

Otimização de estratégias para controle de fungos

Renata Z. G. Oliveira¹,

DM – UNESP, 13.506-900 – Rio Claro/SP.

Rodney C. Bassanezi²,

DMA, IMECC–UNICAMP, 13.083-970 – Campinas, SP.

Marco A. L. Caetano³,

IBMEC – São Paulo/SP.

Resumo. O objetivo deste trabalho é avaliar dois esquemas diferentes de aplicação de fungicidas em culturas de feijão. As estratégias de aplicação de fungicida usadas nestes esquemas foram determinadas utilizando-se métodos para otimizar os coeficientes de uma expansão em série de uma função de entrada ($u(t)$). Uma análise comparativa é realizada baseando-se em simulações utilizando Teoria de Controle Ótimo, onde o tempo final é fixo.

Palavras-chave: *Controle ótimo, fungos, modelos matemáticos.*

1. Introdução

O cultivo do feijoeiro comum (*Phaseolus vulgaris L.*) constitui uma importante atividade agrícola, principalmente devido ao fato do mesmo ser um dos principais componentes da alimentação no Brasil. No entanto, esta cultura está sujeita a riscos, em especial as doenças causadas por bactérias, vírus e fungos, que em geral são responsáveis por grandes perdas de produção.

Dentre as doenças fúngicas, podemos destacar a ferrugem (*Uromyces appendiculatus*) e a mancha angular (*Phaeoisariopsis griseola*) Bassanezi et al. (1997). Esta última tem distribuição mundial e, quanto mais precoce é o seu aparecimento na cultura, maior é a perda na produção.

¹rzotin@rc.unesp.br

²rodney@ime.unicamp.br

³malcaetano@uol.com.br

O controle da mancha angular obtém melhores resultados através de cultivares resistentes e com a aplicação de fungicidas. No entanto, devido à grande variabilidade patogênica que o fungo causador da doença apresenta, é mais comum a utilização do controle químico, em geral por médios e grandes produtores.

Modelos matemáticos têm sido amplamente propostos com a finalidade de propor estratégias de controle de doenças fúngicas, através da aplicação de fungicidas, visando a minimização do custo envolvido (tempo de aplicação, dosagens, combinações de fungicidas, etc) em detrimento de maior produtividade (Barret, 1983; Ghini et al., 1994).

O objetivo deste estudo é analisar a dinâmica de fungos sob esquemas diferentes de tratamento ótimo, usando um modelo proposto em Zotin et al. (2000). Este modelo inclui a ação do fungicida e considera o efeito da temperatura no crescimento da população de fungos.

Um índice de performance foi proposto para expressar, de maneira quantitativa, o compromisso entre o uso de fungicida e a área lesionada em culturas de feijão. Uma técnica numérica foi utilizada para resolver o problema de controle ótimo e o sub-ótimo.

2. O modelo

O crescimento de fungos é resultado de vários processos controlados por enzimas. A atividade fúngica começa a uma temperatura mínima, aumenta até um valor ótimo e, declina e pára a uma temperatura máxima. Estas temperaturas variam para cada tipo de fungo e são chamadas **temperaturas cardinais**. Estudos a respeito da influência da temperatura no crescimento de alguns tipos de fungos que atacam culturas de feijão podem ser encontrados em Bassanezi et al. (1997) e Dalla Pria (1997).

O modelo proposto para o controle de uma população de fungos inclui a aplicação do fungicida diretamente no modelo e o efeito da temperatura na taxa de crescimento populacional. Como a doença é foliar, é mais comum usar proporção de área lesionada como índice de severidade da doença.

As hipóteses são:

- a) A população de fungos (representada pela área foliar total ocupada N) analisada em uma certa cultura é subdividida em sensível e resistente. Utilizamos $S(t)$ e $R(t)$ para representar, em cada instante de tempo t , a proporção de área lesionada por sensíveis e resistentes, respectivamente;

- b) as taxas de crescimento intrínseco para suscetíveis e resistentes são $r_s(t)$ e $r_r(t)$, respectivamente;
- c) a taxa de mudança de sensível para resistente é dada por α ;
- d) a eficácia do fungicida é dada por β , que incorpora a dependência da concentração do fungicida;
- e) a taxa de aplicação do fungicida é dada por $u = u(t)$, uma função contínua por partes. Além disso, consideramos uma limitação na aplicação do fungicida na forma $0 \leq u(t) \leq 1$, isto é, consideramos sempre u relativamente a um valor u_{max} ;
- f) uma vez que a folha é atacada por fungos, a área lesionada não mais se recupera, e portanto temos $dS/dt > 0$ e $dR/dt > 0$.

Com base nas considerações acima, a dinâmica da população de fungos pode ser descrita pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= (1 - \alpha)r_s(t)S(1 - S - R)(1 - \beta u) \\ \dot{R}(t) &= r_r(t)R(1 - S - R) + \alpha r_s(t)S(1 - S - R)(1 - \beta u),\end{aligned}\tag{1}$$

onde $0 \leq u(t) \leq 1$ e as condições iniciais são dadas por $S(0) = S_0$, $R(0) = R_0$. Embora S , R , N e u sejam funções de t , a variável t será omitida por simplificação.

Seja $r_s(t) = r_r(t) = r(t)$ e usando a relação $N = S + R$, o sistema de equações diferenciais (1) e as condições iniciais podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \dot{N} = r(t)N(1 - N)(1 - \beta u) + r(t)R\beta u(1 - N) \\ \dot{R} = r(t)R(1 - N) + \alpha r(t)(N - R)(1 - N)(1 - \beta u), \\ N_0 = S_0 + R_0, \quad 0 \leq u \leq 1. \end{cases}\tag{2}$$

3. A formulação do problema de controle ótimo

O problema de controle ótimo associado com o sistema dinâmico (2) consiste em encontrar \mathbf{u} que minimiza o funcional

$$J(u) = N(t_f) + c_1 \int_0^{t_f} u(t) dt. \quad (3)$$

A função u^* é o controle ótimo que satisfaz

$$J(u^*) = \min_u \left(N(t_f) + c_1 \int_0^{t_f} u(t) dt \right).$$

A interpretação biológica do funcional proposto é que o primeiro termo $N(t_f)$ representa o objetivo de menor área lesionada possível após um período de tempo pré-fixado. O coeficiente c_1 no integrando $u(\tau)$ é um peso que serve como ajuste de unidades e reflete a influência da aplicação de fungicida na minimização do funcional.

Observe que estamos considerando o tempo final (t_f) fixo, que corresponde ao dia da colheita ou ao dia máximo permitido para a aplicação de fungicida.

3.1. Controles ótimo e sub-ótimo

Problemas de controle ótimo podem ser resolvidos por métodos diretos e indiretos. Na solução usando um método indireto, precisa-se resolver um problema de valor de contorno com $2n$ equações correspondentes a n estados e n variáveis adjuntas se o Princípio do Máximo é utilizado ou uma equação diferencial parcial, caso Programação Dinâmica seja utilizada (Kirk, 1980; Bulirsch e Stoer, 1980).

O Hamiltoniano relacionado ao problema descrito na seção anterior (equações 2 e 3) é dado por:

$$\begin{aligned} H(t, u, \lambda_1, \lambda_2, S, R) = & [c_1 - r(t)(1 - N)(N - R)\beta(\lambda_1 + \alpha\lambda_2)]u + \\ & + \lambda_1 r(t)N(1 - N) + \lambda_2 r(t)R(1 - N) + \\ & + \alpha r(t)\lambda_2(N - R)(1 - N). \end{aligned}$$

onde $\lambda_1 = \lambda_1(t)$ e $\lambda_2 = \lambda_2(t)$ são as variáveis de co-estado.

O controle ótimo $u^*(t)$ deve satisfazer o sistema (2) e também as equações de co-estado obtidas a partir do Hamiltoniano Kirk (1980), que são dadas por:

$$\dot{\lambda}_1^* = -\partial H/\partial N \quad \text{e} \quad \dot{\lambda}_2^* = -\partial H/\partial R$$

e, na sua forma simplificada, são descritas por:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^* + [r(t)(1 - \beta u^*)(1 - 2N^*) - r(t)\beta R^* u^*] \lambda_1^* = \\ \lambda_2^* [-r(t)R^* + \alpha r(t)(1 - \beta u^*)(1 - 2N^* + R^*)] \\ \dot{\lambda}_2^* + r(t)(1 - N^*)[1 - \alpha(1 - \beta u^*)] \lambda_2^* = -\lambda_1^* r(t) \beta u^* (1 - N^*) \\ \text{com } \lambda_1^*(t_f) = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2^*(t_f) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

As condições finais para λ_1^* e λ_2^* são obtidas quando t_f é fixo e, $N^*(t_f)$ e $R^*(t_f)$ são livres.

Então, usando $g(t)$ para denotar a função que decide o controle, temos

$$g(t) = c_1 - r(t)(1 - N)(N - R)\beta(\lambda_1 + \alpha\lambda_2),$$

e portanto, aplicando o Princípio do Máximo de Pontryagin ao Hamiltoniano, o controle ótimo resulta em:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } g(t) > 0 \\ 1 & , \text{ se } g(t) < 0 \\ \text{indet.} & , \text{ se } g(t) = 0 . \end{cases} \quad (5)$$

Na solução utilizando um método direto, deseja-se minimizar diretamente o índice de performance (3) após uma parametrização adequada dos controles admissíveis $u(t)$. Aqui, um método direto proposto por Jacob (1972) é utilizado e está disponível na forma de um programa computacional chamado EXTREM. A parametrização dos controles $u(t)$ envolve, neste caso, um subconjunto de coeficientes na expansão em séries utilizando funções senoidais:

$$\begin{aligned} u_i(t) = & c_{1,i} + c_{2,i} \sin(t\pi/t_f) + c_{3,i} [2 \sin(t\pi/t_f) \cos(t\pi/t_f)] + \\ & c_{4,i} [3 \sin(t\pi/t_f) \cos^2(t\pi/t_f) - \sin^3(t\pi/t_f)] + \\ & + \dots + c_{n,i} \{ (n-1) \sin(t\pi/t_f) \cos^{n-2}(t\pi/t_f) - \\ & [(n-1)/3] \sin^3(t\pi/t_f) \cos^{n-4}(t\pi/t_f) + \\ & [(n-1)/5] \sin^5(t\pi/t_f) \cos^{n-6}(t\pi/t_f) - \dots + \dots \} \end{aligned}$$

onde os coeficientes $c_{i,j}$ são determinados minimizando (3).

No entanto, somente aproximações para o controle ótimo real $u(t)$ podem ser obtidas. Estas aproximações são sub-ótimas no sentido que o custo atingido quando termos de ordem superior são negligenciados é geralmente maior que aquele resultante do uso do controle ótimo real.

A seguir, utilizamos nas simulações essas duas técnicas (controle ótimo e subótimo) para a obtenção de estratégias de aplicação de fungicidas.

4. Simulações

Dois cenários foram utilizados para a simulação dos controles ótimo e sub-ótimo. O primeiro caso foi simulado para controle ótimo do tipo bang-bang, obtido em Zotin et al. (2000) e um outro para o controle paramétrico.

Na realização das simulações, usamos alguns dados de Bassanezi et al. (1997) para a mancha angular no cultivar Rosinha G-2. Por exemplo: a temperatura ótima para o desenvolvimento desta doença fúngica ($24^{\circ}C$) e valores de r nas temperaturas $24^{\circ}C$ ($r = 0.014mm^2/h$) e $29^{\circ}C$ ($r = 0.002mm^2/h$).

Se considerarmos que a temperatura máxima alcançada durante o ano no Brasil é $39^{\circ}C$ e a mínima é $1^{\circ}C$, podemos simular a temperatura como função de t (de Janeiro a Dezembro) como:

$$T(t) = 20 + 19 * \cos(\pi t/180) ,$$

e, usando o conceito de temperatura cardinal, assumimos que a taxa de crescimento como uma função da temperatura é dada por:

$$r(T) = a \exp[-b(T - T^*)^2] .$$

onde T^* é a temperatura em que a maior taxa de crescimento é atingida e os coeficientes a e b podem ser determinados a partir de informações de r em algumas temperaturas.

Como não existe desenvolvimento da mancha angular a $17^{\circ}C$ e a $30^{\circ}C$, por simplificação, para obter r de modo contínuo, iremos usar

$$T = 24^{\circ}C \Rightarrow r = 0.0336$$

$$T = 6^{\circ}C \Rightarrow r = 0.0048$$

Então, em ambos os cenários, usamos $r(t) = r(T(t))$, dada por

$$r(t) = 0.0336 \exp[-0.006 * (-4 + 19 * \cos(\pi t/180))^2],$$

Dessa forma, dependendo da época do ano em que determinada doença estiver sendo estudada, ocorre a escolha de $r(t)$ correspondente. Por exemplo, $t \in [0, 60]$ corresponde aos meses de janeiro e fevereiro.

Todos os cenários foram simulados usando os seguintes parâmetros:

$x_1(0) = 0.08$	$c_1 = 0.002$
$x_2(0) = 0.02$	$\beta = 0.6$
$t_f = 80$ dias	$\alpha = 10^{-5}$

5. Resultados Numéricos

As simulações usando o método direto proposto por Jacobi foram feitas utilizando-se FORTRAN com o método numérico EXTREM para resolver o problema. Este método foi combinado com o método de Runge-Kutta-Fehlberg 7^a/8^a e passo variável. A Figura 1 mostra a área foliar total lesionada usando o controle ótimo (aplicação de fungicida do tipo bang-bang durante todo o tempo)

$$u^*(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0; & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 1; & t_2 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

onde $t_1 = 4$ dias; $t_2 = 50$ dias, $t_f = 80$ dias onde $r(t)$ é usada para $t \in [50, 130]$. Este controle ótimo foi obtido em Zotin et al. (2000). Na mesma figura, podemos observar a solução através do controle sub-ótimo. A Figura 2 mostra a resistência $R(t)$, onde os resultados foram os mesmos para os controles ótimo e sub-ótimo.

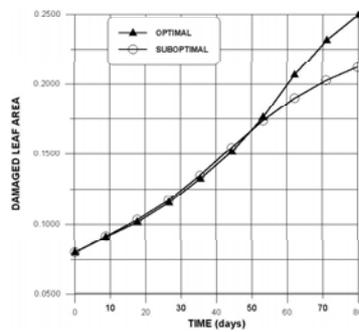


Figura 1: Área total lesionada usando os controles ótimo e sub-ótimo.

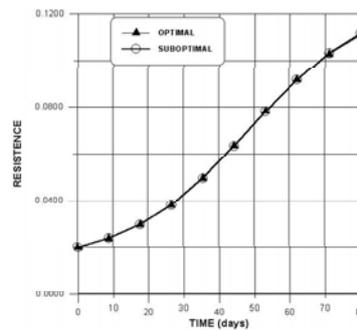


Figura 2: Área foliar lesionada por resistências (controles ótimo e sub-ótimo).

Neste caso, a ação pelo controle sub-ótimo, a área foliar lesionada foi menor que com o controle ótimo mas o custo cerca de 63% mais caro (como era esperado), como observado

na Figura 3 .

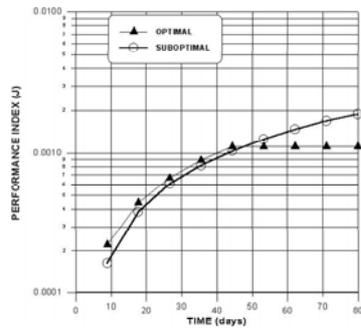


Figura 3: Índice de performance para os controles ótimo e sub-ótimo.

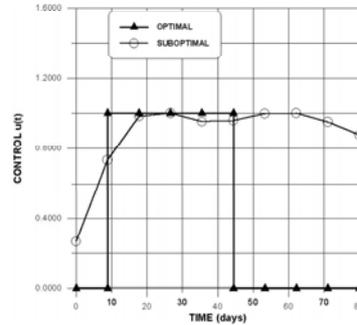


Figura 4: Controles ótimo e sub-ótimo.

Na Figura 4 é possível observar os controles ótimo e sub-ótimo. A lei de controle subótimo mostra que a melhor política de controle é começar com uma baixa taxa de aplicação de fungicida, aumentar até um tempo t_1 e depois disso, usar um controle oscilatório até o tempo final. É importante observar que as oscilações que aparecem no controle sub-ótimo são devidas à presença de senos e cossenos na parametrização do controle. Na prática, são interpretadas como controles constantes nestes períodos onde ocorrem oscilações.

Considerando $r(t)$ para t pertencente a outro intervalo, é possível observar que a política de controle depende de $r(t)$, comprovando assim a influência da temperatura na estratégia de controle a ser adotada. O tipo de controle obtido depende essencialmente da combinação dos valores dos parâmetros envolvidos, e portanto, em alguns casos, ocorre troca de controle uma única vez (por exemplo, tomando $r(t)$ para $t \in [0, 80]$); em outros, pode ser economicamente inviável a aplicação de determinado fungicida dependendo das condições iniciais e do tempo restante para que algum tratamento seja efetuado (diminuição de t_f).

Neste trabalho, onde o índice de performance envolve somente a área total lesionada em $t = t_f$ e o control $u(t)$, foi possível analisar a solução do problema de controle ótimo utilizando métodos diretos e indiretos. Como já era esperado, o controle ótimo se revelou mais eficiente. No entanto, para índices de performance mais complexos, a solução ótima dificilmente é obtida, devido à problemas de convergência, e portanto a solução sub-ótima é de extrema importância.

Outro índice de performance para o problema de controle ótimo pode ser considerado

na minimização do funcional

$$J = a_1(S(t_f) - s_f)^2 + a_2(R(t_f) - r_f)^2 + \int_0^{t_f} [S(\tau)^2 + R(\tau)^2 + a_3 u(\tau)^2] d\tau \quad (6)$$

onde a_1 é um peso para a condição final da variável de estado $S(t)$, a_2 para a condição final da variável de estado $R(t)$, a_3 para o controle durante o período de otimização e s_f and r_f são metas a serem atingidas pelas áreas lesionadas por sensíveis e resistentes, respectivamente. Para valores altos de a_1 e a_2 a parametrização irá forçar os estados $S(t_f)$ e $R(t_f)$ a convergirem para as condições finais s_f and r_f , pré-fixadas. Na variável de controle $u(t)$ quando a_3 é alto o custo é caro e o método numérico busca a ação mínima.

Na Figura 5 pode-se observar um exemplo de controle subótimo obtido para o índice de performance (6) com os seguintes parâmetros: $a_1 = a_2 = 300$, $a_3 = 2$, $s_f = 0.2$, $r_f = 0.05$ e $r(t)$ para $t \in [50, 130]$.

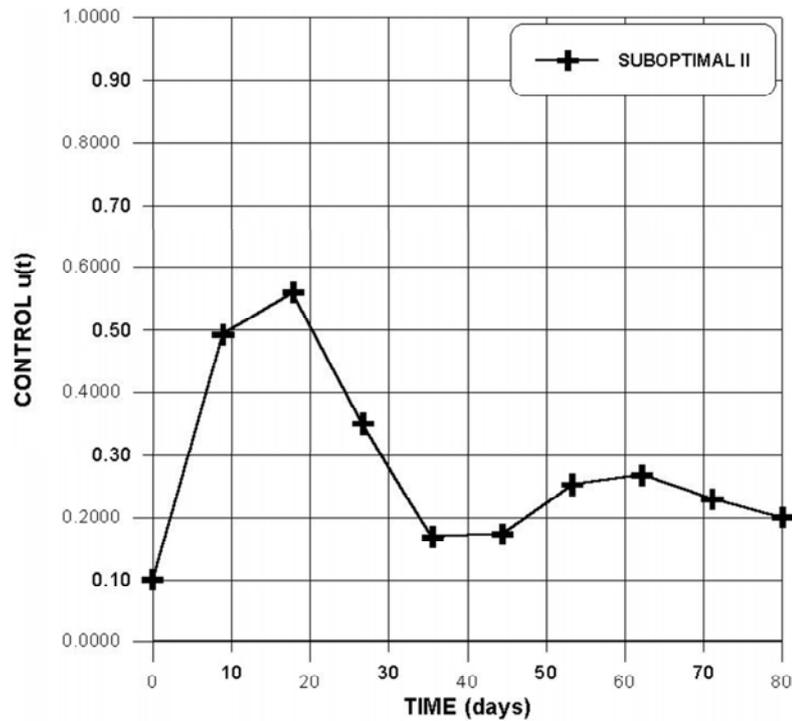


Figura 5: Controle subótimo para o funcional (6).

Estes parâmetros forçam o funcional J a atingir as condições finais, mas $u(t)$ é mais caro

duas vezes do que as variáveis de estado $S(t)$ e $R(t)$. Devido à complexidade do funcional proposto (além do fato do sistema ser não linear) o controle ótimo não foi obtido. Uma solução analítica para este índice é de difícil solução pelos termos quadráticos envolvidos e uma solução numérica exige grande esforço computacional com baixa probabilidade de convergência. Assim, a solução sub-ótima destacou-se pela sua praticidade e facilidade de estudos de vários cenários com o índice de performance mais realista como o índice anterior.

6. Discussão

A aplicação de fungicidas no controle de pragas do feijão ocorre geralmente em intervalos bem definidos. Como exemplo, podemos citar o fungicida FUNGINIL¹, que deve ser aplicado inicialmente após 30 dias após o plantio e o tratamento repetido a cada 10 ou 15 dias. Procedimento análogo é recomendado também para o fungicida ORIOUS 250 CE. Nas simulações apresentadas anteriormente, consideramos $t_f = 80$. Como a cultura de feijão dura em média 90 dias, $t = 0$ indica que a doença foi detectada dez dias após o plantio. O controle sub-ótimo obtido indica que a aplicação deve começar por volta de $t = 20$, ou seja, exatamente 30 dias após o plantio, conforme sugere esses dois fungicidas citados.

Portanto, as simulações realizadas anteriormente nos permitem conjecturar que, na prática, o controle sub-ótimo é que vem sendo utilizado pelos produtores. Como já observamos anteriormente, as oscilações que aparecem no controle sub-ótimo são devidas ao tipo de parametrização do controle. No entanto, seria muito mais vantajoso economicamente (como mencionado na seção anterior) a utilização do controle ótimo, aplicando o fungicida nos dias que correspondem a uma maior taxa de crescimento da lesão, não sendo necessário a realização de aplicações conforme sugeridas pelos fabricantes dos atuais fungicidas no mercado.

Referências

Barret, J. A. (1983). Estimating relative fitness in plant parasites: Some general problems. *Phytopathology*, 73:510–512.

Bassanezi, R. B., Amorin, L., Bergamin Filho, A., e Godoy, C. V. (1997). Análise com-

¹ver www.milênia.com.br

- parativa entre a ferrugem e a mancha angular do feijoeiro: efeito da temperatura nos parâmetros monocíclicos. *Fitopatologia brasileira*, 22:432–436.
- Bulirsch, R. e Stoer, J. (1980). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, N. York.
- Dalla Pria, M. (1997). *Quantificação de parâmetros monocíclicos da antracnose (*Colletotrichum Lindenthianum*) e da mancha angular (*Phaedisarioupsis Griseola*) do feijoeiro*. PhD thesis, ESALQ-USP, Piracicaba/SP.
- Ghini, R., Vendite, L. L., e Petrucci, A. A. (1994). Dosagens de fungicidas: avaliação de seus efeitos na resistência de fungos através de um modelo matemático. *Fitopatologia brasileira*, 19:514–519.
- Jacob, H. G. (1972). *An Engineering Optimization Method with Application to Stoll Aircraft Approach and Landing Trajectories*. Langley. NASA TN-D 6978, Houston.
- Kirk, D. E. (1980). *Optimal Control Theory: an Introduction*. Prentice-Hall, N. Jersey.
- Zotin, R., Bassanezi, R. C., e Yang, H. M. (2000). Modelos interespecíficos para controle químico de Áreas foliares lesionadas por fungos. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 1(1):253–266.

