BIOMATEMÁTICA 12 (2002) 91-104 ISSN 1679-365X
Uma publicação do Grupo de Biomatemática IMECC - UNICAMP

Dinâmica de população via inclusões diferenciais fuzzy

Yurilev Chalco-Cano*†, Rodney C. Bassanezi‡,

Marko A. Rojas-Medar§¶ e Marina T. Mizukoshi‖

IMECC-UNICAMP, C.P. 6065, 13081-970, Campinas-SP, Brazil.

Resumo

Introduzimos um novo enfoque de dinâmica de população usando a teoria de inclusões diferenciais fuzzy. Damos exemplos de aplicação assim como um estudo de estabilidade para cada exemplo.

1 Introdução

Os modelos determinísticos formulados para estudos de dinâmica populacional consideram, invariavelmente, parâmetros constantes ou temporais, obtidos como médias de situações analisadas. Tais modelos não contemplam tipos de subjetividades que são inerentes ao processo de variação populacional. Os indivíduos são considerados homogêneos e todos possuem as mesmas características de evolução. Entretanto, na realidade, quando analisamos cada elemento de uma comunidade, verificamos que o indivíduo ou

*Ph-D Student,supported by FAPESP-Brazil through Project 00/00055-0.

†e-mail: katary@ime.unicamp.br

‡e-mail: rodney@ime.unicamp.br

§This work was partially supported by CNPq-Brazil through Project 300116/93(RN).

¶e-mail: marko@ime.unicamp.br

‖e-mail: marinam@ime.unicamp.br

um grupo de indivíduos possuem características diferenciadas dos restantes que podem influenciar na dinâmica da população. Neste caso, devemos considerar as variáveis de estado diferenciadas segundo a pertinência destas características. Por outro lado, a dinâmica populacional pode ser também influenciada por características independentes das variáveis de estado: habitação, lazer, salário, ambiente de trabalho, violência etc . O valor específico destas características nem sempre podem ser avaliados ou medidos no sentido tradicional são "incertezas " que somente podemos conjecturar intuitivamente. Assim, podemos afirmar, sempre com alguma incerteza, que existem incertezas na dinâmica devido a ruídos na demografia ou no meio.

Assim sendo, quando fazemos análises de modelos biológicos mais realistas devemos contemplar as incertezas próprias do fenômeno estudado.

Consideremos o modelo determinístico descrito por uma equação diferencial

$$x' = f(t, x). \tag{1}$$

Dado (1), podemos inserir a incerteza ou ruido, introduzindo um parâmetro u na dinâmica, ou seja,

$$x' = f(t, x, u) \tag{2}$$

A priori existem duas aproximações distintas para (2).

1) Se a natureza dessas incertezas for aleatória, então o problema determinístico nos leva a uma equação diferencial estocástica. Neste caso, devido à complexidade das equações resultantes aos modelos estocásticos, geralmente, faz-se a inserção de ruídos de forma linear em u, isto é, assumindo que o ruido entra na dinâmica linearmente, com uma distribuição probabilística

$$x' = f(t, x) + g(t, x)u \tag{3}$$

Neste caso, u é denominado ruido branco, proveniente da diferencial estocástica do movimento Browniano.

2) Se o ruído não possui estrutura probabilística, ou tal estrutura não pode ser avaliada a priori, então poderá ser mais apropriado a utilização dos sistemas variacionais fuzzy ou das inclusões diferenciais fuzzy para a formulação dos modelos matemáticos.

Suponhamos que U seja um conjunto compacto de funções suficientemente regulares, então (2) pode ser escrito como a seguinte inclusão diferencial

$$x' \in F(t,x) = \{f(t,x,u)/u \in U\} \tag{4}$$

Notemos que no modelo determinístico (1), a velocidade é conhecida para cada (t,x), enquanto que na inclusão diferencial (4), a velocidade não é dada, mas sabemos que está no conjunto $F(t,x)$, gerando a incerteza.

Em (6), Krivan considera o ruído u desconhecido limitado, tendo natureza determinística, isto é,

$$F(t,x) = h(t,x,c[-1,1])$$

e tomando uma métrica de "verossemelhança" para se avaliar o quanto uma solução é melhor do que outra.

Analisando as metodologias propostas por May para o ruído de natureza aleatória (7), a teoria de inclusões diferenciais e a proposta por Krivan (6), consideramos que uma razoável generalização do problema (1), para modelar sistemas dinâmicos com incertezas, é substituir no modelo (4), a multifunção F por uma multifunção fuzzy, isto é, $F(t,x)$ é um conjunto fuzzy para cada (t,x). Isto nos levou a utilizar o conceito de inclusão diferencial fuzzy formulado por Zhu e Rhao (8) que consideram as inclusões diferenciais dadas pelos níveis que dependem da variável de estado x.

Neste trabalho, estudamos um modelo com variação proporcional, usando a teoria de inclusões diferenciais fuzzy e analisamos a estabilidade dos estados de equilíbrio, utilizando o conceito de diferenciabilidade de multifunções fuzzy(4).

2 Preliminares

Denotaremos por $K(\mathbb{R}^n)$ $(K_C(\mathbb{R}^n))$ a família de todos os subconjuntos compactos e não vazios de $\mathbb{R}^n$ (compactos e convexos). Para $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos as operações de soma e producto escalar como

$$A + B = \{a + b/a \in A, b \in B\} \qquad \lambda A = \{\lambda a/a \in A\}$$

O espaço $K(\mathbb{R}^n)$ com as operações definidas acima e com a relação de inclusão, é um espaço quasilinear com elemento neutro $\{0\}$ [ver (5)]. A métrica de

Hausdorff definida sobre $K(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$H(A,B) = \inf\{r \geq 0 \;\; / \;\; A \subset B + rS_1(0) \quad B \subset A + rS_1(0)\},$$

onde $S_1(0)$ é a bola fechada de raio 1 e centro 0.

Um conjunto fuzzy sobre $\mathbb{R}^n$ é uma função $u : \mathbb{R}^n \to [0;1]$. Para $0 < \alpha \leq 1$ denotaremos por $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; u(x) \geq \alpha\}$ o α-nível de u e $[u]^0 =$supp $u = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / u(x) > 0\}}$, denominado o suporte de u.

Um conjunto fuzzy u é chamado compacto (compacto convexo) se $[u]^\alpha \in K(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha \in [0;1]$ ($[u]^\alpha \in K_C(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha \in [0;1]$).

Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$)o espaço de todos os conjuntos fuzzy compactos (fuzzy compacto convexos). Podemos definir uma relação de ordem parcial $\subset$ sobre $\mathcal{F}(X)$ como sendo

$$u \subset v \Leftrightarrow u(x) \leq v(x) \;\; \forall x \in X \Leftrightarrow [u]^\alpha \subseteq [v]^\alpha \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

As operações de soma e produto escalar sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ são definidas como sendo

$$(u+v)(x) = \sup_{y \in X} \min\{u(y), v(x-y)\} \quad e \quad (\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\frac{x}{\lambda}) & se \quad \lambda \neq 0 \\ \\ \chi_{\{0\}}(x) & se \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

Com as definições anteriores obtemos que $[u+v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$ e $[\lambda u]^\alpha = \lambda[u]$ $\forall \alpha \in [0,1]$. O espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ com as operações definidas acima e a relação de ordem parcial $\subset$ é um espaço quasilinear com elemento neutro $\chi_{\{0\}}$ ($\chi_{\{0\}}$ denota a função característica do conjunto $\{0\}$) [ver (5)]. Também podemos definir uma métrica sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ como segue

$$D(u,v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Uma multifunção fuzzy $F : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é chamada quasilinear [ver (4), (5)] se

$$\begin{aligned} F(\lambda x) &= \lambda F(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ F(x_1 + x_2) &\subset F(x_1) + F(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

F é **limitada** se existe $K > 0$ tal que $D(F(x), \{0\}) \leq K||x||$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma multifunção fuzzy, $\alpha : \mathbb{R}^n \to [0;1]$ uma função e J um intervalo em $\mathbb{R}$. Consideremos o seguinte problema de inclusão diferencial para multifunção fuzzy [ver (8)]: determinar $x \in C(J, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$x'(t) \in [F(x(t))]^{\alpha(x(t))}, \tag{5}$$

Dizemos que (5) é uma **inclusão diferencial fuzzy.** Se F é um operador quasilinear, então (5) é uma inclusão diferencial quasilinear fuzzy.

A seguir daremos os conceitos de diferenciabilidade e estabilidade e, enunciaremos o resultado de estabilidade para inclusões diferenciais fuzzy (ver (4).

Definição 1. *Uma multifunção fuzzy $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é chamada Fréchet diferenciável em $x_0 \in U$ se existe um operador quasilinear e limitado $\mathcal{D}_{x_0}(F) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$D(F(x), F(x_0) + \mathcal{D}_{x_0}(F)(x - x_0)) = o(\|x - x_0\|).$$

O operador quasilinear $\mathcal{D}_{x_0}(F)$ é chamado a Fréchet derivada de F em x_0.

Proposição 1. *(4) Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um operador quasilinear e limitado. Então F é Fréchet diferenciável em $x = 0$ e $\mathcal{D}_0(F) = F$.*

Consideremos a inclusão diferencial fuzzy (5), assumindo a condição $F(0) = \chi_{\{0\}}$. Dizemos que a posição de equilibrio $x = 0$ de (5) é **Lyapunov-estável** se a seguintes condições são satisfeitas:

1. Se $\|x(t_0)\| < \delta_0$ para algum $\delta_0 > 0$, então existe uma solução $x(t)$ com a condição inicial $x(t_0)$ que está definida para qualquer $t \geq t_0$;

2. Para qualquer $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta_1 \leq \delta_0$ tal que se $\|x(t_0)\| < \delta_1$, então $\|x(t)\| < \epsilon$ para qualquer $t \geq t_0$.

Uma posição de equilibrio Lyapunov-estável $x = 0$ é chamada **assintoticamente estável** se existe um número positivo $\delta_2 \leq \delta_0$ tal que se $\|x(t_0)\| < \delta_2$, então $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Teorema 1. *(4) Seja o ponto 0 uma posição de equilibrio da inclusão diferencial fuzzy (5). Suponhamos que a multifunção fuzzy $F : X \to \mathcal{F}(X)$ é diferenciável em 0 e que existe um número $\delta_0 > 0$ tal que se $\|x(0)\| \leq \delta_0$, então* *qualquer solução $x(t)$ de (5) existe no intervalo $[0,+\infty)$. Nestas condições se para algum $\alpha \in [0;1]$ a posição de equilibrio $x = 0$ da inclusão diferencial quaselinear*

$$x^{'} \in [\mathcal{D}_0(F)(x)]^{\alpha}$$

é assintoticamente estável, então este ponto é uma posição de equilibrio assintoticamente estável da inclusão diferencial fuzzy (5),isto é, existem $\sigma > 0$, $k > 0$ e $\delta > 0$ tal que qualquer solução $x(t)$ de (5) satisfaz a desigualdade

$$\|x(t)\| \leq k\|x(0)\| \exp(-\sigma t)$$

para todo $t \geq 0$ se $\|x(0)\| < \delta$.

3 Dinâmica populacional com ruído

Seja $x(t)$ a densidade de uma população no tempo t e consideremos os modelos clássicos de crescimento exponencial e o logístico, isto é,

$$f(x) = rx \qquad , \qquad f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right).$$

Na biologia populacional teórica existem duas fontes de perturbações do tipo (3), são os ruídos demográfico (aptidões individuais distintas) e o ruído ambiental (variações abióticas). Nisbet e Gurney propuseram a seguinte aproximação para o ruído demográfico:

$$g(x) = \sqrt{(b(x) + d(x))\, x}$$

onde $b(x)$ e $d(x)$ são as razões de natalidade e mortalidade instantâneas, respectivamente.

Em populações com grande densidade o ruído demográfico é menos insignificante e, neste caso, é mais natural considerar apenas o ruído nos parâmetros. Consideremos que somente a taxa de crescimento r é afetado. Assim, para o modelo exponencial temos:

$$x' = rx + xu = x(r + u) \tag{6}$$

e para o modelo logístico

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) + x\left(1 - \frac{x}{k}\right) = x\left(1 - \frac{x}{k}\right)(r + u)$$

Suponhamos ainda que o ruido seja limitado por uma constante $c > 0$, então podemos considerar a seguinte inclusão diferencial

$$x' \in f(x) + cg(x)[-1;1]. \tag{7}$$

Um estudo detalhado do problema (7) é feito em (6).

Baseado nos conceitos anteriores e na naturalidade de incerteza da constante r, introduzimos um novo modelo para o problema exponencial, onde tomaremos a constante r como um conjunto fuzzy u. Este conjunto fuzzy deve representar a nebulosidade de alguma característica da população que perturbe a sua variação.

Sejam, $x(t)$ a densidade da população no instante t e $\alpha : \mathbb{R} \to [0;1]$ uma função, consideraremos as inclusões diferenciais do tipo

$$x' \in [u.x]^{\alpha(x)} \tag{8}$$

onde

u é um conjunto fuzzy.

$u.x$ é o produto escalar no espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Na inclusão diferencial fuzzy (8) temos que a multifunção fuzzy $F : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é dada por $F(x) = u.x$.

F é um operador quasilinear e limitado e portanto diferenciável em $x = 0$. Também temos que $x = 0$ é um ponto de equilibrio ($F(0) = \chi_{\{0\}}$) da inclusão diferencial fuzzy (8).

A seguir daremos duas aplicações relativas a (8) e os resultados referentes a estabilidade de Lyapunov serão utilizadas para análise da estabilidade do ponto $x = 0$.

Exemplo 1 (expectativa de vida)

Suponhamos que A seja um conjunto de operários com $x(t)$ indivíduos no instante t. Consideraremos o problema de expectativa de vida dos elementos de A, supondo que a pobreza seja um fator que contribui para o aumento da taxa de mortalidade dos indivíduos.

Para modelar a "pobreza ", poderíamos utilizar qualquer indicador da mesma, como por exemplo, consumo de vitaminas, saneamento básico, renda, etc. Em (2) é feito um estudo completo do modelo diferencial para a esperança de vida de um grupo de trabalhadores, usando o salário (renda) como fator de incerteza na taxa de mortalidade

$$x'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2.u(r))x(t),$$

Neste caso, o conjunto fuzzy que avalia o grau de pertinência da pobreza foi definido por

$$u(r) = \begin{cases} [1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2]^k & se \quad 0 < r < r_0 \\ 0 & se \quad r \geq r_0 \end{cases}$$

onde, k é um parâmetro que fornece alguma característica do grupo, r é um parâmetro proporcional à renda do indivíduo e r_0 é a renda mínima a partir da qual os indivíduos não são mais diferenciados quanto à pobreza e portanto, não mais influênciam na taxa de mortalidade.

Definimos $\alpha : \mathbb{R} \to [0;1]$ por

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ x^k & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & se \quad x > 1 \end{cases}$$

Estamos considerando o modelo normalizado, isto é, $x = 1$ é a população total de indivíduos.

Considerando (8), temos a seguinte inclusão diferencial

$$x' \in -[(\lambda_1 + \lambda_2.u)x]^{\alpha(x)}, \tag{9}$$

onde

λ_1 é a taxa de mortalidade natural (obtida em um grupo que dispõe de condições satisfatórias de sobrevivência);

$\lambda_2.u$ indica a influência da pobreza no aumento da taxa de mortalidade do grupo;

u é o conjunto fuzzy dos pobres de acordo com a renda r.

Notemos que se $r \geq r_0$, então $u(r) = 0$ e (9) se reduz ao modelo determinístico

$$x' = -\lambda_1 x.$$

Agora para $r \leq r_0$

$$\begin{aligned}
[u]^{\alpha(x)} &= \{r \ / \quad u(r) \geq \alpha(x)\} \\
&= \left\{ r \ / \quad \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^k \geq x^k \right\} \\
&= r_0[0; \sqrt{1-x}].
\end{aligned}$$

Logo, a inclusão diferencial fuzzy (9), para $0 < x \leq 1$, é equivalente à inclusão diferencial

$$x' \in -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \left[0; \sqrt{1-x}\right]$$

ou

$$x' \in -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}\,[0;1] \tag{10}$$

Observação 1. *Podemos ver que a inclusão diferencial (10) é semelhante à do problema (7). Por isso, esta nova idéia de enfocar os problemas de dinâmica de população, usando as inclusões diferenciais fuzzy, é uma boa generalização das já estudadas.*

Para achar soluções de (10), uma das técnicas é encontrar seleções da multifunção, isto é, obter funções f tal que $f(x) \in G(x)\ \forall x$. Logo, as soluções de (10) são aquelas que resolvem a equação diferencial (ver (1))

$$x' = f(x).$$

Assim, para a multifunção $G(x) = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \left[0; \sqrt{1-x}\right]$ em (10), temos que:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \min_{m \in [0,1]} \{-\lambda_1 x - \left(\lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}\right)\} = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}; \\
f_2(x) &= \max_{m \in [0,1]} \{-\lambda_1 x - \left(\lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}\right)\} = -\lambda_1 x,
\end{aligned}$$

e toda $f(x) \in G(x)$ é tal que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x(1-x) \\ f_4(x) &= -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x\sqrt{1-x}\left| sin(1/x^2) \right| \end{aligned}$$

são elementos de $G(x)$.

Para cada $f(x) \in G(x)$ temos uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Neste caso, temos que o conjunto atingível (ver (6)) é dado por

$$R(t) = [x_1(t); x_2(t)].$$

onde

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\sqrt{1-x_1}}{\lambda_2 x_1} - \frac{2\lambda_1 x_1 ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1\sqrt{1-x_1})}{\lambda_2 x_1^2}; \\ x_2(t) &= x_0 e^{-\lambda_1 t}; \\ x_2(t) &= x_0 e^{-\lambda_1 t}; \end{aligned}$$

Temos que $x = 0$ é assintoticamente estável para o problema (9), pois:

1. Nessa inclusão diferencial fuzzy temos que $F(x) = -(\lambda_1 + \lambda_2 u)x$ e portanto $x = 0$ é uma solução de equilibrio ($F(0) = \chi_{\{0\}}$);

2. F é um operador quasilinear e limitado. Segue da Proposição 1 que F é Fréchet diferenciável e $\mathcal{D}_0(F)(x) = -(\lambda_1 + \lambda_2 u)x$.

Provaremos que $x = 0$ é asintoticamente estável, para algum $\alpha \in [0; 1]$, da inclusão diferencial quasilinear fuzzy

$$x' \in [\mathcal{D}_0(F)(x)]^\alpha. \tag{11}$$

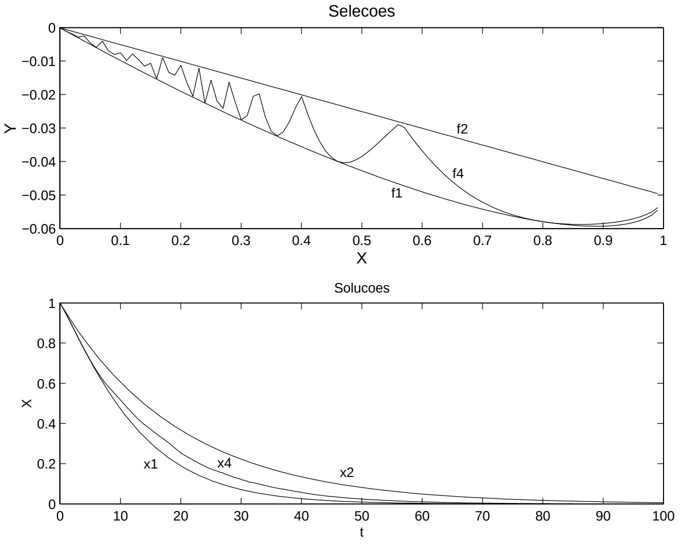

Figura 1: Gráfico das seleções e do conjunto atingível para $\lambda_1 = 0.05$, $\lambda_2 = 0.001$ e $r_0 = 50$.

Tomemos $\alpha = (\frac{1}{2})^k$, então (11) é dado por

$$x' \in -\left(\lambda_1 + \lambda_2 r_0 \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) x \tag{12}$$

1. As soluções de (12) são do tipo $x(t) = x(0)\exp(-(\lambda_1 + a\lambda_2 r_0)t)$, com $a \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e existem para todo $t \geq 0$.

2. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 = \epsilon$ tal que $\|x(t)\| = \|x(0)\exp(-(\lambda_1 + a\lambda_2 r_0)t)\| \leq \|x(0)\| \ \ \forall t > 0$.

3. $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Segue dai que $x = 0$ é assintoticamente estável para a inclusão (11). Logo, pelo Teorema 1 temos que $x = 0$ é assintoticamente estável para a inclusão diferencial fuzzy (9), isto é, existe $\sigma > 0$, $k > 0$ e $\delta > 0$ tal que qualquer solução $x(t)$ de (9) satisfaz a desigualdade

$$\|x(t)\| \leq k \|x(0)\| \exp(-\sigma t)$$

para todo $t \geq 0$ se $\|x(0)\| < \delta$.

4 Conclusão

Dado $f(x) = rx$, suponhamos que r seja perturbado por um conjunto fuzzy U obtendo assim, a multifunção fuzzy $F(x) = (r+U)x$. Desta forma, se $0 \in [U]^1$, temos que $f(x) \in [F(x)]^\alpha, \forall \alpha \in [0,1]$. Então, para qualquer $\alpha(x)$ temos que

$$\begin{cases} x' & \in & rx + [U]^{\alpha(x)} \\ X(0) & = & X_0, \end{cases}$$

isto é, a solução determinística sempre está no conjunto solução da inclusão diferencial.

Referências

[1] J.P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusions, Springer- Verleg, New york Tokyo, 1984.

[2] R.C. Bassanezi and L.C. Barros, A simples model of life expectancy with subjetive parameters, Kibernetes: Inter, Journal of Systems and Cybernetics 24, vol. 9, 91-98 (1995).

[3] Barros,L.C.,Bassanezi,R.C. e Tonelli, P.A Fuzzy modelling in population dynamics, Ecological Modelling, 2000, pp. 27-33.

[4] Y. Chalco-Cano, M.A. Rojas-Medar and A.J.V.Brandão, On the differentiability of fuzzy-valued mappings and the stability of a fuzzy differential inclusion 2001. Submitted to publication.

[5] Y. Chalco-Cano, M.A. Rojas-Medar and A.J.V.Brandão, Fuzzy quasilinear spaces 2001, preprint.

[6] V. Krivan and G. Colombo, A non-stochastic approach for modelling uncertainty in population dinamics, Bulletin of Mathematical Biology, 60, 721-751, 1998.

[7] May, R., Stability in Ramdomly Fluctuating versus Deterministic Environments, The American Naturalist,1973,pp. 621-650.

[8] Yuanguo Zhu and Ling Rao, Diffrential Inclusions for Fuzzy Maps, Fuzzy Sets Syst., vol. 112, 2000, pp. 257-261.