BIOMATEMÁTICA ***XIII*** *(2003) 45–53*
Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP

Modelo de propagação de lesões foliares causadas por fungos

L. A. Kato[1], W. C. Ferreira Jr[2]

DMA, IMECC–UNICAMP, 13.083-970 – Campinas, SP.

Resumo. Realizamos um estudo sobre a propagação de lesões foliares causadas por fungos. O principal agente responsável pela transmissão, de curta e longa distância, desse tipo de infestação é o esporo. Os esporos são produzidos pelos ápices das hifas que crescem formando redes filamentosas dentro da lesão. A distribuição das hifas nem sempre é homogênea, por isso utilizamos a geometria fractal para descrever este mecanismo. Descrevemos a população de lesões segundo duas variáveis de aspecto: a posição geográfica e o tamanho das lesões.

Palavras-chave: *dimenso fractal; fungos; leses foliares;*

1. Introdução

Algumas das doenças que atacam as plantas foliares, são provocadas por fungos que crescem e se desenvolvem sobre a superfície da folha formando colônias ou manchas, causando graves danos ao crescimento da planta (Agrios, 1997).

Nas lesões provocadas por fungos, seu desenvolvimento e propagação ocorre conforme o crescimento desses fungos, que em geral, crescem formando uma rede de ramificações de hifas, que é chamado de micélio (Agrios, 1997).

A hifa é uma estrutura filamentosa que exibe crescimento apical responsável pela formação dos esporos, que é a unidade reprodutiva dos fungos (Trabulsi et al., 1999).

A ferrugem, por exemplo, que provoca lesões sobre as folhas do café, trigo, soja, etc, é provocada por fungos chamados de basidiomicetes. A estrutura reprodutora desses fungos é o basídio, que é a extremidade de uma hifa, e que emite ramificações ou esterigmas, cada uma suportando em sua extremidade um esporo (Trabulsi et al., 1999).

Os fungos são encontrados na natureza de diversas formas e em diversos lugares, como no solo, na água, nas plantas, nos animais e no homem. Embora alguns fungos provoquem doenças e são tóxicos, outros são comestíveis, como o cogumelo (Trabulsi et al., 1999).

Os fungos desenvolvem em meios de cultura adequados formando colônias (que podem ser as lesões sobre as folhas das plantas) do tipo filamentoso, por exemplo. Essas colônias

[1]lak@ime.unicamp.br
[2]wilson@ime.unicamp.br

filamentosas são constituídas basicamente por estruturas multicelulares chamadas de hifas e o conjunto dessas hifas é denominado de micélio.

Os esporos são os responsáveis pela propagação dessas lesões, e devido a sua fácil mobilidade de transporte pelo vento, pessoas ou animais, podem levar a doença de uma planta para outras bem distantes.

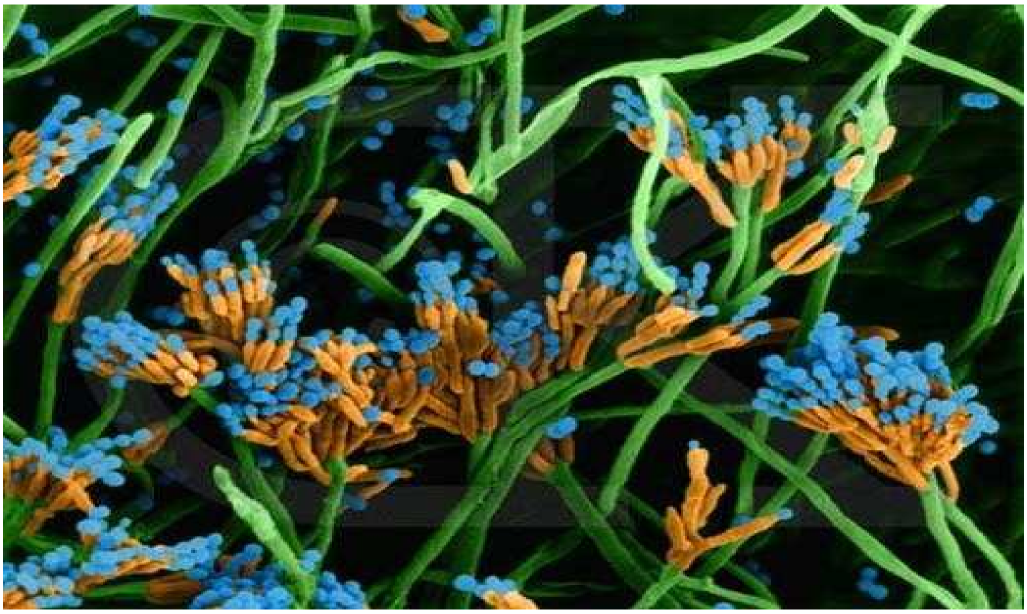

Figura 1: Imagem de microscopia de varredura eletrônica da Penicillium sp. (aumento de 1560 x) mostrando um micélio fúngico com as hifas (verde), esporângio (laranja) e esporos (azul). Imagem obtida no site de Carlos Magno Greghi (www.terravista.pt/bilene/5547/biologia/Celula/Fungo25.htm) - acessada em 20/06/03.

Um esporo, ao cair sobre a superfície de uma folha, e sob determinadas condições de temperatura, luminosidade e umidade, inicia sua germinação através do crescimento de hifas, produzindo um micélio que irá produzir novos esporos (Agrios, 1997).

2. Crescimento dos fungos

A propagação das lesões foliares, causadas por fungos, é realizada pelos esporos que são produzidos nas pontas das hifas. Assim, analisar a propagação dessa doença de plantas é entender primeiramente como crescem as hifas que produzem os esporos.

Os fungos são organismos simples, constituídos de filamentos chamados de hifas que se estendem e se ramificam formando uma rede filamentosa denominada de micélio. Um exemplo de micélio, comumentemente encontrado no dia a dia, é o bolor encontrado nos alimentos em putrefação, embora suas hifas só possam ser vistas microscopicamente.

Os fungos apresentam dois tipos de reprodução: sexuada e assexuada. A forma mais comum de reprodução assexuada é a produção de esporos que, encontrando um meio propício germinam formando uma hifa.

Após a germinação, os esporos formam um micélio que cresce exponencialmente (Prosser e Trinci, 1979). Esta característica do crescimento em redes filamentosas é um mecanismo que permite ao fungo a exploração e aproveitamento dos nutrientes necessários para sua sobrevivência.

O micélio cresce pela combinação de dois fatores: o crescimento apical das hifas que permite a exploração de novas regiões na busca de nutrientes, e a ramificação que possibilita o preenchimento das áreas já atingidas pelas hifas exploradoras (Edelstein, 1982). Este crescimento em geral, permite que a colônia micelial expanda radialmente com alto grau de simetria radial (Edelstein, 1982; Soddell et al., 1995).

A dinâmica do crescimento do raio da colônia micelial depende efetivamente do crescimento e ramificação das hifas. Usualmente o micélio rapidamente toma a forma circular cujo raio inicialmente aumenta a uma taxa exponencial, e atinge uma taxa de crescimento constante (Prosser, 1994).

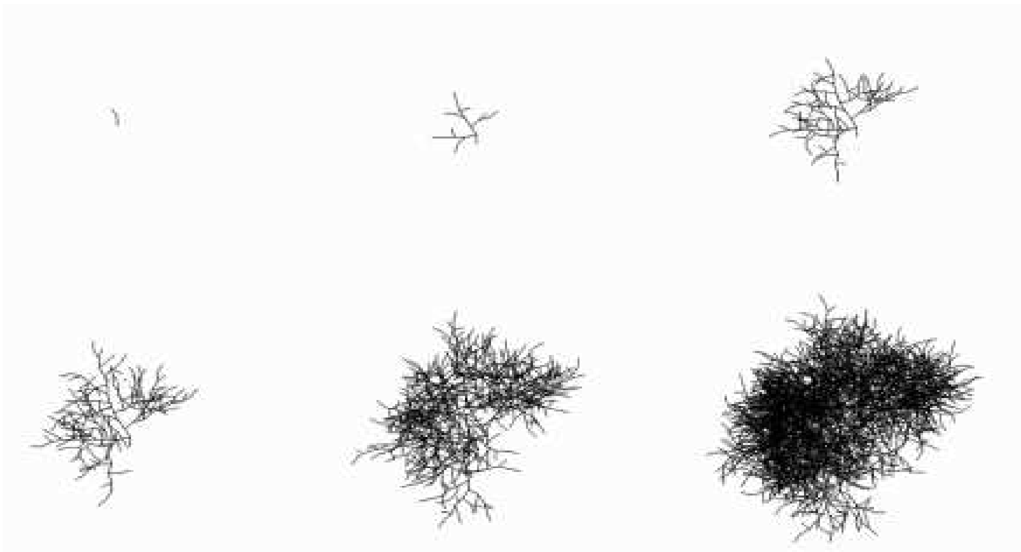

Figura 2: Simulação do crescimento e ramificação das hifas.(Soddell et. al. 1995).

O processo de ramificação e crescimento das hifas, que caracterizam o crescimento do micélio, pode ser bastante complexo. Edelstein e Ermentrout (1989), descrevem várias maneiras de produção de novos ápices e ramos. Entre estes podemos destacar: a ramificação lateral, onde os novos ramos saem em algum ponto ao longo do comprimento de uma hifa pré existente; a bifurcação, quando um ápice bifurca e é então substituído por dois ou mais novos ápices. Eles também destacam a possibilidade de eliminação de ápices, ocasionado pela fusão de uma ponta com um filamento ou mesmo com outro ápice. Tal evento é denominado de anastomose.

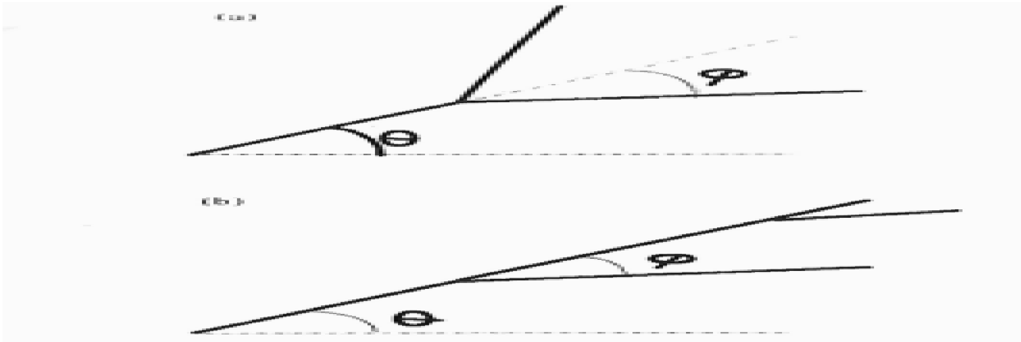

Figura 3: Tipos de ramificação de uma hifa. (a) bifurcação e (b) ramificação lateral. (Edelstein et. al. 1989).

A morfologia de uma colônia de fungos filamentosos, depende do processo de crescimento e ramificação das hifas. Estes dois processos são essencialmente distintos. Um crescimento apical contínuo e a ramificação como um evento discreto no espaço e no tempo (Crawford e Ritz, 1994).

Uma boa descrição do crescimento de uma colônia de fungos depende de uma razoável estimativa para o número de ápices ou para a densidade micelial por unidade de área.

A análise fractal é uma maneira de caracterizar a forma como as hifas estão distribuídas dentro de uma colônia. A dimensão fractal quantifica a auto-similaridade, característica essencial dos fractais. Diversos trabalhos têm sugerido que a complexa distribuição espacial das hifas numa colônia, tem essa característica, ou seja, tem a mesma estrutura vista em diferentes escalas de medida (Prosser, 1994; Ritz e Crawford, 1990; Crawford e Ritz, 1994).

A figura 4, apresenta as curvas do comprimento total de hifas em função da área sobre a qual esse comprimento foi calculado. Quando a colônia é homogênea, ou seja, as hifas estão distribuídas homogeneamente dentro da colônia, o gráfico resultante é uma reta, o que significa que o comprimento total por unidade de área é constante (Crawford e Ritz, 1994).

No entanto a densidade de hifas, em geral, pode não estar homogeneamente distribuída dentro da colônia e assumindo que a produção de massa micelial por unidade de comprimento de hifas é constante, Ritz e Crawford propuseram a seguinte relação (Ritz e Crawford, 1990):

$$M(r) \propto r^D \tag{2.1}$$

onde $M(r)$ é a massa micelial confinado numa colônia de raio r e D seria a dimensão fractal da distribuição das hifas.

Para uma colônia de fungos desenvolvendo-se sobre uma superfície bi-dimensional temos $1 < D < 2$ (Crawford e Ritz, 1994). A dimensão fractal é 2 quando os filamentos (ou micélio) estão homogeamente distribuídos sobre a região. Havendo agrupamentos de hifas concentradas heterogeneamente em regiões da colônia teremos $D < 2$.

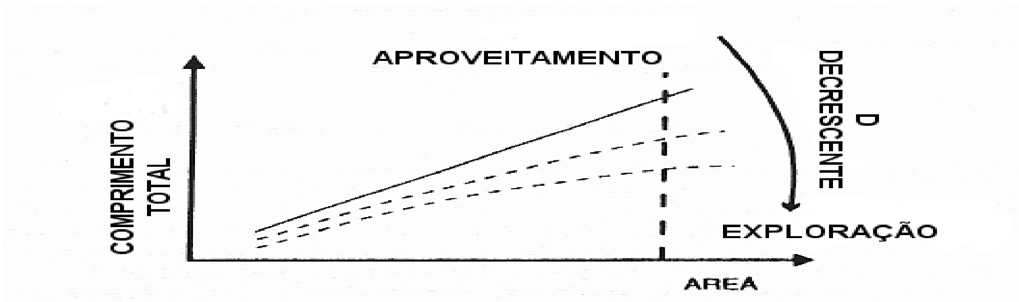

Figura 4: Gráfico do comprimento total de hifas em relação a área sobre o qual o comprimento é medido, para uma colônia desenvolvendo-se sobre uma superfície de dimensão 2 Crawford e Ritz (1994).

A sobrevivência e crescimento da colônia de fungos depende da capacidade das hifas na busca e absorção de nutrientes. A dimensão fractal da massa micelial está diretamente relacionada com este processo de exploração e aproveitamento dos recursos disponíveis no meio, principalmente quando esta distribuição é heterogênea.

Quando há pouco nutriente, a colônia cresce com uma distribuição da massa micelial descrita por uma dimensão fractal $D < 2$ (para o caso do meio bi-dimensional) investindo dessa maneira, somente algumas poucas hifas "exploradoras", na mesma região do espaço, na busca de pontos com mais nutrientes. Quando tal região é encontrada por essas hifas então o micélio passa a ser descrito por uma dimensão fractal maior favorecendo agora a ramificação (Crawford e Ritz, 1994).

Quanto mais escasso for a quantidade de nutrientes do meio, menor será a possibilidade de ramificação das hifas (Parkinson et al., 1989).

O crescimento de uma colônia formada por fungos filamentosos depende essencialmente das hifas cujas pontas estão na sua periferia, pois estas são as hifas exploradoras (Trinci, 1971; Crawford e Ritz, 1994).

3. Modelo Matemático

Propomos, um modelo matemático para descrever o processo de invasão de lesões foliares provocadas por fungos em uma plantação, em um meio unidimensional e homogêneo. Este é um modelo razoável para as modernas plantações agrícolas.

A área de uma lesão aumenta quanto maior for o comprimento de sua periferia. No caso de uma lesão circular, por exemplo, temos que a sua área é $A = \pi r^2$ onde r é o raio, e o seu crescimento será proporcional ao perímetro: $p = 2\pi^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$.

No caso de lesões cujas formas geométricas não podem ser facilmente comparadas com círculos, ou com qualquer figura geométrica com fronteira seccionalmente regular, ainda assim a sua área poderá aumentar como função do seu perímetro. Nestes casos, devemos investigar qual deve ser o expoente β para que a fronteira de uma região de área A possa ser escrita na forma $p = \alpha A^{\beta}$.

Neste modelo, distribuímos a população de lesões em um espaço de aspecto bidimensional constituído pela sua posição espacial e a medida de sua área, ou seja, o espaço de aspecto é: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}$ com coordenadas (x, A).

O processo de dispersão de longa distância, que ocorre na variável x, é realizado pelos esporos que ao serem transportados formam novas lesões em outras posições.

Denotamos por $U(x, A, t)$ a densidade, por unidade de comprimento, de lesões de área A na posição espacial x e no instante t, e $\int_0^{\infty} U(x, A, t)dA$ representa a densidade de colônias (independente do tamanho) ao longo do espaço unidimensional representado pela posição x no instante t.

A taxa de variação instantânea do número de colônias, com áreas no intervalo $[A_1, A_2]$ com $0 < A_1 < A_2$, contabilizados entre $[x_1, x_2]$, $\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{x_2}\int_{A_1}^{A_2} U(x, A, t)dAdx\right)$, é igual à taxa de entrada/saída de colônias que já estavam no intervalo $[x_1, x_2]$ e cuja área será incluída/excluída do intervalo $[A_1, A_2]$ por causa do aumento da sua área:

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial}{\partial A}\left(vU(x, A, t)\right) dAdx,$$

menos a mortalidade das colônias localizadas nessa região:

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{A_1}^{A_2} \mu U(x, A, t)dAdx.$$

Assim temos:

Sejam $0 < r_1 < r_2$, pelo Princípio de Conservação temos:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial U}{\partial t} U(x, A, t)dAdx = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial}{\partial A}\left(vU(x, A, t)\right) dAdx \\ -\int_{x_1}^{x_2}\int_{A_1}^{A_2} \mu U(x, A, t)dAdx\end{aligned} \tag{3.2}$$

A expressão $-\int_{x_1}^{x_2}\int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial}{\partial A}\left(vU(x, A, t)\right) dAdx$ é o resultado de um fluxo $vU(x, A, t)$ na direção da coordenada A, agindo somente na fronteira do retângulo determinado por $A = A_1$ e $A = A_2$, na forma: $\int_{x_1}^{x_2} vU(x, A_1, t)dx - \int_{x_1}^{x_2} vU(x, A_2, t)dx$.

Supondo que as funções envolvidas na equação 3.2 e suas derivadas sejam contínuas no espaço de aspecto, e usando o fato que esta relação vale para quaisquer A_1 e A_2 e x_1 e x_2, podemos escrever esta equação na forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial A}(vU) - \mu U, \qquad t > 0 \text{ e } A > 0 \tag{3.3}$$

A equação 3.3 representa a dinâmica de crescimento das lesões de área maior que *zero*, ou seja, ela não contempla o aparecimento de novas lesões.

Quando $A = 0$, temos que $vU(x, 0, t)$ representa a população de esporos, ou seja colônias de área ainda nula, aparecendo naa posição x, e que representaremos na forma:

$$vU(x,0,t) = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{A_0(x)} K(x,y)U(y,A,t)AdAdy \tag{3.4}$$

onde $A_0(x)$ representa a área total disponível, para o crescimento das lesões, na posição x e $K(x,y)$ representa o núcleo de redistribuição dos esporos, ou seja , a transferência dos indivíduos da posição y para a posição x,

Supomos que a quantidade de esporos que aparecem numa determinada posição, depende da posição onde se localizam as lesões que emitem os esporos e também da quantidade de esporos que são produzidos por essas lesões.onde $K(x,y)$ representa o núcleo de redistribuição dos esporos, ou seja , a transferência dos indivíduos da posição y para a posição.

4. Resultados

Realizamos algumas simulações numéricas com as equações 3.3 e 3.4 a fim de analisar a propagação das lesões.

Para o núcleo de redistribuição consideramos:

$$K(x,y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\sigma}\right) \tag{4.5}$$

que representa a dispersão de longa distância realizada pelos esporos.

Como a velocidade deve depender do perímetro da lesão, tomamos $v = cA\beta$, onde β representa a dimensão fractal da fronteira da colônia de área A. Esta hipótese é razoável para situações em que ainda há uma grande área disponível de folhagem para invasão das lesões no ponto x.

Para a taxa de mortalidade, supomos que esta depende da quantidade de lesões, independente do tamanho, existentes no ponto x.

Supondo que inicialmente uma certa densidade de esporos aparece na posição $x = 0$, analisamos como evolui a densidade de lesões em cada posição em relação ao tempo.

A figura 5 apresenta algumas soluções obtidas para alguns valores de β, onde podemos observar como aumenta a densidade total de lesões em cada posição.

A figura 6 mostra como aumenta a área total atingida pelas lesões, em cada posição x, dependendo do valor de β.

5. Discussão

A propagação de lesões foliares causadas por fungos é altamente influenciada pelo processo de crescimento das hifas.

Quando um esporo aparece sobre uma folha, diversos fatores afetam a sua germinação e a formação do micélio, entre estes podemos destacar: a umidade, a temperatura e as condições da própria folha quanto a quantidade de nutrientes necessários para o crescimento do fungo (Agrios, 1997).

O crescimento fractal, que descreve o preenchimento da área total da lesão, é uma forma de otimizar a captura de nutrientes para o sucesso da germinação do esporo.

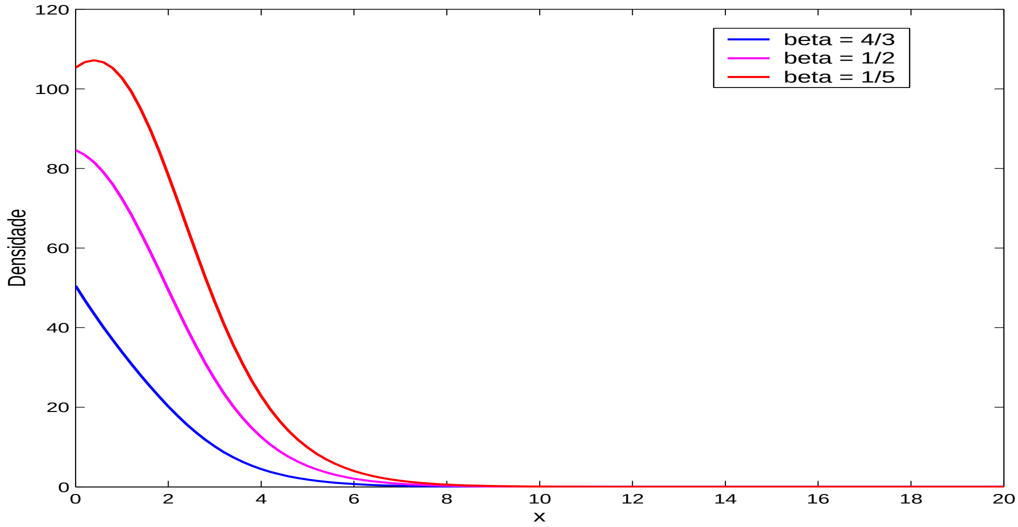

Figura 5: Densidade total de lesões em cada posição x, para beta = 4/3 (azul), beta = 1/2 (rosa) e beta = 1/5 (vermelho).

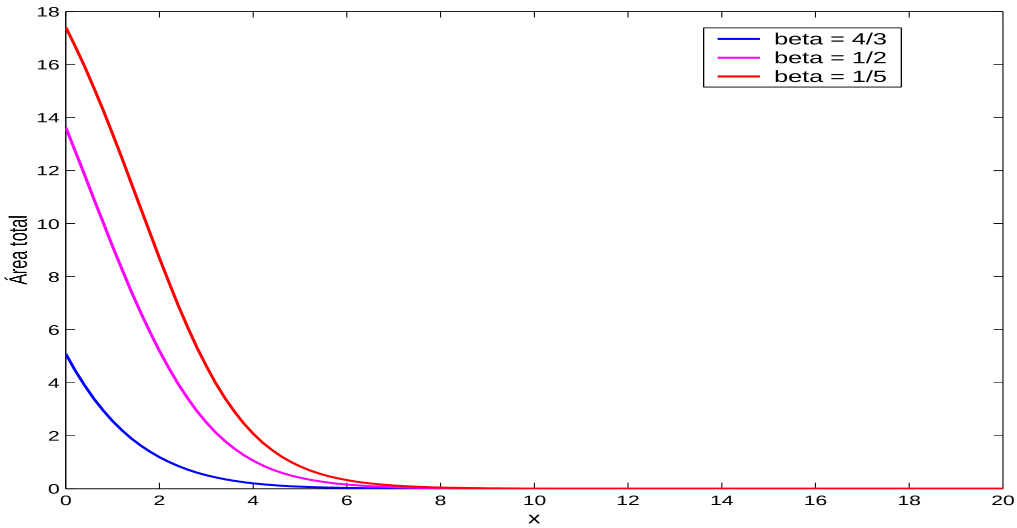

Figura 6: Área total ocupada pelas lesões em cada posição x, para beta = 4/3 (azul), beta = 1/2 (rosa) e beta = 1/5 (vermelho).

Referências

Agrios, G. N. (1997). *Plant Pathology.* Academic Press - 4^a ed., San Diego.

Crawford, J. W. e Ritz, K. (1994). *Shape and form in plants and animal.* Eds. D. S. Ingram and A. Hudson. Academic Press, London.

Edelstein, L. (1982). The propagation of fungal colonies: a model for tissue growth. *J. Theor. Biology*, 98.:679-701.

Edelstein-Keshet, L. e Ermentrout, B. (1989). Models for branching networks in two dimensions. *SIAM J. Appl. Math.*, 49(4).:1136-1157.

Parkinson, S. M., Wainwright, M. e Killham, K. (1989). Observations on oligotrophic growth of fungi on silica gel. *Mycological Research*, 93.:529-534.

Prosser, J. I. e Trinci, A. P. J. (1979). A model for hyphal growth and branching. *Journal of General Microbiology*, 111.:153-164.

Prosser, J. I. (1994). *The growing fungus.* Eds. N. A. R. Gow and G. M. Gadd. Chapman & Hall, London.

Ritz, K. e Crawford, J. (1990). Quantification of the fractal nature of colonies of Trichoderma viriade. *Mycol. Res.*, 94(8).:1138-1152.

Soddell, F., Seviour, R. e Soddell, J. (1995). Using Lindenmayer systems to investigate how filamentous fungi may produce round colonies. *Complexity Internacional*, 2.

Trabulsi, L. R. et al. (1999). *Microbiologia.* 3^a ed. Atheneu, São Paulo.

Trinci, A. P. J. (1971). Influence of the width of the peripheral growth zone on the radial growth rate of fungal colonies on solid media. *J. Gen. Microbiology*, 67.:325-344.