

# O *Aedes* e sua Onda

L. T. Takahashi<sup>1</sup>, N. A. Maidana<sup>2</sup>, W. C. Ferreira Jr<sup>3</sup>,  
DMA, IMECC–UNICAMP, 13.083-970 – Campinas, SP.

**Resumo.** Dengue é uma doença virótica séria transmitida pelo mosquito *Aedes aegypti* o qual se espalha através da América tropical. Desde que ainda não existe uma vacina efetiva contra o dengue, o que é previsto para um futuro próximo, o único caminho possível para baixar seu impacto sobre a população humana é controlando a proliferação e dispersão da população do vetor. Este trabalho propõe um modelo matemático não linear para a dinâmica do *Aedes aegypti* o qual leva em conta suas formas larva e alada como duas sub-populações acopladas. A população alada espalha por (ação do vento) transporte e (auto) difusão enquanto a dinâmica da larva é estática, cresce por oviposição e decresce devido ao seu desenvolvimento para mosquito e morte natural. Numericamente simulações mostram que a frente de onda viajante estável se desenvolve rapidamente vindo de qualquer suficientemente forte perturbação inicial. Uma análise matemática nos dá condições de existência de ondas viajantes assim como sua velocidade de propagação, são ainda graficados a velocidade da onda dependente crucialmente dos parâmetros. Uma interpretação biológica destes resultados indicam uma possível estratégia para parar a propagação frente de onda por uma apropriada modificação do meio com respeito a dinâmica vital do mosquito.

**Palavras-chave:** Ondas Viajantes; Difusão-Convecção; *Aedes aegypti*; Dengue.

## 1. Introdução

Todos os anos, principalmente no verão, há uma grande incidência de pessoas acometidas de dengue, doença virótica que para ser transmitida é necessário que um mosquito pique uma pessoa infectada e, após o vírus ter se multiplicado, pique uma pessoa sã e suscetível. Somente a fêmea do mosquito pica e preferencialmente de dia (Tocantins, 2003). O *Aedes aegypti* é o vetor mais comum e se prolifera com facilidade no ambiente doméstico pela ausência de predadores e grande disponibilidade de criadouros. A fêmea põe os ovos dentro de qualquer recipiente com água mais ou menos limpa e parada, colando-os nas paredes destes recipientes, bem próximo da água. Dos ovos surgem larvas e estas por sua vez se transformam em pupas que vão formar novos mosquitos adultos. Este período de evolução varia de acordo com a temperatura e a disponibilidade de alimento do meio. Desta forma, o mosquito é facilmente encontrado junto à população urbana onde há grande fartura de criadouros (por exemplo, garrafas, caixas d'água, vasos, pneus entre outros) e alimento

---

<sup>1</sup>Bolsista da CAPES/PICDT-UFV, ltiemi@ime.unicamp.br

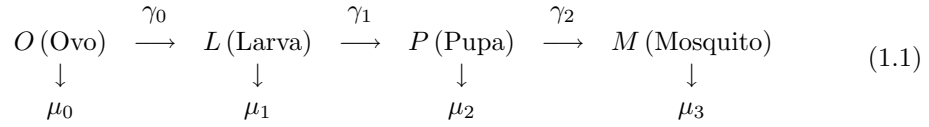
<sup>2</sup>Bolsista da CAPES, nmaidana@ime.unicamp.br

<sup>3</sup>wilson@ime.unicamp.br

(sangue humano). O Brasil oferece propícias condições de temperatura e umidade para que o mosquito se desenvolva, o que é facilmente verificado, pois está presente em cerca de 3600 municípios brasileiros. Além da dengue o *Aedes aegypti* é também vetor da febre amarela.

O *Aedes aegypti*, foi erradicado no Brasil na década de 30 como resultado de um programa contra a febre amarela, o que fez desaparecer também a dengue. Mas, em 1981 a dengue ressurgiu em Boa Vista, Roraima região norte do país. E em 1986-87, no Rio de Janeiro, região sudeste, ocorreu a primeira grande epidemia que registrou 90 mil casos. Pouco tempo foi necessário para a dengue espalhar-se pelo país, chegando a atingir um pico de 570.148 casos em 1998. Atualmente está em torno de 370 mil casos (CIVES, 2003).

A finalidade deste trabalho é obter mecanismos para o controle da dengue, o que até o momento é centrado na erradicação do vetor (*Aedes aegypti*), uma vez, que as vacinas estão ainda em fase experimental. Para isto, como um primeiro passo estamos desenvolvendo modelos matemáticos para analisar a dinâmica da população deste mosquito transmissor. Propomos então o seguinte esquema compartimental baseado no seu processo de desenvolvimento:



onde,  $O(x, t)$ ,  $L(x, t)$ ,  $P(x, t)$  e  $M(x, t)$  são as densidades de Ovos, Larvas, Pupas e Mosquitos, respectivamente. Em cada uma destas fases existe uma taxa  $\mu_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  de mortalidade e uma outra taxa  $\gamma_i$  de passagem da fase  $i$  para a fase  $i + 1$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Com base no esquema acima e considerando:  $D$  o coeficiente de difusão dos mosquitos,  $v$  a velocidade de transporte,  $r$  a taxa intrínseca de crescimento,  $K$  a capacidade suporte do meio, propomos o modelo matemático unidimensional:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - v \frac{\partial M}{\partial x} + \gamma A \left(1 - \frac{M}{k_1}\right) - \mu_1 M, \\
 \frac{\partial A}{\partial t} &= r \left(1 - \frac{A}{k_2}\right) M - \mu_2 A - \gamma A,
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

que retrata a dinâmica do inseto. A primeira equação representa a fase alada e móbil (Mosquito) e a segunda a fase aquática (Pupa, Larva e Ovo), estática. A mobilidade dos mosquitos é descrita por um processo de difusão (aleatório) e uma convecção causada por transporte ambiental.

Consideramos inicialmente o modelo unidimensional que pode ser interpretado como re-presentativo de uma situação plana na qual em uma direção o processo se dê de maneira uniforme. Esta simplificação é de interesse biológico e permite uma análise matemática mais detalhada do processo de invasão.

O nosso objetivo aqui será determinar uma solução Onda Viajante, bem como sua velocidade de propagação. As soluções Onda Viajante são as funções  $m(z) = M(x, t)$  e  $a(z) = A(x, t)$ , para  $z = x - ct$ , onde  $c$  é a velocidade da onda (Murray, 1993).

## 2. As Ondas Viajantes

O estudo de invasões biológicas tem sido alvo de crescente interesse. A invasão em geral é resultante de um evento local, como a introdução de um certo número de organismos de uma espécie não nativa, que encontrando um meio favorável, começa a crescer e espalhar-se sobre uma área (Shigesada e Kawasaki, 1997).

No sistema,

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - v \frac{\partial M}{\partial x} + \gamma A \left(1 - \frac{M}{k_1}\right) - \mu_1 M, \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= r \left(1 - \frac{A}{k_2}\right) M - \mu_2 A - \gamma A,\end{aligned}\tag{2.1}$$

consideramos que a variação da densidade  $M$  do mosquito em relação ao tempo, é devida à mobilidade por difusão e convecção e às fontes intrínsecas. A fonte positiva  $\left[\gamma A \left(1 - \frac{M}{k_1}\right)\right]$  descreve a produção de mosquitos provenientes da fase aquática regulada por uma capacidade de suporte do meio  $\left(1 - \frac{M}{k_1}\right)$ . A fonte negativa  $[-\mu_1 M]$  é um processo morte usual.  $D$  é o coeficiente de difusão, que mede quão rápido é a dispersão dos mosquitos, a convecção é devida a presença de transporte com velocidade  $v$ ,  $\gamma$  é a taxa de passagem da fase aquática para a alada,  $k_1$  é capacidade suporte do mosquito e  $\mu_1$  é a taxa de mortalidade nesta fase. Já na segunda equação, a variação da densidade  $A$  da fase aquática em relação ao tempo, é dada por um crescimento logístico, com  $r$  sendo a taxa de oviposição por fêmea e  $k_2$  capacidade suporte desta fase, e retirada de indivíduos por morte e passagem para a fase alada, que são controladas pelos coeficientes  $\mu_2$  e  $\gamma$ , respectivamente.

Adimensionalizamos o sistema (2.1), tomando a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}t^* &= rt, & A^* &= \frac{A}{k_2}, & M^* &= \frac{M}{k_1}, & k &= \frac{k_1}{k_2}, & x^* &= \frac{x}{\sqrt{D/r}}, \\ \gamma^* &= \frac{\gamma}{r}, & \mu_1^* &= \frac{\mu_1}{r}, & \mu_2^* &= \frac{\mu_2}{r}, & v^* &= \frac{v}{r\sqrt{D/r}},\end{aligned}\tag{2.2}$$

Retirando os asteriscos para uma simplificação de notação, o sistema adimensionalizado toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - v \frac{\partial M}{\partial x} + \gamma (1 - M) A - \mu_1 M, \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= k (1 - A) M - (\mu_2 + \gamma) A.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Sistemas de reação e difusão são notórios em admitir soluções do tipo Onda Viajante (Weinberger, 1982). Algumas destas soluções tem a sua importância decorrente de sua estabilidade e forte atração. Isto significa que perturbações iniciais, desde que suficientemente fortes, rapidamente se aproximam de uma solução do tipo Onda Viajante, que é portanto, a dinâmica mais “visível” do sistema. Pelos resultados obtidos da equação de Fisher determinaremos o  $c_{\min}$ , a menor velocidade que a onda pode assumir, pois a onda de menor velocidade é a única estável (Murray, 1993). Simulações numéricas do sistema (2.1) comprovam facilmente esta afirmação para este caso.

## 2.1. À Direita

As soluções Ondas Viajantes de (2.3), seriam dadas por funções da forma

$$m(z) = M(x, t), \quad a(z) = A(x, t), \quad z = x - ct, \quad (2.4)$$

onde  $m(z)$  e  $a(z)$  são os perfis viajantes das ondas e  $c$  a velocidade da frente de onda, a serem determinados.

Procuramos perfis  $m(z)$  e  $a(z)$  na forma de funções positivas, decrescentes e tais que  $\lim_{z \rightarrow -\infty} m(z) = m_1$  e  $\lim_{z \rightarrow -\infty} a(z) = a_1$ , onde  $m_1$  e  $a_1$  são positivos e  $\lim_{z \rightarrow \infty} m(z) = 0 = \lim_{z \rightarrow \infty} a(z)$  este tipo de solução é conhecida como Frente de Onda Viajante que, para  $c > 0$ , representa uma invasão ao longo do eixo  $z$ , na direção positiva, veja figura 1a.

Com a substituição de (2.4) em (2.3) obtemos o sistema de equações diferenciais ordinárias para  $m(z)$  e  $a(z)$ :

$$\begin{aligned} m' &= h, \\ h' &= (v - c)h - \frac{\gamma}{k}(1 - m)a + \mu_1 m, \\ a' &= -\frac{k}{c}(1 - a)m + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a. \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde “linha” representa a derivada em relação a variável  $z$ .

Considerando o nosso objetivo, buscaremos soluções  $m(z)$  e  $a(z)$  que conectam um ponto estacionário  $(m(z), h(z), a(z)) \rightarrow (m_1, h_1, a_1)$ ,  $z \rightarrow -\infty$ , à origem  $(m(z), h(z), a(z)) \rightarrow (0, 0, 0)$ ,  $z \rightarrow \infty$ .

A análise deste sistema envolve um estudo do espaço de fase tridimensional  $(m, h, a)$ , no qual existem somente dois estados estacionários; o trivial  $P_0 = (0, 0, 0)$  e  $P_1 = (m_1, 0, a_1)$ , onde

$$a_1 = \frac{k\gamma - \mu_1 k(\mu_2 + \gamma)}{k\gamma + \gamma(\mu_2 + \gamma)} \quad \text{e} \quad m_1 = \frac{\gamma a_1}{\mu_1 k + \gamma a_1}. \quad (2.6)$$

Como estamos interessados em soluções Ondas Viajantes não-negativas, a primeira condição de existência é:

$$k\gamma - \mu_1 k(\mu_2 + \gamma) > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > \frac{\mu_1 \mu_2}{1 - \mu_1} \quad (2.7)$$

que nos garante,  $a_1$  e  $m_1$  positivos. Note que, pela mudança de variáveis (2.2), obtemos

$\gamma > \frac{\mu_1 \mu_2}{1 - \mu_1} \stackrel{(2.2)}{\Rightarrow} \frac{r}{\mu_1} > \frac{\gamma + \mu_2}{\gamma} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \frac{r}{\mu_1} \pi > 1$  logo,  $\pi = \frac{1/(\gamma + \mu_2)}{1/\gamma}$  é a probabilidade do inseto sobreviver a fase aquática e assim virar mosquito e  $\frac{r}{\mu_1} \pi$  é o número de ovos viáveis, ou seja, que viram mosquitos. Assim, o número adimensionalizado de ovos viáveis maior que 1 (um), é uma condição necessária para existência de Ondas Viajantes.

Procuramos por soluções que representem uma possível invasão dos insetos, ou seja, sendo o ponto  $P_0$  correspondente à ausência da praga e  $P_1$  a infestação, iremos usar um método geométrico para mostrar a existência de uma trajetória  $T$ , no octante do espaço de

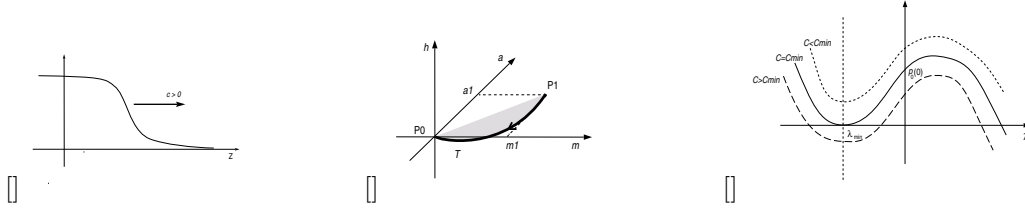


Figura 1: A figura 1a é o perfil da solução frente de Onda Viajante procurada. Na figura 1b temos a trajetória no espaço de fase ligando o ponto  $P_1$  a  $P_0$ . Na figura 1c temos o polinômio cúbico  $p_0(\lambda)$  como função de  $\lambda$  com  $c$  variando. Destaque para  $\lambda_{\min}$  o ponto de mínimo local de  $p_0$ .

fase onde  $m \geq 0$ ,  $a \geq 0$  e  $h \leq 0$ , ligando estes pontos (figura 1b), ou seja, procuramos por soluções  $m(z)$  e  $a(z)$  com condições laterais infinitas:

$$m(-\infty) = m_1, \quad m(\infty) = 0, \quad a(-\infty) = a_1 \quad \text{e} \quad a(\infty) = 0. \quad (2.8)$$

Para isto devemos ter pelo menos uma variedade instável em  $P_1$  e uma variedade estável em  $P_0$ , ambas totalmente contidas no octante com  $m \geq 0$ ,  $a \geq 0$  e  $h \leq 0$ . Para analisar estas possibilidades linearizamos o sistema no ponto singular  $P_0 = (0, 0, 0)$ , onde seus autovalores  $\lambda$  são raízes do polinômio característico

$$p_0(\lambda) = -\lambda^3 + \left( \frac{\mu_2 + \gamma}{c} + (v - c) \right) \lambda^2 + \left( \mu_1 - (v - c) \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \right) \lambda - \left( \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \right) \mu_1 + \frac{\gamma}{c}.$$

Sendo  $p_0(0) = \frac{\gamma}{c} - \mu_1 \left( \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \right)$  pela condição (2.7), temos que  $p_0(0) > 0$  e, junto com o fato do coeficiente de  $\lambda^3$  ser negativo, garantimos somente a existência de pelo menos um autovalor  $\lambda > 0$  raiz de  $p_0(\lambda)$ . Para que exista pelo menos uma variedade estável em  $P_0$ , devemos garantir a existência de pelo menos um autovalor negativo, para tanto vamos impor que o mínimo local de  $p_0(\lambda)$  seja negativo,  $\lambda_{\min} < 0$ , e  $p_0(\lambda_{\min}) < 0$ ; veja figura 1c. Diferenciando  $p_0(\lambda)$  obtemos,

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\mu_2 + \gamma}{c} + (v - c) - \sqrt{\left[ \frac{\mu_2 + \gamma}{c} + v - c \right]^2 + 3 \left[ \mu_1 - (v - c) \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \right]} \right\}$$

considerando  $c > v$ , o polinômio característico admite mínimo local real negativo. A condição  $c > v$ , diz que a velocidade da onda viajante é maior do que a velocidade de transporte. Estamos buscando a frente de onda mais rápida. No sentido contrário ao transporte existe uma outra velocidade positiva ou negativa, dependendo da velocidade de transporte, veja seção abaixo (2.2 À Esquerda). Com um conjunto de parâmetros  $\gamma$ ,  $v$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , que satisfaz a condição (2.7), o próximo passo é determinar  $c_{\min} = c_{\min}(\gamma, v, \mu_1, \mu_2)$ , tal que,  $p_0(\lambda_{\min}) = 0$ . Assim para  $c > c_{\min}$ ,  $p_0(\lambda_{\min})$  é negativo, desta forma garantimos a existência de dois autovalores reais negativos, o que evita a oscilação em torno da origem e assim populações negativas o que seria fisicamente irreal. Note que, qualquer mudança nos valores destes parâmetros alterará o valor de  $c_{\min}$ .

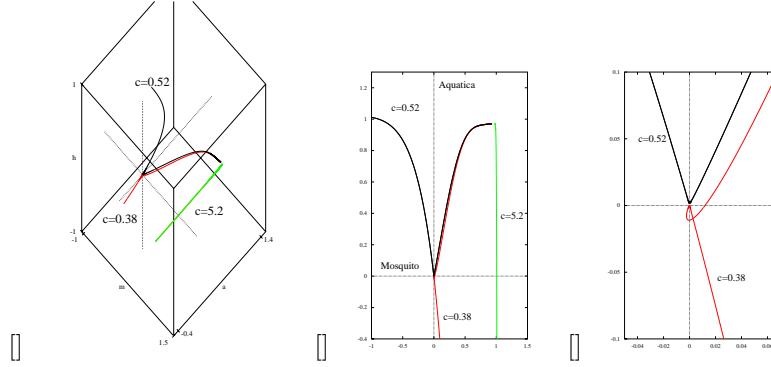


Figura 2: Figura 2a o espaço de fase, simulação feita com os parâmetros (2.10) e velocidades  $c = 0,38$ ,  $c = 0,52$  e  $c = 5,2$ . A projeção no plano  $(m, a)$  das trajetórias exibidas na figura 2a é apresentada na figura 2b, e a figura 2c está em maior escala para visualização da oscilação que a trajetória com velocidade  $c = 0,38$  realiza, saindo do quadrante positivo.

Dado  $k$ , obtemos  $m_1$  e  $a_1$ . Definido o ponto de equilíbrio não trivial,  $P_1 = (m_1, 0, a_1)$ , determinamos

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{k}a_1 + \mu_1 & (v - c) & -\frac{\gamma}{k}(1 - m_1) \\ -\frac{k}{c}(1 - a_1) & 0 & \frac{\mu_2 + \gamma + km_1}{c} \end{bmatrix}$$

a matriz Jacobiana em  $P_1$ . Obtemos então os autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , que são dependentes de  $c$  assim como os autovetores associados a eles. Verificamos que para  $c > c_{\min}$ , existem dois autovalores positivos e conseqüentemente seus autovetores definem uma variedade instável bidimensional e é por este plano que a trajetória  $T$  deverá iniciar-se. Sendo  $c > c_{\min}$ , a condição (2.8) é satisfeita, e conforme aumentamos  $c$  a posição da variedade instável vai se alterando até atingir uma posição crítica, a partir da qual,  $T$  deixa de existir. A esta posição crítica está associado uma velocidade  $c$ , que denotaremos por  $c_{\max}$ .

Assim, dado um conjunto de parâmetros, para que exista solução onda viajante é necessário e suficiente que este conjunto satisfaça a condição (2.7) e

$$c \in (c_{\min}, c_{\max}). \quad (2.9)$$

Realizamos com os recursos do programa XPPAUT (Ermentrout, 2002), simulações numéricas com os seguintes parâmetros adimensionais

$$v = 0,08164; \quad k = 0,25000; \quad \gamma = 0,00666; \quad \mu_1 = 0,00133 \text{ e } \mu_2 = 0,00033. \quad (2.10)$$

os quais, foram obtidos dos seguintes parâmetros para a evolução do *Aedes aegypti* (SUCEN, 2003)

$$\begin{aligned} D &= 1,25 \times 10^{-2} \text{ km}^2/\text{dia}, & v &= 5 \times 10^{-2} \text{ km}/\text{dia}, \\ \gamma^{-1} &= 5 \text{ dias}, & r &= 30 \text{ 1}/\text{dia}, \\ \mu_1^{-1} &= 25 \text{ dias}, & k_1 &= 25 \text{ n}^\circ \text{ de indivíduos}/\text{km}^2, \\ \mu_2^{-1} &= 100 \text{ dias}, & k_2 &= 100 \text{ n}^\circ \text{ de indivíduos}/\text{km}^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

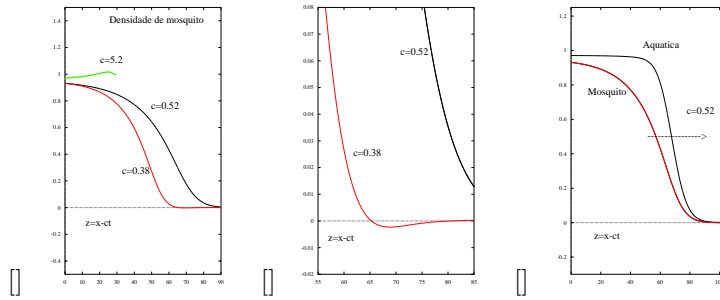


Figura 3: A figura 3a apresenta as soluções correspondentes as trajetórias exibidas na figura 2. Na figura 3b temos uma aproximação sobre o eixo- $z$  da figura 3a, para uma melhor visualização do comportamento da curva com  $c = 0,38$ . Na figura 3c temos as soluções Onda Viajante  $m$  e  $a$ , satisfazendo o sistema (2.5), com os parâmetros (2.10) e velocidade de propagação  $c = 0,52$ .

junto com (2.2). Daí obtemos  $m_1 = 0,951$ ;  $a_1 = 0,971$ ;  $c_{\min} \approx 0,514$  e  $c_{\max} \approx 5,17$ .

Na figura 2a, observamos o espaço de fase, com três trajetórias correspondentes às velocidades  $c = 0,38$ ,  $c = 0,52$  e  $c = 5,2$ . Na figura 2b, temos a projeção das trajetórias no plano  $(m, a)$ . As soluções correspondentes a estas trajetórias são apresentadas na figura 3a. Fizemos também aproximações para uma melhor visualização do comportamento da solução com velocidade  $c = 0,38$ , uma em torno da origem, figura 2c, onde vemos que a trajetória gira assumindo assim valores negativos, e outra sobre o eixo- $z$ , figura 3b, que mostra o comportamento da curva gerada por esta trajetória, que é uma solução onda viajante não desejada.

Para  $c = 0,52$ , encontramos uma trajetória ligando os pontos de equilíbrio  $P_1$  e  $P_0$ , a Condição Inicial,  $CI$ , para a simulação foi definida da seguinte maneira:  $CI = P_1 + \alpha V_\lambda$ , onde,  $0 < \alpha \ll 1$  e  $V_\lambda$  é um autovetor associado a um dos autovalores positivos. Obtemos soluções onda viajante  $m(z)$  e  $a(z)$ , conforme figura 3c, a velocidade dimensional associada a velocidade adimensional  $c = 0,52$  é de aproximadamente  $0,32$  Km/dia.

Para uma melhor análise, numericamente calculamos a condição (2.9), examinamos como a velocidade  $c_{\min}$  muda com relação aos parâmetros  $\gamma$ ,  $v$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Inicialmente comparamos  $c_{\min}$  com o parâmetro  $\gamma$  (taxa de passagem da fase aquática à alada), figura 4a, onde podemos observar que  $c_{\min}$  cresce conforme  $\gamma$  cresce. A variação de  $c_{\min}$  é grande quando  $\gamma$  é pequeno, mas conforme  $\gamma$  cresce esta variação torna-se cada vez menor, pois o meio vai ficando saturado de mosquitos e desta forma os mosquitos não tem mais as mesmas condições de sobrevivência de quando a população era menor.

Na figura 4b, vemos que a velocidade  $c_{\min}$  aumenta também quando  $v$  (velocidade de transporte) cresce, mas não na mesma magnitude, por exemplo, quando  $v = 0$  é  $c_{\min} \approx 0,45$  e quando  $v = 1$  temos  $c_{\min} \approx 1,31$ . A velocidade de transporte aumenta uma unidade, mas  $c_{\min}$  aumenta  $0,86$ , esta diferença é devida à reprodução do mosquito, pois o período de evolução faz com que o processo seja lento, já que o transporte só empurra os mosquitos e não ovos, larvas e pupas. No modelo de Fisher, por exemplo, onde a reprodução é direta, a velocidade de invasão aumenta na mesma magnitude que a do transporte.

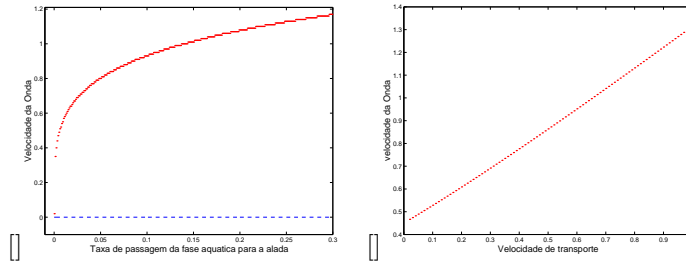


Figura 4: Na figura 4a, temos o comportamento de  $c_{\min}$ , quando variamos o parâmetro  $\gamma$ , taxa de passagem da fase aquática para a alada, com  $v = 0,08164$  fixo. A figura 4b, exibe  $c_{\min}$  em função de  $v$ , velocidade de transporte com  $\gamma = 0,00666$  fixo. Os parâmetros adimensionais  $\mu_1 = 0,00133$ ;  $\mu_2 = 0,00033$  e  $k = 0,25$  são os mesmos nas figuras 4a,b.

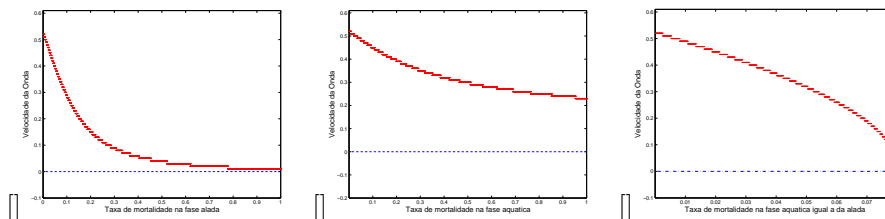


Figura 5: A figura 5a exibe  $c_{\min}$  em função de  $\mu_1$ , taxa de mortalidade na fase alada, com  $\mu_2 = 0,00033$ , taxa de mortalidade na fase aquática, fixa. Note que  $c_{\min}$  sofre brusca queda conforme vamos aumentando o valor de  $\mu_1$ . Na figura 5b agora com  $\mu_1 = 0,00133$  fixo, temos um gráfico onde  $\mu_2$  está variando. Obtemos uma nova curva para  $c_{\min}$ , nesta vemos que a variação de  $c_{\min}$  é menor do que na figura 5a, conforme variamos  $\mu_2$ . Já na figura 5c obtemos uma curva para  $c_{\min}$ , variando  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , ao mesmo tempo, tomando  $\mu_1 = \mu_2$ . Note que com pouca variação na mortalidade,  $c_{\min}$  diminui rapidamente. Os parâmetros adimensionais  $\gamma = 0,00666$ ;  $v = 0,08164$  e  $k = 0,25$ ; são os mesmos nas figuras 5a,b,c.



Verificamos a dependência de  $c_{\min}$  sobre  $\mu_1$  (taxa de mortalidade na fase alada), na figura 5a, onde observamos que  $c_{\min}$  decresce monotonicamente quando  $\mu_1$  cresce e à partir de um certo valor de  $\mu_1$  a onda deixa de existir. Biologicamente isto significa que é possível evitar a invasão em forma de onda viajante se aumentarmos a mortalidade do inseto em sua fase alada, o que já é feito pelas autoridades de saúde com o “fumacê”. O “fumacê” não acaba com os criadouros e precisa ser sempre repetido, o que é indesejável, para matar os mosquitos que vão se formando (CIVES, 2003). A figura 5b, apresenta a relação de  $c_{\min}$  pelo parâmetro  $\mu_2$  (taxa de mortalidade na fase aquática), mostrando ser importante eliminar os criadouros do mosquito transmissor, pois como no caso anterior é uma boa forma de conter a invasão.

E por último observando a figura 5c concluímos que a melhor estratégia para as agências de saúde é, além de utilizarem o “fumacê”, fazerem campanhas educativas junto a população para se acabar com os criadouros em suas residências. Pois ao aumentarmos e tomarmos  $\mu_1 = \mu_2$ , vemos uma eficácia muito maior em conter a propagação.

## 2.2. À Esquerda

Nesta seção estamos interessados no comportamento da frente de onda no sentido à esquerda, conforme figura 6a. Determinamos que a velocidade desta é diferente da que encontramos no sentido contrário (veja seção 2.1 À Direita), pois esta é “freada” enquanto que a outra é “empurrada”, pela velocidade de transporte. Para tanto procuramos por soluções ondas viajantes no sistema (2.3), dadas pelas funções:

$$m(z) = M(x, t), \quad a(z) = A(x, t), \quad z = x + ct, \quad c > 0 \quad (2.12)$$

onde  $m(z)$  e  $a(z)$  são os perfis viajantes das ondas e  $c$  a velocidade da onda, a serem determinados. Com a substituição de (2.12) em (2.3) obtemos um novo sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para  $m(z)$  e  $a(z)$ :

$$\begin{aligned} m' &= h, \\ h' &= (v + c)h - \frac{\gamma}{k}(1 - m)a + \mu_1 m, \\ a' &= \frac{k}{c}(1 - a)m - \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a. \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde “linha” representa a derivada em relação a variável  $z$ .

A análise deste sistema envolve, como no caso anterior, um estudo do espaço de fase tridimensional  $(m, h, a)$ , no qual os estados estacionários são os mesmos; o trivial  $P_0 = (0, 0, 0)$  e  $P_1 = (m_1, 0, a_1)$ , onde  $m_1$  e  $a_1$  são dados por (2.6), obtemos assim a mesma condição de existência (2.7). Procuramos agora soluções  $m(z)$  e  $a(z)$  com condições laterais infinitas:

$$m(-\infty) = 0, \quad m(\infty) = m_1, \quad a(-\infty) = 0 \quad \text{e} \quad a(\infty) = a_1. \quad (2.14)$$

Neste caso devemos ter pelo menos uma variedade instável em  $P_0$  e uma variedade estável em  $P_1$ , ambas totalmente contidas no octante com  $m \geq 0$ ,  $a \geq 0$  e  $h \geq 0$ , veja figura

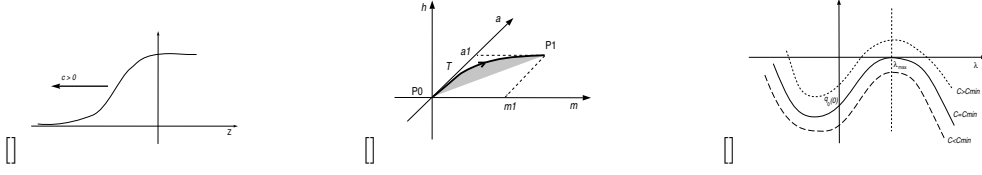


Figura 6: Na figura 6a temos um esboço de solução Frente de Onda Viajante à esquerda. Na figura 6b temos uma trajetória no espaço de fase ligando o ponto  $P_0$  a  $P_1$ . Na figura 6c temos o polinômio cúbico  $q_0(\lambda)$  como função de  $\lambda$  com  $c$  variando. Destaque para  $\lambda_{\max}$  o ponto de máximo local de  $q_0$ .

6b. Para analisar estas possibilidades linearizamos o sistema no ponto singular  $P_0 = (0, 0, 0)$ , onde seus autovalores  $\lambda$  são raízes do polinômio característico

$$q_0(\lambda) = -\lambda^3 + \left(-\frac{\mu_2 + \gamma}{c} + (v + c)\right) \lambda^2 + \left(\mu_1 + (v + c) \frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right) \lambda + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right) \mu_1 - \frac{\gamma}{c}.$$

Sendo  $q_0(0) = \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right) \mu_1 - \frac{\gamma}{c}$ , pela condição (2.7), temos que  $q_0(0) < 0$  e, junto com o fato do coeficiente de  $\lambda^3$  ser negativo, garantimos somente a existência de pelo menos um autovalor  $\lambda < 0$  raiz de  $q_0(\lambda)$ . De modo análogo ao processo da seção anterior, garantimos a existência de dois autovalores reais positivos impondo que o máximo local de  $q_0(\lambda)$ ,  $\lambda_{\max}$ , seja positivo e  $q_0(\lambda_{\max}) > 0$ ; veja figura 6c, o que evita a oscilação em torno da origem. Diferenciando  $q_0(\lambda)$  obtemos,

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{3} \left\{ (v + c) - \frac{\mu_2 + \gamma}{c} + \sqrt{\left[ (v + c) - \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \right]^2 + 3 \left[ \mu_1 + (v + c) \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \right]} \right\},$$

logo, o polinômio característico admite, independente do conjunto de parâmetros, máximo local real positivo. Com um conjunto de parâmetros  $\gamma$ ,  $v$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , que satisfaz a condição (2.7), determinamos  $c_{\min} = c_{\min}(\gamma, v, \mu_1, \mu_2)$ , tal que,  $q_0(\lambda_{\max}) = 0$ . Assim para  $c > c_{\min}$ ,  $q_0(\lambda_{\max})$  é positivo (veja figura 6c) e garante também a existência em  $P_1$  de pelo menos uma variedade estável e assim a existência da trajetória  $T$ , onde são satisfeitas as condições laterais (2.14).

Para os parâmetros adimensionais (2.10) obtemos  $c_{\min} \cong 0,394$ , e com estes a figura 7a utilizando o XPPAUT. A velocidade dimensional associada a velocidade adimensional  $c = 0,4$  é de aproximadamente 0,25 km/dia.

Lembremos que quando a velocidade de transporte é  $v = 0$  temos  $c_{\min} \cong 0,45$ , no caso de  $v = 0,08164$ , na frente de onda à direita temos  $c_{\min} \cong 0,52$ , mas agora obtivemos  $c_{\min} \cong 0,394$ , isto significa que a velocidade de transporte “empurra” a frente de propagação quando ambas tem a mesma direção e sentido, caso tenham mesma direção mas sentidos opostos ela “freia”. Analisamos neste caso também a mudança de  $c_{\min}$  quando a velocidade do vento aumenta, veja figura 7b, neste sentido contrário ao do transporte, a velocidade da onda diminui quando a velocidade de transporte aumenta, chegando a um valor crítico  $v_{\text{crítico}} \cong 1,95$ , que é equivalente a 1,19 km/dia, onde a frente de onda muda de sentido

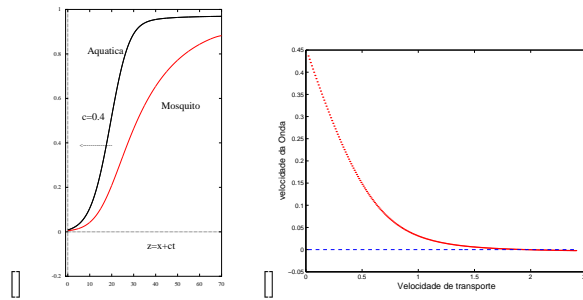


Figura 7: Na figura 7a temos as soluções Onda Viajante  $m$  e  $a$ , satisfazendo o sistema (2.13), com os parâmetros (2.10) e  $c = 0,4$ . A figura 7b exibe  $c_{\min}$  em função de  $v$ , velocidade de transporte, com o conjunto de parâmetros adimensionais (2.10). Note que em  $v \approx 1,95$  a velocidade da onda muda de sinal.

( $c_{\min} = 0$ ), então esta é a velocidade aproximada de transporte que freia a frente de onda à esquerda e para valores de  $v > v_{\text{crítico}}$  temos  $c_{\min} < 0$ , logo o sentido da frente de onda é invertido, ou seja, temos aí uma outra frente de onda viajante à direita.

### 3. Conclusões

O modelo proposto neste trabalho é sob um ponto de vista macroscópico (escala de quilômetro) com um meio unidimensional homogêneo. Entretanto, microscopicamente (escala de metros) e mesmo macroscopicamente o meio é basicamente heterogêneo, e se divide alternadamente em *habitats* favoráveis (criadouros: vasos, caixa d’água, e outros) e desfavoráveis (ausência de criadouros).

A propagação em meio homogêneo, como vimos pode se dar em forma de frente de onda viajante, determinamos para este modelo condições necessárias e suficientes para a existência desta onda, assim como o fato de que sua velocidade de invasão depende crucialmente dos parâmetros. Verificamos que valores muito altos da velocidade de transporte podem vir a interromper a propagação à esquerda e até gerar uma segunda frente de onda à direita, e que as taxas de mortalidade combinadas podem ser também uma ótima estratégia para parar a propagação.

As ondas podem acontecer em meios heterogêneos (Shigesada e Kawasaki, 1997) onde o processo é muito mais complicado. Por outro lado com isto teríamos a disposição outros métodos de controle da invasão com modificações estratégicas do meio. As interações entre as ondas e a heterogeneidade do meio também podem sugerir resultados interessantes para a contenção de propagação da frentes de ondas.

Estamos estudando este modelo de dispersão em espaços geográficos heterogêneos e modificações razoáveis deste que possam implicar em barreiras dinâmicas para a propagação de Ondas Viajantes (Lewis e Keener, 2000).

## Agradecimentos

Agradecemos a generosidade do Prof. Hyun Mo Yang por discutir conosco o assunto, ao Prof. Petrônio Pulino por realizar simulações numéricas do sistema (2.1) e aos pesquisadores da SUCEN de Marília-SP que mui gentilmente nos forneceram os parâmetros biológicos do *Aedes aegypti*.

## Referências

- CIVES (2003). *Dengue*. Centro de Informação em Saúde para Viajantes, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Ermentrout, B. (2002). *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. SIAM, USA.
- Lewis, T. e Keener, J. (2000). Wave-block in excitable media due to regions of depressed excitability. *SIAM J. Appl. Math.*, 61:293–316.
- Murray, J. D. (1993). *Mathematical Biology*. SV, SV:adr.
- Shigesada, N. e Kawasaki, K. (1997). *Biological Invasions: Theory and Practice*. Oxford University Press, Oxford.
- SUCEN (2003). *Aedes Aegypti*. Superintendência de Controle de Endemias, Marília, S o Paulo.
- Tocantins (2003). *Dengue*. Portal da Saúde do Tocantins, Palmas, Tocantins.
- Weinberger, F. (1982). Long-time behavior of a class of biological models. *SIAM J. Math. Anal.*, 13:353–396.