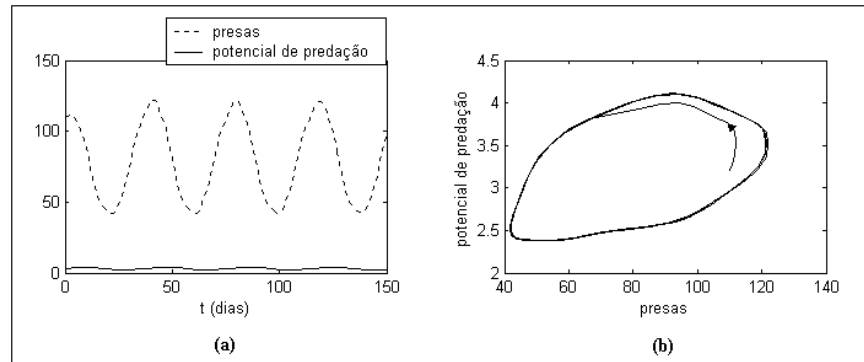


Figura 3: (a) Evolução dos contingentes populacionais ao longo do tempo e (b) Plano de fase do modelo fuzzy, para $x_0 = 110$ e $P_{y0} = 3, 2$.

Queremos ressaltar que mesmo sem equações, o modelo produz um plano de fase onde as trajetórias que parecem convergir para um ciclo limite e mantém uma periodicidade.

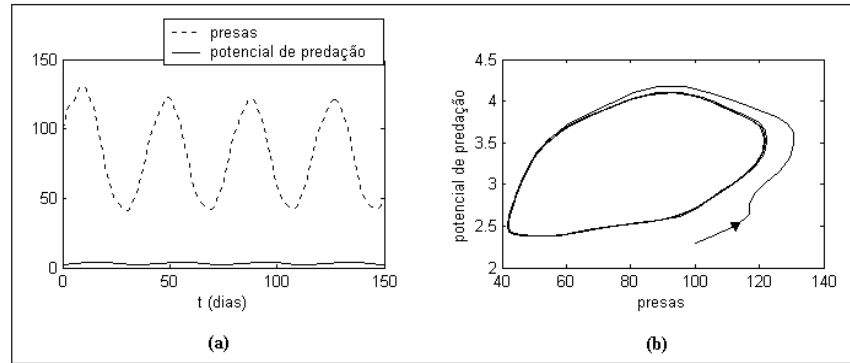


Figura 4: (a) Evolução dos contingentes populacionais ao longo do tempo e (b) Plano de fase do modelo fuzzy, para $x_0 = 100$ e $P_{y0} = 2,3$.

4 Modelo Holling-Tanner

A seguir vamos propor um modelo clássico, dado por um sistema de equações diferenciais ordinárias, supondo agora que não há heterogeneidade na classe dos predadores. Com isso é possível encontrar os parâmetros desse novo modelo, utilizando o plano de fase do modelo fuzzy ilustrado nas Figuras 3 e 4. Gostaríamos de comparar o Modelo Presa-predador Fuzzy com o Modelo de Holling-Tanner. Para isso, procuramos ajustar os parâmetros do sistema dado por equações diferenciais a partir do modelo fuzzy obtido. Esta escolha se justifica, pois:

- A população de pulgões cresce logisticamente e um ramo de árvore possui capacidade suporte na ausência de predação.
- Para a população de joaninhas o ramo possui capacidade suporte proporcional ao tamanho da população de presas.
- De acordo com Morales e Buranr Jr. (1985), o número de pulgões predados por dia para a *Cycloneda sanguinea* (adultos, machos e fêmeas), corresponde à resposta funcional do Tipo II de Holling (Figura 5).

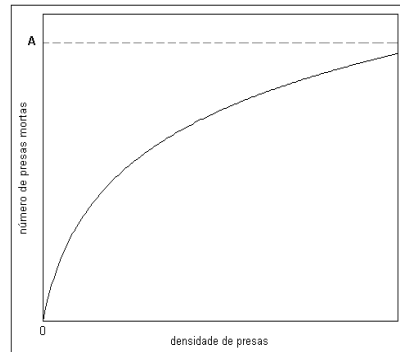


Figura 5: Função que representa um tipo peculiar de resposta funcional em invertebrados (Svirezhev e Logofet, 1983).

Consideremos um sistema presa-predador de Holling-Tanner:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{mxy}{D+x} \\ \frac{dy}{dt} = sy\left(1 - h\frac{y}{x}\right) \\ x(0) > 0, y(0) > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $r, m, s, h, D, K > 0$, sendo

- a taxa de crescimento interespecífica (função densidade-dependência) é a mesma taxa do modelo logístico para uma espécie isolada. Desta forma, o crescimento das presas é inibido, tendo uma capacidade suporte igual a K na ausência de predadores;
- a taxa de ataque (efeito dos predadores) é crescente em relação à quantidade de presas, aproximando-se de um valor limiar estacionário;
- a capacidade suporte da população de predadores é $\frac{x}{h}$, isto é, y deve ser menor que $\frac{x}{h}$ para que a população de predadores cresça;
- m é o número máximo de presas que podem ser capturadas por um predador em cada unidade de tempo (taxa máxima de predação per

capita);

- D é o número de presas necessárias para se atingir metade da taxa máxima m ;
- h é uma medida da qualidade alimentícia proporcionada pela presa para conversão em nascimento de predadores.

Alguns parâmetros conseguimos estimar:

- Como a joaninha adulta consome em média 20 pulgões por dia, então $D = 10$;
- A população com mais de 200 pulgões por ramo já é considerada alta, por isso adotamos a capacidade suporte da população de presas como sendo $K = 200$;
- Considerando que o pulgão gera até 5 novas ninfas por dia enquanto adulto, então adotamos $r = 2$;
- Se a população de joaninhas dobra em 1,03 semana e apenas as fêmeas reproduzem, supomos $s = 0,3$.

Os demais parâmetros foram ajustados de acordo com dados (x, y) gerados pelo modelo fuzzy, substituindo estes dados nas equações (4.4).

Desta forma, chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{200}\right) - \frac{30,625xy}{10+x} \\ \frac{dy}{dt} = 0,3y \left(1 - 22,142857 \frac{y}{x}\right) \\ x(0) > 0, y(0) > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

onde x é a quantidade de presas e y é a quantidade de predadores.

Nas figuras a seguir fazemos dois exemplos de ajuste para os dois modelos.

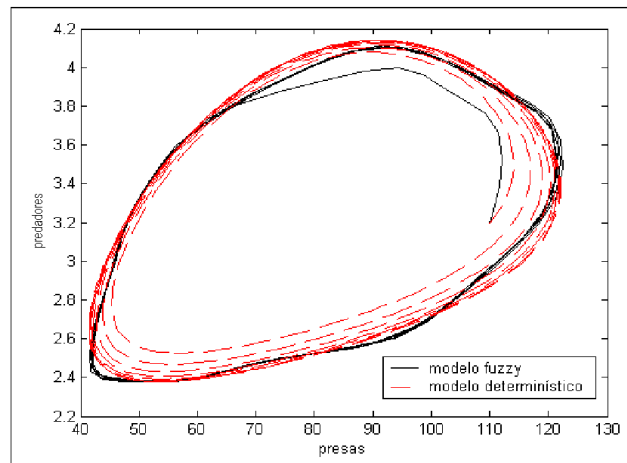


Figura 6: Plano de fase para $x_0 = 110$ e $y_0 = 3, 2$

Notemos que a partir da curva no plano de fase obtida através do modelo fuzzy foi possível ajustar a curva de forma a encontrar os parâmetros adequados para o modelo determinístico.

A grande vantagem de se obter os parâmetros de equações diferenciais dadas por (4.4) é o fato de que podemos fazer a análise da estabilidade do sistema.

Ao analisarmos o sistema (4.5) buscamos inicialmente os pontos críticos do mesmo, ou seja, os pares de valores de x e y que tornam as derivadas nulas e mantêm o sistema em equilíbrio constante, sem alteração nos valores de x e y . Verificamos que o sistema acima temos um par possível: $(77, 5; 3, 5)$, que corresponde a populações constantes e não-nulas de presas e de predadores, respectivamente, que podem coexistir em equilíbrio.

É interessante que façamos a análise do que ocorre quando as populações iniciais x_0 e y_0 estão muito próximas destas populações críticas, ou seja (x, y) é próximo de $(77, 5; 3, 5)$. Com esta análise verificamos a estabilidade do ponto crítico não nulo.

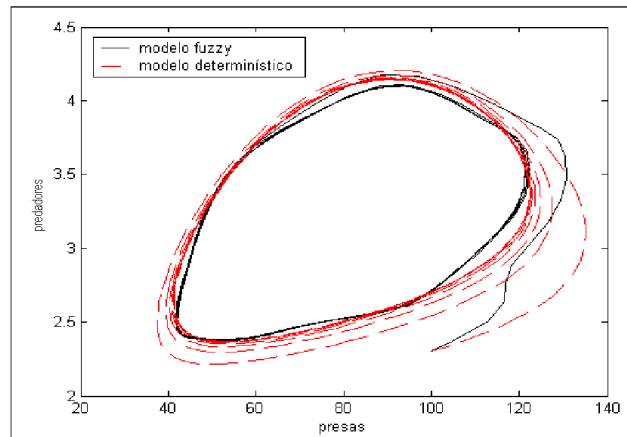


Figura 7: Plano de fase para $x_0 = 100$ e $y_0 = 2, 3$

Vamos fazer a análise de estabilidade do ponto crítico $(77, 5; 3, 5)$ precisamos das equações das isóclinas que são dadas por:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{30,625}(10+x)\left(1 - \frac{x}{200}\right) \\ y = \frac{x}{22,142857} \end{cases} \quad (4.6)$$

isóclinas da população de presas e da população de predadores, respectivamente, referente ao sistema de equações (4.5), dadas pela Figura 8.

O máximo da isóclina de presas está em

$$\frac{K-D}{2} = 95 > x^* = 77,5, \quad (4.7)$$

e portanto, o ponto crítico está à direita do máximo. Ainda,

$$\frac{rh}{m} = 1,446 > \frac{s}{r} = 0,15 \quad (4.8)$$

Por (4.7) e (4.8), o ponto crítico $(77, 5; 3, 5)$ é foco de um ciclo limite (ver: Peixoto, 2005).

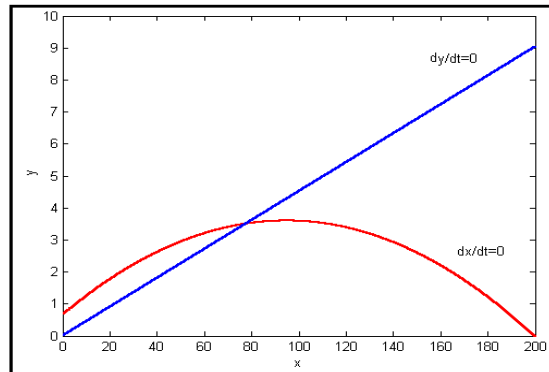


Figura 8: Isóclinas.

5 Conclusões.

Para finalizar, concluímos que, através de uma base de regras fuzzy, conseguimos modelar a dinâmica *pulgões-joaninhas* sem o uso de equações diferenciais explícitas, apenas utilizando hipóteses naturais da interação presa-predador e o auxílio de especialistas.

Consideramos a utilização da teoria dos conjunto fuzzy uma grande contribuição na construção de modelos matemáticos, principalmente nesses casos onde alguns dos parâmetros das equações diferenciais não são disponíveis.

A grande vantagem de se obter os parâmetros de equações diferenciais está no fato de que podemos fazer a análise da estabilidade do sistema.

Agradecimentos

Aos professores Arício Xavier Linhares (IB/UNICAMP) e Carlos Roberto Sousa e Silva (UFSCar) pela cooperação para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq, órgão financiador desse projeto de pesquisa.

Referências

- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2005). *A vantagem de ser fuzzy: Tópicos em Lógica Fuzzzy com aplicações em Biomatemática*. - No prelo.
- Bassanezi, R. B., Gimenes-Fernandes, N., Yamamoto, P. T., e Jesus Jr., W. C. (2004). *Manual da Morte Súbita dos Citros*. Fundecitrus.
- FAPESP (2004). As pernas do vírus. *Revista Fapesp*, 99:59.
- Gravena, S. (2003). O controle biológico na cultura algodoeira. *Informe Agropecuário*, 9:3–15.
- Morales, J. e Buranr Jr., C. L. (1985). Interactions between *cydoneda sanhuine* and the brown citrus aphid: Adult feeding and larval mortality. *Environmental Entomology*, 14(4):520–522.
- Pedrycz, W. e Gomide, F. (1998). *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. Massachusetts Institute of Technology.
- Peixoto, M. S. (2005). *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um Estudo da Dispersão da Morte Súbita dos Citros em São Paulo*. PhD thesis, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP.
- Shaw, I. S. e Simões, M. G. (1999). *Controle e Modelagem Fuzzy*. Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo.
- Svirezhev, Y. M. e Logofet, D. O. (1983). *Stability of Biological Communities*. Mir publishers Moscow.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Informat. Control*, 8:338–353.