
Dinâmica da transmissão da dengue e delineamento de mecanismos de controle e prevenção

Hyun Mo Yang*
UNICAMP/IMECC-DMA

1 Introdução

A dengue é, atualmente, um importante problema de saúde pública. Nas duas últimas décadas, houve agravamento da sua situação epidemiológica devido à expansão geográfica da distribuição do vetor e do vírus, aumentando a frequência de epidemias e o desenvolvimento de endemicidade e emergência de dengue hemorrágica em novas áreas. No Brasil, a transmissão da dengue tem sido registrada anualmente desde 1986, com crescente expansão da sua área de ocorrência, atingindo no ano de 1998 a cifra de 537.507 casos distribuídos em 24 Estados, sendo que em 9 destes foi constatada a ocorrência de 98 casos de dengue hemorrágico (Ministério da Saúde). No Estado de São Paulo, neste mesmo ano, foram computados 10.629 casos em 102 Municípios, a despeito do crescente envolvimento do poder público municipal e da população no controle do mosquito vetor, o *Aedes aegypti*, única forma de controle da dengue, uma vez que a vacina ainda não está disponível.

Para estudar a epidemia da dengue, desenvolve-se modelos matemáticos para descrever a dinâmica da transmissão da dengue, lembrando que o controle é feito somente no vetor transmissor da doença. Por este motivo, divide-se o desenvolvimento de modelos em duas partes: primeiro, estuda-se população

*hyunyang@ime.unicamp.br

de mosquitos e os efeitos da introdução de várias formas de controle; posteriormente, acopla-se à dinâmica do vetor a transmissão da dengue na população humana.

2 Dinâmica da População de Mosquitos Vetor

O vírus da dengue é transmitido biologicamente entre o hospedeiro humano e o vetor mosquito, ou seja, a transmissão da dengue envolve um vírus e duas populações. As vacinas ainda estão em estudo, tendo como consequência o controle da doença restrita à população de mosquitos.

Inicialmente, estuda-se modelos da dinâmica de população de mosquitos, com o objetivo de determinar os efeitos de diferentes mecanismos de controle atuando no vetor.

Primeiro, apresenta-se as variáveis de quantificação do fenômeno biológico, levando-se em consideração o ciclo de vida do vetor *Aedes aegypti*, porém sem considerar os mecanismos de controle, que serão apresentados a seguir.

1. Fase ovo. O número de ovos E em cada instante de tempo t será representado por $E(t)$. A quantidade de ovos aumenta dependente da taxa de oviposição das fêmeas e do número de criadouros disponíveis, e diminui conforme a eclosão destes em larvas, e da taxa com que eles tornam inviáveis. As taxas per-capitas de oviposição (por fêmea adulta), de eclosão para a fase larva e de se tornarem inviáveis são designadas por ϕ , σ_e e μ_e , respectivamente. Note que tem-se $\sigma_e = \tau_e^{-1}$, onde τ_e é o período médio de eclosão de ovos. A capacidade total de criadouros será designada por C , que será o fator limitante para oviposição. Dessa forma, a taxa efetiva de produção total de ovos por todas as fêmeas adultas será dada por $\varphi(W) \left(1 - \frac{E}{C}\right)$, pois $\varphi(W)$, que depende da taxa per-capita de oviposição ϕ , é a capacidade de produção de ovos de todas as fêmeas e $\left(1 - \frac{E}{C}\right)$ é a disponibilidade de criadouros para receber os ovos, uma vez que os ovos competem por criadouros. Os criadouros têm influência na dinâmica do vetor diferenciados, dependendo da sua natureza. Por exemplo, as caixas de água são criadouros muito mais potentes do que os vasos de plantas, garrafas plásticas e outros recipientes deste porte, e, estes, por sua vez, são muito mais potentes que outros

menores como tampinhas de garrafa. Assim, a capacidade total é dada por $C = \sum_{i=1}^k C_i$, onde $i = 1, 2, \dots, k$, para k tipos estratificados de criadouros.

2. Fase larva. O número de larvas L em cada instante de tempo t será representado por $L(t)$. A quantidade de larvas aumenta dependente da taxa de eclosão de ovos, e diminui conforme a transformação destas em pupas, e da taxa com que elas morrem. As taxas per-capitas de transformação para a fase pupa e de mortalidade são designadas por σ_l e μ_l , respectivamente. Note que tem-se $\sigma_l = \tau_l^{-1}$, onde τ_l é o período médio de transformação de larvas em pupas.
3. Fase pupa. O número de pupas P em cada instante de tempo t será representado por $P(t)$. A quantidade de pupas aumenta dependente da taxa de transformação de larvas, e diminui conforme a eclosão (ou emergência) destes em mosquitos adultos, e da taxa com que elas morrem. As taxas per-capitas de eclosão para a fase adulta e de mortalidade são designadas por σ_p e μ_p , respectivamente. Note que tem-se $\sigma_p = \tau_p^{-1}$, onde τ_p é o período médio de eclosão de pupas.
4. Fase adulta. O número de mosquitos adultos (ou alados) fêmeas W em cada instante de tempo t será representado por $W(t)$. A quantidade de mosquitos adultos aumenta dependente da taxa de eclosão (ou emergência) de pupas, e diminui conforme a taxa com que eles morrem. A taxa per-capita de mortalidade (de fêmeas) é designada por μ_w . Note que está-se tratando de mosquitos fêmeas.

Em relação aos mecanismos de controle, estes podem agir em qualquer uma das quatro fases do vetor: ovo, larva, pupa e adulto. Apresenta-se os mecanismos de combate ao mosquito em uso pelas autoridades sanitárias (como SUCEN, Superintendência de Controle de Endemias).

1. Controle mecânico. Este controle deve ser feito pelos agentes de saúde pública no momento da visita e pelos moradores continuamente, portanto, necessita de participação popular, consistindo na remoção ou inviabilização de criadouros. Quando se retira criadouros, no caso de conterem uma das fases aquáticas do mosquito, está-se eliminando todas

as três fases aquáticas (ovo, larva e pupa). Uma outra hipótese é a de que a eliminação de criadouros seja efetiva, isto é, não há reposição dos criadouros removidos. Assim, o impacto deste controle mecânico pode ser em dois níveis. Primeiro, há eliminação de fração f_i , $i = 1, 2, \dots, k$, de cada tipo estratificado de criadouros, sendo o total de criadouros removidos dado por $\sum_{i=1}^k f_i C_i$, portanto a capacidade remanescente fica $C' = \sum_{i=1}^k (1 - f_i) C_i$. Por outro lado, esta remoção está eliminando também ovos, larvas e pupas presentes em recipientes positivos para fases aquosas do vetor, assim assume-se que ocorra uma inviabilização adicional a taxas per-capitas m_e , m_l e m_p , onde m_e , m_l e m_p são as taxas adicionais de mortalidade de ovos, larvas e pupas, respectivamente.

2. Controle químico larvicida. O impacto do controle de larvas por produtos químicos de longa duração pode ser medido pela morte de larvas. Assume-se que este tipo de controle induza a uma mortalidade adicional tanto para larvas quanto para pupas. Assim, as mortalidades adicionais pelo uso de produtos químicos podem ser dadas por μ'_l e μ'_p , onde μ'_l e μ'_p são, respectivamente, taxas adicionais de mortalidade de larvas e de pupas.
3. Controle químico adulticida. Existem duas formas de controle químico de adultos. Pelo uso de equipamentos portáteis de aplicação de inseticidas (dentro das casas) e pelo uso de equipamentos pesados (pulverização nas ruas), este último descartado, exceto em casos de emergência (epidemias de dengue). O efeito da ação de inseticida é induzir a mortalidade de adultos. Dessa forma, considera-se um acréscimo na mortalidade dado por μ'_w , onde μ'_w é a taxa de mortalidade adicional de mosquitos adultos.

Em relação às mortalidades naturais μ_e , μ_l , μ_p e μ_w , pode-se identificar estas taxas com os períodos de sobrevivência (ou vida média) nas fases ovo, larva, pupa e mosquito adulto fêmea, respectivamente, pelas variáveis μ_e^{-1} , μ_l^{-1} , μ_p^{-1} e μ_w^{-1} . Em relação às mortalidades devidas aos mecanismos de controle m_e , m_l e m_p (mecânico), μ'_l e μ'_p (larvicida) e μ'_w (inseticida), elas são mortalidades adicionais em cada uma das fases em que atuam.

O balanceamento dos fluxos entre as quatro fases descreve a dinâmica da população de mosquitos. Usando-se equações diferenciais ordinárias para

equacionar os fluxos, tem-se modelo determinístico compartimental, onde os compartimentos representam as quatro fases não-interceptantes e excludentes do ciclo vital do mosquito.

Portanto, a dinâmica da população de mosquitos, na presença dos três mecanismos de controle do vetor, pode ser descrita por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} E(t) &= \varphi(W) \left[1 - \frac{E(t)}{C} \right] - \rho_e E(t) \\ \frac{d}{dt} L(t) &= \sigma_e E(t) - \rho_l L(t) \\ \frac{d}{dt} P(t) &= \sigma_l L(t) - \rho_p P(t) \\ \frac{d}{dt} W(t) &= \sigma_p P(t) - \rho_w W(t), \end{cases} \quad (1)$$

onde as taxas de saídas de fases ovo, larva, pupa e mosquito adulto são dadas, respectivamente, por ρ_e , ρ_l , ρ_p e ρ_w , dadas por

$$\begin{cases} \rho_e = \sigma_e + \mu_e + m_e \\ \rho_l = \sigma_l + \mu_l + \mu'_l + m_l \\ \rho_p = \sigma_p + \mu_p + \mu'_p + m_p \\ \rho_w = \mu_w + \mu'_w. \end{cases} \quad (2)$$

Note que estas taxas de saída são tais que o inverso é o período médio de permanência em cada fase. Por exemplo, ρ_e^{-1} é o período médio de permanência na fase ovo, quando as saídas são a eclosão dos ovos (σ_e), a inviabilidade dos ovos (μ_e) e a remoção dos ovos por controle mecânico (m_e). Todos os parâmetros do modelo foram previamente definidos. Observe que a taxa efetiva de oviposição depende da fertilidade das fêmeas (dada pela taxa per-capita ϕ), e, também, da disponibilidade de criadouros (dada pelo número de criadouros ou capacidade do meio C). Assim, quanto maior a oferta de criadouros, maior será a capacidade de infestação do mosquito. Por outro lado, a função $\varphi(W)$ descreve a dependência da oviposição por parte das fêmeas adultas com a disponibilidade de criadouros e do número de mosquitos.

Observe que os parâmetros ϕ , σ_e , σ_l , σ_p , μ_e , μ_l e μ_p , com exceção de C , dependem fortemente do meio-ambiente, ou seja, da temperatura, da umidade e dos fatores climáticos. Porém o parâmetro C depende das condições social, demográfica e econômica de uma comunidade, uma vez que este mosquito tem habitat exclusivamente urbano.

O estudo da ação isolada de cada um dos mecanismos de controle é feito anulando o efeito dos demais mecanismos de controle. Os efeitos do controle

mecânico atuando isoladamente podem ser estudados pela diminuição de capacidade de meio, onde o número remanescente de criadouros disponíveis é dado por C' , e pela mortalidade adicional dos ovos, larvas e pupas, dadas por m_e , m_l e m_p . Os outros efeitos são anulados, ou seja, faz-se $\mu'_l = \mu'_p = \mu'_w = 0$. Por outro lado, os efeitos de larvicida podem ser estudados pelos parâmetros μ'_l e μ'_p , fazendo-se $f_i = 0$, para todo i , e $m_e = m_l = m_p = \mu'_w = 0$. Finalmente, os efeitos de inseticida são medidos pelo parâmetro μ'_w , fazendo-se $f_i = 0$, para todo i , e $m_e = m_l = m_p = \mu'_l = \mu'_p = 0$.

Três tipos de dinâmica da população de mosquitos são estudados, variando, para tanto, a capacidade de oviposição das fêmeas dada por $\varphi(W)$.

2.1 Capacidade de Oviposição e Controle Intrínseco

A capacidade de oviposição das fêmeas $\varphi(W)$ pode atuar no sentido de controlar intrinsecamente o tamanho da população de mosquitos. Para tanto, escolhe-se a função do tipo

$$\varphi(W) = \phi\sqrt{W} \quad (3)$$

dentre as classes de funções que exibem um comportamento dinâmico similar representadas por $\varphi(W) = \phi W^n$, $0 \leq n < 1$. Note que para $n = 0$ tem-se um sistema dinâmico linear, cuja única solução não-trivial é estável.

Esta classe de funções descreve uma população que consegue evitar os dois extremos desfavoráveis, que são a extinção e a explosão populacional. Isto pode ser observado re-escrevendo a equação (3) como $\varphi(W) = \varphi'(W)W$, onde $\varphi'(W)$ é a taxa de oviposição per-capita dada por

$$\varphi'(W) = \frac{\phi}{\sqrt{W}}.$$

Note que a capacidade efetiva de oviposição aumenta com diminuição do número de mosquitos adultos, enquanto que diminui com o aumento.

Analisa-se este modelo dinâmico substituindo-se a função dada pela equação (3) no sistema de equações (1). Em relação aos pontos de equilíbrio, obtém-se sempre três pontos.

O equilíbrio trivial é dado pelos valores $E = 0$, $L = 0$, $P = 0$ e $W = 0$. Esta é a situação em que uma comunidade humana está livre de infestação de mosquitos.

Os outros dois pontos de equilíbrio não-triviais são obtidos da equação de segundo grau para o número de mosquitos adultos fêmeas W dada por

$$W^2 - \left[2QC' + \left(\frac{QC'}{Q_0} \right)^2 \right] W + (QC')^2 = 0, \quad (4)$$

onde Q e Q_0 são dados por

$$\begin{cases} Q &= \frac{\sigma_p \sigma_l \sigma_e}{\rho_p \rho_l \rho_w} \\ Q_0 &= \frac{\phi}{\phi_{th}}, \end{cases} \quad (5)$$

com ϕ_{th} , a taxa de oviposição per-capita limiar, sendo dada por

$$\phi_{th} = \left(\frac{Q}{\rho_e} \right)^{-1} = \left(\frac{\sigma_e \sigma_l \sigma_p}{\rho_e \rho_l \rho_p} \frac{1}{\rho_w} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Esta equação de segundo grau sempre tem duas soluções reais positivas não-nulas. Os valores das outras fases do ciclo de vida do vetor são dados por

$$\begin{cases} E &= \frac{W}{Q} \\ L &= \frac{\rho_p \rho_w}{\sigma_p \sigma_l} W \\ P &= \frac{\rho_w}{\sigma_p} W, \end{cases} \quad (7)$$

que dependem da solução para equação de segundo para W .

As duas soluções para a equação (4) são

$$\begin{cases} W_+ &= QC' \left[1 + \frac{QC'}{2Q_0^2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{QC'}{Q_0^2} \left(4 + \frac{QC'}{Q_0^2} \right)} \right] \\ W_- &= QC' \left[1 + \frac{QC'}{2Q_0^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{QC'}{Q_0^2} \left(4 + \frac{QC'}{Q_0^2} \right)} \right], \end{cases} \quad (8)$$

onde W_+ e W_- são valores, respectivamente, maior e menor das duas soluções positivas.

O parâmetro Q_0 , re-escrito como produto de quatro termos

$$Q_0 = \frac{\sigma_e}{\rho_e} \times \frac{\sigma_l}{\rho_l} \times \frac{\sigma_p}{\rho_p} \times \frac{\phi}{\rho_w}, \quad (9)$$

tem a seguinte interpretação biológica. Observe que os três primeiros termos do produto é a divisão entre ρ_{\bullet}^{-1} e σ_{\bullet}^{-1} para as fases ovo, larva e pupa. Note que σ_{\bullet}^{-1} é o período que permanece em uma certa fase aquática até passar para fase seguinte, enquanto ρ_{\bullet}^{-1} é o período de sobrevivência (mudança de fase do ciclo vital, de mortalidade natural e mecanismos de controle) em uma certa fase aquática. Assim, σ_e/ρ_e , por exemplo, é a probabilidade de um ovo sobreviver durante toda a fase do ovo e eclodir para a fase larva, e o mesmo vale para outras duas razões. Em relação ao último termo, ρ_w^{-1} é o período de sobrevivência do mosquito adulto fêmea e ϕ é a taxa per-capita efetiva de oviposição; logo ϕ/ρ_w é o número médio de ovos que uma fêmea produz durante todo o período de sua vida. Logo Q_0 é a probabilidade de um ovo sobreviver na fase ovo e eclodir para larva, e esta larva sobreviver na fase larva e passar para a fase pupa, e esta pupa sobreviver a fase pupa e eclodir para fase adulta, e, então, este mosquito fêmea ovipor durante toda a fase alada. Assim, Q_0 mede número médio de descendentes fêmeas viáveis que um mosquito adulto fêmea produz durante todo o seu período fértil. Assim, quanto maior este valor, maior será a infestação por mosquitos adultos.

A equação do segundo grau para W dada pela equação (4) tem os seguintes valores limites em relação à capacidade remanescente C' . Para $C' = 0$ tem-se um único ponto de equilíbrio dado pelo equilíbrio trivial, pois as duas soluções da equação (8) são $W_+ = W_- = 0$. No outro extremo, para $C' \rightarrow \infty$, tem-se três pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, o equilíbrio não-trivial finito dado pelo valor $W_- = Q_0^2$ e o equilíbrio infinito $W_+ \rightarrow \infty$. Porém, impondo $C' \rightarrow \infty$ no sistema de equações (1), e resolvendo, tem-se dois pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, e o equilíbrio não-trivial dado pelo valor $W = Q_0^2$, que corresponde a W_- , e o valor de W_+ não aparece.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é restrita para o caso $C' \rightarrow \infty$. Para C' finito, a estabilidade dos pontos de equilíbrio não-triviais é feita numericamente. A estabilidade de um ponto de equilíbrio é dada pelo critério de Routh-Hurwitz, que estabelece a sua estabilidade através do valor negativo para a parte real de todos os auto-valores. Uma conjectura deste critério para modelos epidemiológicos tipo bilineares estabelece que se o termo independente da equação característica for positivo, então o ponto de equilíbrio é estável (1).

O ponto de equilíbrio trivial, por causa do termo \sqrt{W} , não é possível

utilizar linearização do sistema em torno de equilíbrio. Assim, olhando para a primeira equação do sistema (1) com $\varphi(W) = \phi\sqrt{W}$, verifica-se que este termo sobressai sobre demais para valores pequenos para todas as fases. Assim, o ponto de equilíbrio trivial é globalmente instável.

O ponto de equilíbrio não-trivial dado por $W = Q_0^2$, e demais valores obtidos da equação (7), tem a análise de sua estabilidade dada pela linearização em torno de equilíbrio. A matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações (1) com a equação (3), dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\rho_e & 0 & 0 & \frac{\phi}{2\sqrt{W}} \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix},$$

calculada no ponto de equilíbrio, tem os auto-valores associados λ obtidos da solução da equação característica $\Lambda(\lambda)$ definida por

$$\Lambda(\lambda) = \det(J - \lambda I),$$

onde \det é determinante da matriz e I é a matriz identidade 4×4 . A equação característica pode ser re-escrita como

$$\Lambda(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{2Q_0} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = \sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{2Q_0}.$$

Como todos os parâmetros são positivos, $a_0 > 0$, e, assim, conforme a conjectura apresentada em (1), o ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente estável. Note que este ponto de equilíbrio não-trivial corresponde ao ponto W_- quando $C' \rightarrow \infty$.

Dinamicamente, todas as trajetórias dirigem-se para o ponto de equilíbrio não-trivial, exceto nas curvas dadas por separatrizes, que podem convergir

para equilíbrio trivial. Para C' finito, pode-se fazer seguinte proposição. Os pontos de equilíbrio trivial ($W = 0$) e não-trivial de valor maior (dado por W_+) são instáveis, enquanto o ponto de equilíbrio não-trivial de menor valor (W_-) é estável. Portanto, a dinâmica deste sistema de equações é evitar tanto a extinção ($W = 0$) quanto a explosão populacional (W_+ , que cresce com C') de mosquitos, mantendo a população de mosquitos sempre em valores razoáveis (W_-).

Esta hipótese de oviposição (controle intrínseco da população) por parte das fêmeas faz com que qualquer que seja a forma de controle, só é possível a eliminação da população de mosquitos se eliminar todos os recipientes que sejam criadouro de mosquitos, ou seja, $C' = 0$, conforme a equação (8). Os outros casos de controle apenas diminuem o tamanho da população de mosquitos.

2.2 Capacidade de Oviposição e Bilinearidade

A capacidade de oviposição das fêmeas $\varphi(W)$ depende linearmente com o tamanho da população de mosquitos. Nesta situação tem-se a função

$$\varphi(W) = \phi W, \quad (10)$$

que exibe um comportamento dinâmico similar apresentado por sistemas epidêmicos bilineares, oriundos da lei da ação das massas (2).

Analisa-se este modelo dinâmico substituindo-se a função dada pela equação (10) no sistema de equações (1). Em relação aos pontos de equilíbrio, obtém-se dois pontos.

O equilíbrio trivial é dado pelos valores $E = 0$, $L = 0$, $P = 0$ e $W = 0$. Esta é a situação em que uma comunidade humana está livre de infestação de mosquitos.

O outro ponto de equilíbrio não-trivial é dado por

$$W = QC' \left(1 - \frac{1}{Q_0} \right), \quad (11)$$

e valores de outras três fases dados pela equação (7). Note que $W = 0$ se $Q_0 \leq 1$. Assim, a viabilidade biológica é dada pela condição $Q_0 > 1$.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é feita da matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações (1) com a equação (10), dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{C'}W - \rho_e & 0 & 0 & \phi \left(1 - \frac{E}{C'}\right) \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix},$$

calculada no ponto de equilíbrio trivial ou não-trivial. Para tanto calcula-se os auto-valores associados λ obtidos da solução da equação característica $\Lambda(\lambda)$ definida por

$$\Lambda(\lambda) = \det(J - \lambda I),$$

onde \det é determinante da matriz e I é a matriz identidade 4×4 .

O ponto de equilíbrio trivial, com $W = 0$, tem a equação característica dada por

$$\Lambda(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \sigma_e \sigma_l \sigma_p \phi = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = \sigma_e \sigma_l \sigma_p \phi \left(\frac{1}{Q_0} - 1 \right).$$

Como todos os parâmetros são positivos, $a_0 > 0$, se e somente se, $Q_0 < 1$. Assim, conforme a conjectura apresentada em (1), o ponto de equilíbrio trivial é localmente e assintoticamente estável se $Q_0 < 1$, e instável em outros casos.

O ponto de equilíbrio não-trivial, com $E = W/Q$, tem a equação característica dada por

$$\Lambda(\lambda) = \left[\phi Q \left(1 - \frac{1}{Q_0} \right) + \rho_e + \lambda \right] (\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \sigma_e \sigma_l \sigma_p \frac{\phi}{Q_0} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = \sigma_e \sigma_l \sigma_p \phi \left(1 - \frac{1}{Q_0} \right).$$

Como todos os parâmetros são positivos, $a_0 > 0$, se e somente se, $Q_0 > 1$. Assim, conforme a conjectura apresentada em (1), o ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente estável se $Q_0 > 1$, e instável em outros casos.

Dinamicamente, todas as trajetórias dirigem-se ou para o ponto de equilíbrio trivial ou para o ponto de equilíbrio não-trivial, dependendo do valor de produção média de descendentes fêmeas viáveis Q_0 . Independente da condição inicial, se $Q_0 \leq 1$, então a população de mosquitos vai para extinção; enquanto que se $Q_0 > 1$, a população de mosquitos vai para equilíbrio não-trivial.

Esta hipótese de oviposição (bilinearidade) por parte das fêmeas faz com que exista uma possibilidade para a eliminação da população de mosquitos. Diminui-se a efetividade dos mosquitos na procriação por alguma forma de controle, tornando $Q_0 \leq 1$.

2.3 Capacidade de Oviposição e Dependência Extrínseca

A capacidade de oviposição das fêmeas $\varphi(W)$ pode atuar no sentido de dificultar a persistência de infestação de mosquitos quando o tamanho da sua população é pequena, contudo, para tamanhos relativamente grandes, a infestação de mosquitos é certa e incontrollável. Para tanto, escolhe-se a função do tipo

$$\varphi(W) = \phi W^2 \tag{12}$$

dentre as classes de funções que exibem um comportamento dinâmico similar representadas por $\varphi(W) = \phi W^n$, $n > 1$.

Esta classe de funções descreve uma população que necessita um número razoável de indivíduos para se manter. Este é um caso típico de populações que procriam por acasalamento, pois a probabilidade de acasalamento aumenta com o aumento do tamanho da população. Isto pode ser observado re-escrevendo a equação (12) como $\varphi(W) = \varphi'(W)W$, onde $\varphi'(W)$ é a taxa de oviposição per-capita dada por

$$\varphi'(W) = \phi W.$$

Note que a capacidade efetiva de oviposição sempre aumenta com o aumento do número de mosquitos adultos, sendo que para valores pequenos de W esta capacidade é praticamente zero.

Analisa-se este modelo dinâmico substituindo-se a função dada pela equação (12) no sistema de equações (1). Em relação aos pontos de equilíbrio, obtém-se até três pontos.

O equilíbrio trivial é dado pelos valores $E = 0$, $L = 0$, $P = 0$ e $W = 0$. Esta é a situação em que uma comunidade humana está livre de infestação de mosquitos.

Os outros pontos de equilíbrio não-triviais são obtidos da equação de segundo grau para o número de mosquitos adultos fêmeas W dada por

$$W^2 - QC'W + \frac{QC'}{Q_0} = 0, \quad (13)$$

onde Q e Q_0 são dados pelas equação (5). As soluções desta equação são tais que: 1) se $Q_0 < 4/QC'$ não há solução real, 2) se $Q_0 = 4/QC'$ há apenas a solução $W = QC'/2$, e 3) para $Q_0 > 4/QC'$ tem-se duas soluções reais positivas dadas por

$$\begin{cases} W_+ &= \frac{QC'}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{Q_0QC'}} \right) \\ W_- &= \frac{QC'}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{Q_0QC'}} \right), \end{cases} \quad (14)$$

onde W_+ e W_- são valores, respectivamente, maior e menor das duas soluções. Os valores das outras fases do ciclo de vida do vetor são dados pela equação (7).

Lembre-se que Q_0 é o número médio de descendentes fêmeas viáveis que um mosquito adulto fêmea produz durante todo o seu período fértil, sendo, assim, quanto maior este valor, maior será a infestação por mosquitos adultos. Dependendo deste valor em relação ao valor limiar dado por

$$Q_{th} = 4/QC', \quad (15)$$

tem-se três situações:

1. Mosquitos pouco efetivos na procriação, naturalmente ou por controle, isto é, quando $Q_0 < Q_{th}$. Neste caso, tem-se apenas um único ponto de equilíbrio dado pelo trivial.
2. Mosquitos efetivos na procriação, naturalmente ou por controle, isto é, quando $Q_0 = Q_{th}$. Tem-se dois pontos de equilíbrio. Além do trivial, surge outro não-trivial dado por $W = QC'/2$.

3. Mosquitos bastante efetivos na procriação, naturalmente ou por controle, isto é, quando $Q_0 > Q_{th}$. Tem-se três pontos de equilíbrio. Além do trivial, surgem dois não triviais dados pela equação (14), que são dois ramos que surgem do mesmo valor $W_+ = W_- = QC'/2$. Note que W_+ é o ramo estritamente crescente e W_- é o ramo estritamente decrescente a partir do valor comum $W_+ = W_- = QC'/2$.

Primeiro, a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é restrita para o caso $C' \rightarrow \infty$. Para C' finito, a estabilidade dos pontos de equilíbrio não-triviais é feita numericamente.

A equação do segundo grau para W dada pela equação (14) tem os seguintes valores limites em relação à capacidade remanescente C' . Para $C' = 0$ tem-se um único ponto de equilíbrio dado pelo equilíbrio trivial, pois as duas soluções da equação (8) são $W_+ = W_- = 0$. No outro extremo, para $C' \rightarrow \infty$, tem-se três pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, o equilíbrio não-trivial finito dado pelo valor $W_- = 1/Q_0$ e o equilíbrio infinito $W_+ \rightarrow \infty$. Porém, impondo $C' \rightarrow \infty$ no sistema de equações (1), e resolvendo, tem-se dois pontos de equilíbrio: o equilíbrio trivial, e o equilíbrio não-trivial dado pelo valor $W = Q_0^2$, que corresponde a W_- , e o valor de W_+ não aparece.

A análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio é feita da matriz Jacobiana correspondente ao sistema de equações (1) com a equação (12), dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\rho_e & 0 & 0 & 2\phi W \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix},$$

calculada no ponto de equilíbrio trivial ou não-trivial. Para tanto calcula-se os auto-valores associados λ obtidos da solução da equação característica $\Lambda(\lambda)$ definida por

$$\Lambda(\lambda) = \det(J - \lambda I),$$

onde \det é determinante da matriz e I é a matriz identidade 4×4 .

O ponto de equilíbrio trivial, com $W = 0$, tem os auto-valores dados por

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\rho_e \\ \lambda_2 = -\rho_l \\ \lambda_3 = -\rho_p \\ \lambda_4 = -\rho_w \end{cases} .$$

Como todos os auto-valores são negativos, o ponto de equilíbrio trivial é localmente e assintoticamente estável.

O ponto de equilíbrio não-trivial, com $W = 1/Q_0$, tem a equação característica dada por

$$\Lambda(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - 2\sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{Q_0} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = -\sigma_e\sigma_l\sigma_p\frac{\phi}{Q_0}.$$

Como todos os parâmetros são positivos, $a_0 < 0$, e, assim, conforme a conjectura apresentada em (1), o ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente instável. Note que este ponto de equilíbrio não-trivial corresponde ao ponto W_- quando $C' \rightarrow \infty$.

Dinamicamente, todas as trajetórias dirigem-se ou para o ponto de equilíbrio trivial ou para o ponto de equilíbrio não-trivial infinito (corresponde ao ponto W_+ quando $C' \rightarrow \infty$). Para C' finito, pode-se fazer seguinte proposição. Os pontos de equilíbrio trivial ($W = 0$) e não-trivial de valor maior (dado por W_+) são estáveis, enquanto o ponto de equilíbrio não-trivial de menor valor (W_-) é instável. Portanto, a dinâmica deste sistema de equações é levar a população para a sua extinção ($W = 0$) ou para a explosão populacional (W_+ , que cresce com C') de mosquitos, dependendo do valor inicial considerado para as quatro fases do ciclo de vida. Como a população de mosquitos em valores razoáveis (W_-) é sempre instável, este ponto de equilíbrio (junto com outros valores dados pela equação (7), para outras três fases) é o “breaking point”.

Esta hipótese de oviposição (controle extrínseco da população) por parte das fêmeas faz com que exista duas possibilidades para a eliminação da população de mosquitos. Primeiro, pode diminuir a efetividade dos mosquitos na procriação por alguma forma de controle, tornando $Q_0 < Q_{th}$. Segundo, se $Q_0 > Q_{th}$ a erradicação não requer a eliminação total de mosquitos, mas apenas diminuir por alguma forma de controle a população de mosquitos para valores $W < W_-$, isto é, reduzir a população dos mosquitos para valores abaixo do valor do “breaking point”.

Segundo, a estabilidade do caso C' finito é possível para o caso $Q_0 = Q_{th}$, que tem dois pontos de equilíbrio: trivial e não-trivial dado por $W = QC'/2$ (e correspondente $E = C'/2$). Neste caso, tem-se a matriz Jacobiana dada por

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\phi}{C'}W^2 - \rho_e & 0 & 0 & 2\phi W \left(1 - \frac{E}{C'}\right) \\ \sigma_e & -\rho_l & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_l & -\rho_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p & -\rho_w \end{bmatrix}.$$

A equação característica correspondente é dada por

$$\Lambda(\lambda) = \left(\frac{\phi Q^2 C'}{4} + \rho_e + \lambda\right) (\rho_l + \lambda) (\rho_p + \lambda) (\rho_w + \lambda) - \sigma_e \sigma_l \sigma_p \frac{\phi Q C'}{2} = 0.$$

Percebe-se que todos os coeficientes de ordem um ou superior são positivos (por exemplo, $a_4 = 1$, coeficiente de λ^4 , de ordem 4), e o coeficiente de ordem zero (λ^0 , denominado termo independente de λ) é dado por

$$a_0 = 0.$$

Como todos os parâmetros são positivos e $a_0 = 0$, então um dos auto-valores é nulo (por exemplo, $\lambda_1 = 0$), entretanto, a equação característica remanescente para terceiro grau satisfaz a conjectura apresentada em (1). Assim, este ponto de equilíbrio não-trivial é localmente e assintoticamente estável, e instável em separatrizes. Note que este ponto de equilíbrio não-trivial corresponde ao ponto $W_+ = W_-$.

O próximo passo é relacionar esta dinâmica da população de mosquitos e a transmissão da dengue.

3 Dinâmica da Transmissão da Dengue

No caso de circulação de um único sorotipo na comunidade, estuda-se a dinâmica acoplada de populações de mosquitos e humana. A dengue é causada por um arbovírus, tendo o mosquito *Aedes aegypti* como o vetor. Esta infecção nos mosquitos parece que não encurta a vida média e nem cria imunidade. Note-se que a vida média dos mosquitos é de alguns dias. Entretanto, na população humana esta infecção, além de resultar em uma indução de imunidade perene, ela é uma doença benigna, e os indivíduos sintomáticos desta doença não são levados à morte. Assim, a população humana será descrita pelo modelo compartimental, baseado na história natural da infecção, do tipo S-E-I-R (indivíduos Suscetível, Exposto, Infectante e Recuperado). Como E já foi designado para o número de ovos, usa-se H para designar os indivíduos expostos.

As seguintes considerações serão usadas no modelo de transmissão da dengue.

1. População de mosquito. A população de mosquitos adultos é subdividida em mosquitos suscetíveis (W_1), infectados porém não infectantes (W_2) e infectantes (W_3). Os mosquitos infectados e não infectantes são retirados a uma taxa γ_w , onde γ_w^{-1} é o período de incubação do vírus da dengue no mosquito. O número total de mosquitos é $W = W_1 + W_2 + W_3$. Matematicamente, os mosquitos suscetíveis (W_1) são infectados pela presença de indivíduos infectantes (I), a uma taxa de ataque (força de infecção) η_w que depende de I , ou seja, $\eta_w(I)$, que leva em consideração a taxa de contato entre indivíduos infectantes e mosquitos suscetíveis, designada por β_w . Biologicamente, os mosquitos suscetíveis são infectados quando picam indivíduos infectantes, e a taxa β_w leva em consideração a frequência de picadas. Os mosquitos infectados e não infectantes (W_2) e infectantes (W_3) são, em geral, mais velhos, por isso acrescenta-se taxas de mortalidade adicional devido ao envelhecimento, dados, respectivamente, por μ_2 e μ_3 , com $\mu_2 < \mu_3$, pois estes são mais velhos que aqueles. Considera-se mecanismos de controle atuando na população de mosquitos, conforme a equação (2).
2. População humana. A população humana é subdividida em quatro compartimentos não-interceptantes. Matematicamente, os indivíduos suscetíveis

(S) são infectados pelos mosquitos infectantes (W_3) e passam para a classe dos expostos (H) a uma taxa de ataque (força de infecção) η_h , que depende de W_3 , ou seja, $\eta_h(W_3)$, que leva em consideração a taxa de contato entre mosquitos infectantes e indivíduos suscetíveis, designada por β_h . Biologicamente, os indivíduos suscetíveis são infectados pelas picadas de mosquitos infectantes, aqueles que haviam previamente picado indivíduos infectantes, e a taxa β_h leva em consideração a frequência de picadas. Os indivíduos expostos são retirados deste compartimento a uma taxa γ_h , onde γ_h^{-1} é o período de incubação do vírus da dengue no indivíduo humano. Finalmente, os indivíduos infectantes são retirados deste compartimento a uma taxa σ_h , onde σ_h^{-1} é o período de infecção (ou recuperação) do indivíduo humano. Não se considera a perda de imunidade adquirida. A população toda é dada por $N = S + H + I + R$. Todos os indivíduos estão sob a influência de uma mesma taxa de mortalidade dada por μ_h . Não há mortalidade adicional pela doença, uma vez que está-se considerando infecção por um único sorotipo.

A dinâmica de transmissão da dengue envolve duas populações. A população de mosquitos, quando há transmissão de dengue, é descrita por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}E(t) &= \varphi(W) \left[1 - \frac{E(t)}{C'}\right] - \rho_e E(t) \\ \frac{d}{dt}L(t) &= \sigma_e E(t) - \rho_l L(t) \\ \frac{d}{dt}P(t) &= \sigma_l L(t) - \rho_p P(t) \\ \frac{d}{dt}W_1(t) &= \sigma_p P(t) - [\eta_w(I) + \rho_w] W_1(t) \\ \frac{d}{dt}W_2(t) &= \eta_w(I) W_1(t) - \rho_2 W_2(t) \\ \frac{d}{dt}W_3(t) &= \gamma_w W_2(t) - \rho_3 W_3(t), \end{cases} \quad (16)$$

onde as taxas globais de saída ρ_2 e ρ_3 são dadas por

$$\begin{cases} \rho_2 = \gamma_w + \rho_w + \mu_2 \\ \rho_3 = \rho_w + \mu_3. \end{cases} \quad (17)$$

Este sistema de equações corresponde à equação (1) se $\beta_w = 0$, isto é, população de mosquitos sem transmissão da dengue (neste caso, $W = W_1$ e $W_2 = W_3 = 0$).

A população humana é descrita por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) &= \varphi'(t) - [\eta_h(W_3) + \mu_h]S(t) \\ \frac{d}{dt}H(t) &= \eta_h(W_3)S(t) - \rho_h H(t) \\ \frac{d}{dt}I(t) &= \gamma_h H(t) - \rho_i I(t) \\ \frac{d}{dt}R(t) &= \sigma_h I(t) - \mu_h R(t) \end{cases} \quad (18)$$

onde $\varphi'(t)$ é a taxa de entrada de indivíduos na comunidade e as taxas globais de saída ρ_h e ρ_i são dadas por

$$\begin{cases} \rho_h = \gamma_h + \mu_h \\ \rho_i = \sigma_h + \mu_h \end{cases} \quad (19)$$

Todos os parâmetros foram previamente descritos. Note que a efetiva transmissão da dengue ocorre quando um mesmo mosquito picar sucessivamente um indivíduo infeccioso e, após um período de tempo γ_w^{-1} , picar um indivíduo suscetível.

A duração de uma geração na população de mosquitos é de alguns dias, sendo no máximo dois meses. Entretanto, a duração de uma geração entre os indivíduos humanos é de dezenas de anos. Dessa forma, pode-se trabalhar com uma população humana constante. Esta condição é obtida se impor

$$\varphi'(t) = \mu_h N, \quad (20)$$

onde N é a população total constante de indivíduos em uma comunidade, na equação (18). Em outras palavras, a taxa de natalidade é igual a taxa de mortalidade, isto é, as mortes são repostas por recém-nascidos.

Em relação às forças de infecção $\eta_w(I)$ e $\eta_h(W_3)$, pode-se fazer duas suposições, as mais simples possíveis. Primeiro, supõe-se que o encontro entre os infectantes (homem e mosquito) e suscetíveis (mosquito e homem) seja aleatório, isto é, utiliza-se a lei da ação das massas. Nesta situação tem-se as relações entre as forças de infecção e taxas de contato dadas por

$$\begin{cases} \eta_w(I) = \varepsilon \beta_w I \\ \eta_h(W_3) = \varepsilon \beta_h W_3 \end{cases} \quad (21)$$

que dependem do tamanho da população considerada. O parâmetro ε representa a forma como os indivíduos estão distribuídos geograficamente, facilitando ou não a transmissão da dengue. Segundo, supõe-se que o encontro

entre os infectantes (homem e mosquito) e suscetíveis (mosquito e homem) seja feito por busca ativa por parte dos mosquitos, isto é, utiliza-se eventos probabilísticos. Nesta situação tem-se as relações entre as forças de infecção e taxas de contato dadas por

$$\begin{cases} \eta_w(I) = \varepsilon\beta_w \frac{I}{N} \\ \eta_h(W_3) = \varepsilon\beta_h \frac{W_3}{W}, \end{cases} \quad (22)$$

que dependem da fração da população considerada. Assim, pode-se entender, em primeira ordem de aproximação, a fração de indivíduos infectantes $i \equiv I/N$ como sendo a probabilidade de um mosquito suscetível picar um indivíduo infectante, e a fração de mosquitos infectantes $w_3 \equiv W_3/W$ como sendo a probabilidade de um indivíduo suscetível ser picado por um mosquito infectante.

O objetivo é estudar a dinâmica da transmissão da dengue e os efeitos dos diversos mecanismos de controle. Por este motivo, supõe-se sempre a existência da população humana ($\mu_h > 0$, pois para $\mu_h = 0$ tem-se $N = 0$, que corresponde à ausência da comunidade humana). Entretanto, permite-se a extinção da população de mosquitos, uma vez que os mecanismos de controle da dengue residem-se unicamente na ação nos mosquitos, eventualmente resultando na eliminação de mosquitos.

Para a dinâmica da transmissão da dengue, resultados detalhados são mostrados para o caso $\varphi(W) = \phi W$. Em relação à população humana, usa-se a equação (20) para recém-nascidos, ou seja, $\varphi'(t) = \mu_h N$, com população total constante. Os resultados dos outros dois casos de oviposição são facilmente obtidos.

O sistema de equações (18) pode ser dividido pela população toda constante N , e é re-escrito em termos de frações de indivíduos s , h , i e r , dos compartimentos, respectivamente, de suscetíveis, expostos, infectantes e recuperados. Assim, resolve-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}s(t) &= \mu_h - [\eta_h(W_3) + \mu_h]s(t) \\ \frac{d}{dt}h(t) &= \eta_h(W_3)s(t) - \rho_h h(t) \\ \frac{d}{dt}i(t) &= \gamma_h h(t) - \rho_i i(t) \\ \frac{d}{dt}r(t) &= \sigma_h i(t) - \mu_h r(t), \end{cases} \quad (23)$$

junto com o sistema de equações (16) para a dinâmica da população de mosquitos. Lembre que tem-se $\mu_h > 0$.

Estes sistemas de equações serão estudados de acordo com a hipótese admitida para a quantificação das forças de infecção η_h e η_w . Estas forças de infecção são as incidências de novos casos de infecção, nos homens e nos mosquitos, por indivíduos suscetíveis. Estuda-se o encontro probabilístico e o encontro aleatório, isto é, dada uma certa quantidade de indivíduos (mosquitos) suscetíveis, o risco destes suscetíveis de contraírem a doença pode ser estudado considerando o encontro probabilístico ou o encontro aleatório com os indivíduos (mosquitos) infectantes.

3.1 Evento probabilístico

Estuda-se o caso do evento probabilístico, com as forças de infecções dadas pela equação (22).

Os pontos de equilíbrio dos sistemas de equações (23) e (16) com as forças de infecção dada pela equação (22) são três.

1. População humana livre de mosquitos. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\begin{cases} E = L = P = W_1 = W_2 = W_3 = 0 \\ s = 1 \\ h = i = r = 0, \end{cases} \quad (24)$$

cujos valores são válidos para $\phi \leq \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$, onde R_0 é dada por

$$R_0 = \frac{\gamma_w \gamma_h \varepsilon^2 \beta_w \beta_h}{\rho_2 \rho_3 \rho_h \rho_i}, \quad (25)$$

com ϕ_{th} sendo dada pela equação (6). O parâmetro R_0 representa a razão de repodutibilidade da dengue, pois está considerando o controle do vetor. Se não houver nenhum mecanismo de controle no vetor, tem-se, então, a razão de repodutibilidade basal.

2. População humana infestada por mosquitos sem a transmissão da dengue. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados

por

$$\left\{ \begin{array}{l} E = C' \left(1 - \frac{\phi_{th}}{\phi} \right) \\ L = \frac{\sigma_e}{\rho_l} E \\ P = \frac{\sigma_e \sigma_l}{\rho_l \rho_p} E \\ W_1 = W = \frac{\sigma_e \sigma_l \sigma_p}{\rho_l \rho_p \rho_w} E \\ W_2 = W_3 = 0 \\ s = 1 \\ h = i = r = 0, \end{array} \right. \quad (26)$$

cujos valores são válidos para $\phi > \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$.

3. População humana infestada por mosquitos com a transmissão da dengue. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{\sigma_e}{\rho_l} E \\ P = \frac{\sigma_e \sigma_l}{\rho_l \rho_p} E \\ W_1 = \frac{\sigma_e \sigma_l \sigma_p}{\rho_l \rho_p \rho_w} \frac{1}{\left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h \right]} E \\ W_2 = \frac{\sigma_e \sigma_l \sigma_p}{\rho_l \rho_p \rho_w} \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_2 \rho_i \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h \right]} h E \\ W_3 = \frac{\gamma_w}{\rho_3} W_2 \\ s = \frac{1}{R_0} \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w (\rho_3 + \gamma_w)}{\rho_2 \rho_3 \rho_i} h \right] \\ i = \frac{\gamma_h}{\rho_i} h \\ r = \frac{\gamma_h \sigma_h}{\rho_i \mu_h} h, \end{array} \right. \quad (27)$$

mais os valores para E e h dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} E = C' \left(1 - \frac{\phi'}{\phi} \right) \\ h = \frac{\gamma_w \mu_h \varepsilon \beta_h}{\rho_h \mu_h (\rho_3 + \gamma_w) + \gamma_w \varepsilon \beta_h} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right), \end{array} \right. \quad (28)$$

cujos valores são válidos para $\phi > \phi'$ e $R_0 > 1$, onde ϕ' é dada por

$$\phi' = \frac{\phi_{th}}{\left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w (\rho_3 + \gamma_w)}{\rho_2 \rho_3 \rho_i} h \right] \frac{\rho_w \rho_i}{\gamma_h \varepsilon \beta_w h + \rho_w \rho_i}}, \quad (29)$$

com ϕ_{th} sendo dada pela equação (6). Note que se não houver transmissão da dengue, tem-se $\phi' = \phi_{th}$. A função ϕ' é estritamente crescente

com h , tendo um valor assintótico ϕ_∞ dado por

$$\phi_\infty = \frac{\rho_e \rho_l \rho_p \rho_2 \rho_3}{\sigma_e \sigma_l \sigma_p (\gamma_w + \rho_3)},$$

obtido do limite $h \rightarrow \infty$.

A estabilidade do ponto de equilíbrio trivial não se faz por meio da equação característica, pois na matriz Jacobiana tem-se divisão por zero. Por isso, faz-se a análise de estabilidade do ponto de equilíbrio da população humana infestada de mosquitos sem dengue, dada pela equação (26). A equação característica é dada por

$$\Lambda(\lambda) = P_1(\lambda) P_2(\lambda) = 0,$$

onde os polinômios de quarto grau $P_1(\lambda)$ e $P_2(\lambda)$ são dadas por

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = (\rho_e R_0 + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \frac{\phi \sigma_e \sigma_l \sigma_p}{Q_0} = 0 \\ P_2(\lambda) = (\rho_2 + \lambda)(\rho_3 + \lambda)(\rho_h + \lambda)(\rho_i + \lambda) - \varepsilon^2 \gamma_w \gamma_h \beta_w \beta_h = 0, \end{cases}$$

com Q_0 dada pela equação (5) e os termos independentes de λ dados por

$$\begin{cases} a_1^0 = \rho_e \rho_l \rho_p \rho_w \left(\frac{\phi}{\phi_{th}} - 1 \right) \\ a_2^0 = \rho_2 \rho_3 \rho_h \rho_i (1 - R_0). \end{cases}$$

Note que os termos independentes são positivos para $\phi > \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$. Assim, o ponto de equilíbrio não-trivial dado pela equação (26) é localmente e assintoticamente estável se $\phi > \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$. Dessa forma, conjectura-se que, se $\phi \leq \phi_{th}$ e $R_0 \leq 1$ então o equilíbrio trivial é estável, enquanto que, se $\phi > \phi_{th}$ e $R_0 > 1$ então o equilíbrio endêmico da dengue é estável.

Para a dinâmica da transmissão da dengue, com $\varphi(W) = \phi \sqrt{W}$ e $\varphi(W) = \phi W^2$, única equação no estado estacionário que difere corresponde ao compartimento de ovos. Assim, basta resolver a equação

$$\varphi(W) \left[1 - \frac{E(t)}{C'} \right] - \rho_e E(t) = 0$$

com os resultados para outros compartimentos.

3.2 Encontro aleatório

Estuda-se o caso do evento probabilístico, com as forças de infecções dadas pela equação (21).

Os pontos de equilíbrio dos sistemas de equações (23) e (16) com as forças de infecção dada pela equação (21) são três.

1. População humana livre de mosquitos. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\begin{cases} E = L = P = W_1 = W_2 = W_3 = 0 \\ s = 1 \\ h = i = r = 0, \end{cases} \quad (30)$$

cujos valores são válidos para $\phi \leq \phi_{th}$, com ϕ_{th} sendo dada pela equação (6).

2. População humana infestada por mosquitos sem a transmissão da dengue. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\begin{cases} E = C' \left(1 - \frac{\phi_{th}}{\phi}\right) \\ L = \frac{\sigma_e}{\rho_l} E \\ P = \frac{\sigma_e \sigma_l}{\rho_l \rho_p} E \\ W_1 = W = \frac{\sigma_e \sigma_l \sigma_p}{\rho_l \rho_p \rho_w} E \\ W_2 = W_3 = 0 \\ s = 1 \\ h = i = r = 0, \end{cases} \quad (31)$$

cujos valores são válidos para $\phi > \phi_{th}$ e $ER'_0 \leq 1$, onde R'_0 é dada por

$$R'_0 = R_0 \frac{\rho_e}{\phi_{th}}, \quad (32)$$

com ϕ_{th} sendo dada pela equação (6). Novamente, o parâmetro R'_0 representa a razão de reprodutibilidade da dengue, pois está considerando o controle do vetor. Se não houver nenhum mecanismo de controle no vetor, tem-se, então, a razão de reprodutibilidade basal.

3. População humana infestada por mosquitos com a transmissão da dengue. Os valores para cada compartimento de mosquitos e homens são dados por

$$\begin{cases} L = \frac{\sigma_e}{\rho_l} E \\ P = \frac{\sigma_e \sigma_l}{\rho_l \rho_p} E \\ W_1 = \frac{\sigma_e \sigma_l \sigma_p}{\rho_l \rho_p \rho_w} \frac{1}{\left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h\right]} E \\ W_2 = \frac{\sigma_e \sigma_l \sigma_p}{\rho_l \rho_p \rho_w} \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_2 \rho_i \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h\right]} h E \\ W_3 = \frac{\gamma_w}{\rho_3} W_2 \\ s = \frac{\rho_2 \rho_3 \rho_h \rho_i}{\gamma_w \gamma_h \varepsilon^2 \beta_w \beta_h} \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w}{\rho_w \rho_i} h\right] \frac{1}{E} \\ i = \frac{\gamma_h}{\rho_i} h \\ r = \frac{\gamma_h}{\rho_i} \frac{\sigma_h}{\mu_h} h, \end{cases} \quad (33)$$

mais os valores para E (solução de uma equação de segundo grau) e h dados por

$$\begin{cases} a_2 E^2 + a_1 E - a_0 = 0 \\ h = \frac{\mu_h q}{\rho_h R_0'} \frac{ER_0' - 1}{Eq + \mu_h}, \end{cases} \quad (34)$$

cujos valores são válidos para $ER_0' > 1$, onde q é dada por

$$q = \frac{\gamma_w \varepsilon \beta_h \sigma_e \sigma_l \sigma_p}{\rho_2 \rho_3 \rho_p \rho_l},$$

e os coeficientes são dadas por

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\gamma_w \mu_3 + \rho_3 \mu_2}{\rho_2 \rho_3} \\ a_1 = \frac{\gamma_w \mu_3 + \rho_3 \mu_2}{\rho_2 \rho_3} + \frac{q}{\mu_h} \left\{ \frac{1 - R_0}{R_0} + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w \mu_h}{\rho_h \rho_i} \left[\frac{1}{R_0 \rho_w} - \frac{\rho_3 + \gamma_w}{\rho_2 \rho_3} \right] \right\} \\ a_2 = \frac{q}{\mu_h} \left[1 + \frac{\gamma_h \varepsilon \beta_w (\rho_3 + \gamma_w) \mu_h}{\rho_2 \rho_3 \rho_h \rho_i} \right]. \end{cases}$$

Se $ER_0' > 1$, então a condição $\phi > \phi_{th}$ é satisfeita automaticamente, assim como $R_0 > 1$. A equação de segundo grau tem uma única solução real positiva, pois $a_i > 0$, para $i = 0, 1$ e 2 .

A análise de estabilidade do ponto de equilíbrio da população humana infestada de mosquitos sem dengue, dada pela equação (30), é feita pela equação característica

$$\Lambda(\lambda) = P_1(\lambda) P_2(\lambda) = 0,$$

onde os polinômios de quarto grau $P_1(\lambda)$ e $P_2(\lambda)$ são dadas por

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = (\rho_e + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \phi\sigma_e\sigma_l\sigma_p = 0 \\ P_2(\lambda) = (\rho_2 + \lambda)(\rho_3 + \lambda)(\rho_h + \lambda)(\rho_i + \lambda) = 0, \end{cases}$$

com os termo independente de λ dado por

$$\begin{cases} a_1^0 = \rho_e\rho_l\rho_p\rho_w \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{th}}\right) \\ a_2^0 = \rho_2\rho_3\rho_h\rho_i. \end{cases}$$

Note que o termo independente para $P_1(\lambda)$ é positivo para $\phi < \phi_{th}$. Assim, o ponto de equilíbrio não-trivial dado pela equação (30) é localmente e assintoticamente estável se $\phi < \phi_{th}$, pois os auto-valores de $P_2(\lambda)$, dados por

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\rho_2 \\ \lambda_2 = -\rho_3 \\ \lambda_3 = -\rho_h \\ \lambda_4 = -\rho_i, \end{cases}.$$

são todos reais negativos.

A análise de estabilidade do ponto de equilíbrio da população humana infestada de mosquitos sem dengue, dada pela equação (31), é feita pela equação característica

$$\Lambda(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda) = 0,$$

onde os polinômios de quarto grau $P_1(\lambda)$ e $P_2(\lambda)$ são dadas por

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = (\rho_e R_0 + \lambda)(\rho_l + \lambda)(\rho_p + \lambda)(\rho_w + \lambda) - \frac{\phi\sigma_e\sigma_l\sigma_p}{Q_0} = 0 \\ P_2(\lambda) = (\rho_2 + \lambda)(\rho_3 + \lambda)(\rho_h + \lambda)(\rho_i + \lambda) - \varepsilon^2\gamma_w\gamma_h\beta_w\beta_h\frac{\sigma_e\sigma_l\sigma_p}{\rho_l\rho_p\rho_w} E = 0, \end{cases}$$

com Q_0 dada pela equação (5) e os termos independentes de λ dados por

$$\begin{cases} a_1^0 = \rho_e\rho_l\rho_p\rho_w \left(\frac{\phi}{\phi_{th}} - 1\right) \\ a_2^0 = \rho_2\rho_3\rho_h\rho_i (1 - ER'_0). \end{cases}$$

Note que os termos independentes são positivos para $\phi > \phi_{th}$ e $ER'_0 < 1$. Assim, o ponto de equilíbrio não-trivial dado pela equação (31) é localmente

e assintoticamente estável se $\phi > \phi_{th}$ e $ER'_0 > 1$. Dessa forma, conjectura-se que, se $ER'_0 > 1$ então o equilíbrio endêmico da dengue é estável.

Para a dinâmica da transmissão da dengue, com $\varphi(W) = \phi\sqrt{W}$ e $\varphi(W) = \phi W^2$, única equação no estado estacionário que difere corresponde ao compartimento de ovos. Assim, basta resolver a equação

$$\varphi(W) \left[1 - \frac{E(t)}{C'} \right] - \rho_e E(t) = 0$$

com os resultados para outros compartimentos.

4 Conclusão

A população de mosquitos resiste a intensos mecanismos de controle devido à abundância de criadouros. Esta capacidade de evasão e perpetuação podem ser explicadas de duas maneiras: pela forma de oviposição (diferentes modelos) ou pela elevada capacidade de geração de fêmeas (valores elevados de razão de reprodutibilidade).

A dinâmica da transmissão da dengue depende da forma como a doença se propaga. Os resultados oriundos de encontro como um evento probabilístico (“verdadeira” lei da ação das massas, segundo alguns autores) diferem dos de encontro aleatório (“falsa” lei da ação das massas). Note que esta diferenciação nos resultados só aparece se a população total variar com o tempo, sendo que no caso de população constante, os resultados epidemiológicos são os mesmos, independentes do tipo de encontro considerado.

Referências

- [1] Leite, M.B.F.; Bassanezi, R.C. & Yang, H.M. (2000). The *Basic Reproduction Ratio* for A Model of Directly Transmitted Infections Considering The Virus Charge and The Immunological Response. **IMA Jour. Math. Appl. Med. Biol.** **17** (1): 15-31.
- [2] Yang, H.M. (2001). *Epidemiologia Matemática - Estudo dos Efeitos da Vacinação em Doenças de Transmissão Direta*. EDUNICAMP e FAPESP, Campinas e São Paulo: 239 pp.

