

O uso de Controladores Fuzzy para Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

Marina R. Barros Dias¹, Laécio C. Barros²
DMA, IMECC – UNICAMP, 13083-859, Campinas/SP.

Resumo. Nesse artigo nós propomos uma metodologia para obter soluções numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias cujo campo de direções pode ser apenas parcialmente conhecido. Para isto, aliamos métodos de controladores fuzzy com métodos numéricos tradicionais. Justificativas da aproximação dessas soluções para a solução teórica são apresentadas. Aplicamos a metodologia ao modelo de crescimento logístico (ou Verhulst) e uma comparação com a solução clássica é comentada. Finalmente, indicamos essa metodologia como uma ferramenta auxiliar para obtenção de parâmetros.

Palavras-chave: *Equações Diferenciais Ordinárias, Controladores Fuzzy, Métodos Numéricos, Soluções Aproximadas.*

1. Introdução

Muitas vezes nos deparamos com fenômenos que podem ser modelados por Equações Diferenciais Ordinárias, cuja resolução exige cálculos complexos. Na maioria das vezes, fazemos uso da Análise Numérica, cuja teoria já é bastante aprofundada e seus resultados são conhecidamente eficientes. Mais ainda, muitas vezes, principalmente em fenômenos biológicos, tais equações

¹madias@ime.unicamp.br

²laeciocb@ime.unicamp.br

são parcialmente conhecidas, isto é, o campo de direções é conhecido apenas qualitativamente. Nesse caso, uma ferramenta indicada é a teoria fuzzy, mais especificamente os controladores fuzzy que, com o auxílio da lógica fuzzy e de um especialista, são capazes de “captar” as principais informações de um determinado fenômeno.

Assim, propomos a “união” da Análise Numérica, com toda a sua eficiência já comprovada, e a Teoria dos Conjuntos Fuzzy (mais especificamente, os Controladores Fuzzy) para “produzir” soluções numéricas do fenômeno estudado. A seguir, faremos um pequeno resumo das teorias dos conjuntos fuzzy por nós utilizada Barros e Bassanezi (2005) e Peixoto (2005); Bando (2002). Os métodos de Análise Numérica não serão aqui comentados, pois acreditamos que eles sejam conhecidos e, caso não sejam, podem ser facilmente encontrados Cunha (2003).

2. Preliminares

Um subconjunto (clássico) A do universo U pode ser representado por sua função característica, que é dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

A idéia de Zadeh, ao formular o conceito de subconjuntos fuzzy, foi estender o conceito de um elemento pertencer ou não a um conjunto, ampliando o contradomínio de χ_A para $[0, 1]$. Adimitiu-se portanto, que um elemento, ao pertencer a um conjunto, o faz com um determinado grau.

Um subconjunto fuzzy A de U , ou simplesmente conjunto fuzzy, é caracterizado por uma função de pertinência $\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$, em que o número $\varphi_A(x)$ representa o grau de pertinência do elemento x ao subconjunto fuzzy A .

Um controlador fuzzy é um sistema baseado em regras fuzzy e possui, basicamente, quatro componentes: um processador de entrada (ou fuzzifi-

gador), um conjunto de regras linguísticas, um método de inferência fuzzy e um processador de saída (ou defuzzificador), que gera um número real como saída.

A fuzzificação é o estágio onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. As funções de pertinência são formuladas para cada conjunto fuzzy envolvido no processo e, mesmo que a entrada seja crisp (clássica), ela será fuzzificada por meio de sua função característica. A base de regras pode ser considerada como o “núcleo” do controlador fuzzy. Nela se encontram as proposições fuzzy, que são fornecidas de acordo com um especialista. É neste ponto que as variáveis e suas classificações linguísticas são catalogadas e, em seguida, modeladas por conjuntos fuzzy, isto é, funções de pertinência. As proposições fuzzy aqui descritas são feitas na forma linguística:

$$\begin{aligned} R_1: & \text{ SE } x \text{ é } A_1 \text{ E } y \text{ é } B_1 \text{ ENTÃO } z \text{ é } C_1 \\ R_2: & \text{ SE } x \text{ é } A_2 \text{ E } y \text{ é } B_2 \text{ ENTÃO } z \text{ é } C_2 \end{aligned}$$

onde A_i , B_i e C_i são conjuntos fuzzy.

O método de inferência que será utilizado em nosso trabalho é o de Mamdani Barros e Bassanezi (2005), que agrega as regras por meio do operador lógico *OU* modelado pelo operador matemático máximo (\vee) e, em cada regra, os operadores lógicos *E* e *ENTÃO* são modelados pelo operador mínimo (\wedge).

Por fim, na defuzzificação, o valor da variável linguística de saída é traduzido por um valor real. O método comumente usado, e será também o método utilizado em nosso trabalho, é o método do Centro de Gravidade ou Centróide. Este método pode ser entendido como uma média ponderada onde $\varphi_A(x)$ funciona como peso do valor x .

No caso contínuo, a defuzzificação pode ser dada pela fórmula

$$\bar{z} = \frac{\int \varphi_A(x) x dx}{\int \varphi_A(x) dx}.$$

O teorema seguinte desempenhará um papel fundamental para justificar nossa metodologia.

Teorema: Suponhamos que as funções de pertinência que compõem a base de regras sejam contínuas e com valores nulos fora de intervalos (como por exemplo, as triangulares ou trapezoidais). Se a t-norma e a t-conorma são contínuas e for adotado um método de defuzzificação, como centro de massa ou média dos mínimos, então a classe das funções f_r é densa na classe das funções definidas e contínuas em conjuntos compactos Nguyen e Walker (2000).

Aqui, t-norma e t-conorma são operadores lógicos de $[0, 1] \times [0, 1]$ em $[0, 1]$ que generalizam os operadores mínimo e máximo, respectivamente.

3. Metodologia

Suponha que um determinado fenômeno seja modelado matematicamente pelo PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

cuja solução é dada por

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Como é sabido, dependendo da complexidade do campo f , y pode não ter uma expressão analítica explícita. Nesse caso, o que se faz é adotar algum método, como os de Runge-Kutta, para obter uma solução numérica y_n para o PVI (3.1), com

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y.$$

É claro que as aproximações y_n só serão obtidas se o campo f for conhecido, ou seja, o conhecimento de f é uma imposição do método numérico para produzir a estimativa y_n para cada x_n .

Do ponto de vista de modelagem, a crítica que se faz é que, muitas vezes, o campo de direções f é conhecido apenas parcialmente. Isto é, há clareza apenas em algumas propriedades qualitativas de f , que são reveladas pelo fenômeno estudado. A partir daí, com o objetivo de se produzir uma solução matemática para o problema, adota-se, arbitrariamente, alguma expressão matemática, que representa aquelas propriedades do fenômeno para o campo f .

Nossa proposta aqui é “substituir” o campo f em (3.1) por uma base de regras que representa aquelas propriedades características do fenômeno. Isto é, substituir o campo teórico f pela f_r do teorema acima, produto da base de regras combinada com alguma metodologia de controladores fuzzy. Aqui adotaremos o método de inferência de Mamdani, com centro de massa como defuzzificador.

Desse modo, o PVI (3.1) será substituído por

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_r(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

e, à luz do teorema citado acima, espera-se que

$$y_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} y,$$

já que

$$f_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f,$$

onde y_r é a solução de (3.2). Mais ainda, como f_r é conhecida na forma de tabela, pois é a saída do controlador fuzzy, faz-se necessário a utilização de algum método para se obter sua solução numérica, y_r^n .

Desse modo temos

$$y_r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} y$$

o que nos faz crer que

$$y_r^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{r \rightarrow \infty} y$$

4. Aplicações

Apenas com o intuito de ilustrar a metodologia aqui sugerida por nós, vamos aplicá-la ao modelo de Verhulst e comparar sua solução com a classicamente conhecida.

Como sabemos, a característica principal no modelo de Verhulst é que a razão de crescimento de uma população depende diretamente dos recursos disponíveis da seguinte maneira Edelstein-Keshet (1987):

- Para populações baixas a região de crescimento é alta;
- Para populações altas a região de crescimento é baixa.

A partir das características desse modelo, supomos a seguinte base de regras fuzzy para o modelo de Verhulst considerado como entrada a densidade populacional (y) e como saída a razão de crescimento percentual, ou específica, denotada por $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$:

1. Se a população é “muito pequena” então a variação é “grande positiva”
2. Se a população é “pequena” então a variação é “grande positiva”
3. Se a população é “média” então a variação é “média positiva”
4. Se a população é “média alta” então a variação é “média positiva”
5. Se a população é “alta” então a variação é “pequena positiva”
6. Se a população é “muito alta” então a variação é “pequena positiva”

7. Se a população é “altíssima” então a variação é “negativa”

Com base nas regras acima, dividimos a variável de entrada “população” em sete compartimentos, com os seguintes termos linguísticos: *muito pequena*, *pequena*, *médica*, *médica alta*, *alta*, *muito alta* e *altíssima*. Para a variável de saída “variação”, os termos linguísticos considerados foram: *negativa*, *pequena positiva*, *médica positiva* e *grande positiva*, ou seja, temos quatro compartimentos para esta variável. Nas figuras 1 e 2, estão ilustradas as funções de pertinência das variáveis de entrada e saída, respectivamente:

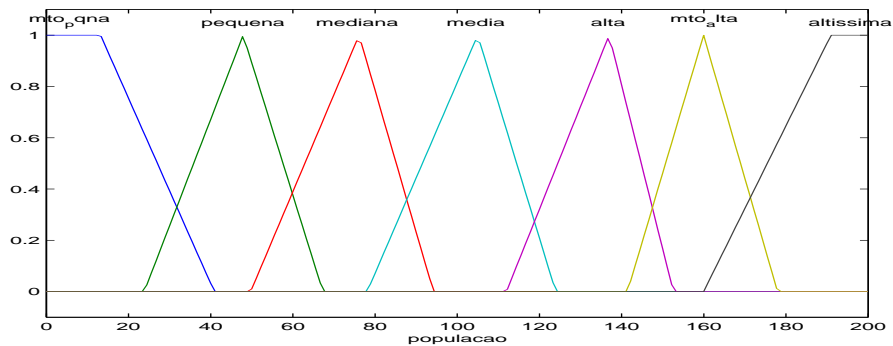


Figura 1: Função de pertinência da variável “população”

Utilizamos, neste artigo, o controlador fuzzy e o método de Euler Aperfeiçoado, cujas soluções são obtidas através da fórmula

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f_r(x_n, y_n) + f_r(x_n + h, y_n + hf_r(x_n, y_n))],$$

onde h é o passo utilizado para a discretização.

Com o intuito de comparar o resultado obtido, lembramos que o modelo de Verhulst segue a seguinte equação

$$\frac{dy}{dx} = ax(K - x)$$

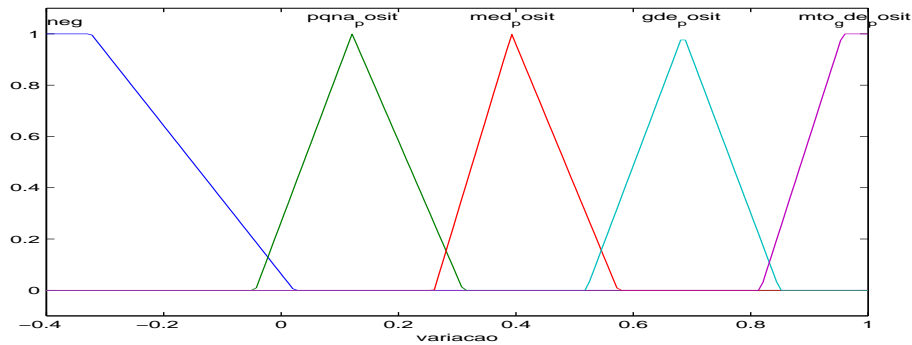


Figura 2: Função de pertinência da variável “variação”

onde a é a taxa de crescimento específico e K é a capacidade suporte da população. Observamos ainda que, para este artigo, utilizamos os seguintes parâmetros: $a = 1$ e $K = 167$.

Na figura 3 vemos as soluções obtidas através dos dois métodos: o clássico, com o campo f conhecido, e o fuzzy, feito a partir da base de regras. O valor inicial $x(0) = 10$ foi o mesmo nos dois casos.

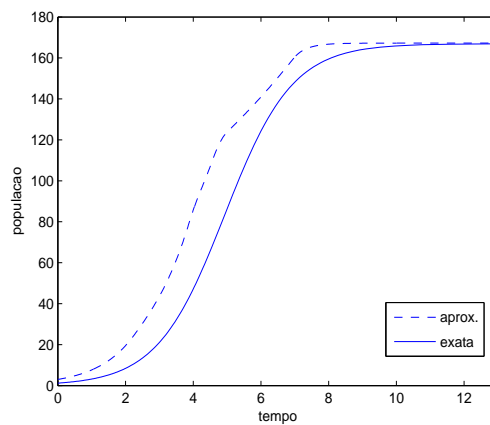


Figura 3: Gráfico das soluções do modelo de Verhulst no caso clássico e obtido pelo controlador fuzzy

A figura 3 ilustra, ainda que apenas graficamente, o quanto as soluções clássicas (y) e via sistema fuzzy (y_r) estão próximas.

Queremos ressaltar que o exemplo acima foi escolhido para ilustrar a metodologia aqui proposta porque, nesse caso, o campo f é bastante conhecido, bem como a solução y . No entanto, devemos lembrar que y_r depende apenas do sistema fuzzy. Isto significa que não precisamos de nenhum modelo pré-concebido f sugerindo uma solução da forma y_r para representar o fenômeno estudado.

5. Conclusões

Como comentamos acima, as soluções via metodologia clássica e via sistema fuzzy são bastante semelhantes. Qual delas deve ser escolhida para melhor representar o fenômeno é uma questão a ser debatida. Enquanto no caso clássico há uma arbitrariedade na escolha do campo f como modelo do fenômeno, no caso fuzzy a arbitrariedade é fundamentalmente no método de inferência adotado, já que a base de regras é construída juntamente com um especialista, e portanto, com forte representatividade do fenômeno estudado.

Se, por algum motivo, adota-se o campo f como paradigma, e consequentemente y é a solução do problema, então podemos “melhorar” as estimativas y_n produzidas pela metodologia fuzzy, de várias maneiras: aumentando r ; aumentando n ou ainda escolhendo um método numérico mais eficiente, como os de Runge-Kutta de ordem mais alta.

Finalmente queremos dizer que a metodologia apresentada por nós pode auxiliar na investigação de parâmetros do modelo dado pelo campo f , que geralmente tem grande interpretação física/biológica. Para isto, basta usar o conjunto de dados gerados pelo nosso método e por meio de algum método de ajuste, obter estimativas da solução teórica y . Estudos preliminares sobre este assunto o leitor pode consultar Barros e Bassanezi (2005).

Referências

- Bando, F. M. (2002). Sistemas fuzzy e aproximação universal. Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.
- Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. (2005). Tópicos em lógica fuzzy com aplicações em biomatemática. No prelo.
- Cunha, M. C. C. (2003). *Métodos Numéricos*. Editora Unicamp, Campinas/SP.
- Edelstein-Keshet, L. (1987). *Mathematical Models in Biology*. McGraw-Hill, Inc, N. York.
- Nguyen, H. T. e Walker, E. A. (2000). *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman and Hall/CRC, N. York.
- Peixoto, M. S. (2005). Sistemas dinâmicos e controladores fuzzy: um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em são paulo. Dissertação de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.