
Uma estratégia para a simulação numérica do comportamento evolutivo de um sistema de EDP descritivo do mal-das-cadeiras de capivaras – a presença do vetor

João Frederico da C. A. Meyer, joni@ime.unicamp.br
Sílvio de Alencastro Pregnoatto, silvio@ime.unicamp.br
DMA/IMECC – UNICAMP, CP 6065, 13083-970 Campinas, SP

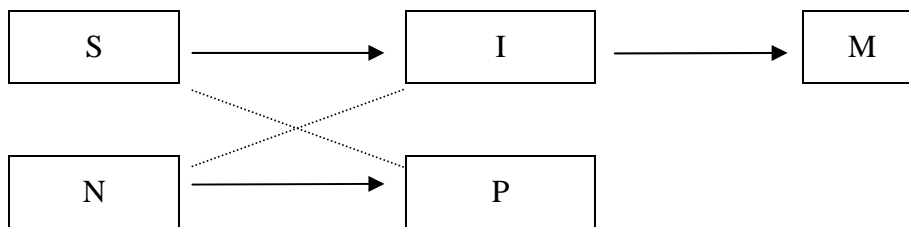
Introdução

No trabalho intitulado “Uma estratégia numérica para a simulação numérica do comportamento evolutivo de um sistema de EDP descritivo do mal-das-cadeiras de capivaras – taxa periódica de infecção” foi apresentada uma modelagem em que se fez a suposição de que o contágio de uma epidemia de mal-das-cadeiras numa população de capivaras variaria com as características oscilatórias periódicas da população do inseto transmissor e, no lugar do parâmetro constante indicativo de um contágio invariante, uma senoidal representou, então, o efeito da variação da população de insetos transmissores em termos do contágio entre roedores suscetíveis e infectados. Uma outra possibilidade, porém, de modelar o comportamento social desta endemia usando sistemas do tipo SIR com espalhamento espacial poderia ser a de incluir no sistema, além dos três compartimentos de capivaras (suscetíveis, infectadas e mortas), dois compartimentos do inseto, o dos portadores e dos não-portadores do protozoário causador do mal, além da dinâmica populacional do vetor. Neste novo quadro, os roedores continuarão a ser identificados em termos compartimentais como os suscetíveis ($S(t)$), os infectados ($I(t)$) e os mortos ($M(t)$), enquanto os insetos são divididos em portadores ($P(t)$) e não-portadores ($N(t)$). Incluindo as "varejeiras" ou

"mutucas" e sua dinâmica populacional, não é mais necessário modelar, com a senoidal adotada anteriormente, a influência abiótica em termos climáticos sobre a população, mas é necessário incluir aquelas características de dinâmica populacional dos insetos transmissores que permitam incluir sua reprodução e dependência logística da densidade.

O Modelo Matemático

O modelo proposto, na linha daqueles citados no levantamento bibliográfico é dado por:



Aqui, além das passagens possíveis de um compartimento ao seguinte, destacam-se, com linhas pontilhadas, as possibilidades de contágio, isto é, de um roedor suscetível em contato com um inseto portador do protozoário ou de um inseto não portador com uma capivara infectada. Assim, o que se tem é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_S \Delta S + \operatorname{div}(\vec{V}.S) + \sigma_S.S &= \lambda_S.S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1.S.P, \\
\frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_I \Delta I + \sigma_I.I &= \beta_1.S.P - \gamma.I, \\
\frac{\partial M}{\partial t} &= \gamma.I, \\
\frac{\partial N}{\partial t} - \alpha_N \Delta N + \operatorname{div}(\vec{W}.N) + \sigma_N.N &= \lambda_N.(P+N) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2.N.I, \\
\frac{\partial P}{\partial t} - \alpha_N \Delta P + \operatorname{div}(\vec{W}.P) + \sigma_N.P &= \beta_2.N.I,
\end{aligned} \tag{1}$$

para $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in (0, T]$.

Apesar de se repetirem alguns dos coeficientes já descritos no modelo anterior nos quais havia apenas três compartimentos, vale a pena defini-los formalmente:

- α_S : dispersão populacional (difusibilidade) das capivaras não contaminadas,
- α_I : dispersão populacional das capivaras infectadas,
- α_N : dispersão populacional dos insetos – que assumimos ser a mesma para portadores e não portadores,
- σ_S : mortalidade de capivaras suscetíveis por fatores representativos de hostilidade do meio,
- σ_I : mortalidade de capivaras infectadas por fatores representativos da hostilidade do meio - e não pela infecção em si, e
- σ_N : mortalidade de insetos por fatores representativos da hostilidade do meio (este coeficiente é igual para insetos portadores e não portadores do protozoário).

- λ_S : taxa intrínseca de crescimento de capivaras sadias, e
- λ_N : taxa intrínseca de crescimento dos insetos (considera-se que insetos portadores e insetos não-portadores têm ambos crias não-portadoras).
- β_1 : taxa de infecção de capivaras sadias por contato (picada) de insetos portadores,
- β_2 : taxa de transformação de insetos não portadores em portadores por contato (picada) em capivaras infectadas.
- γ : taxa de mortalidade de capivaras infectadas.
- K_1 : capacidade de suporte do meio para as capivaras e
- K_2 : capacidade de suporte do meio para insetos (portadores ou não).
Ainda,
- V : vetor direção e intensidade de uma possível migração de capivaras e
- W : vetor direção e intensidade de uma possível migração de insetos.

As condições de contorno que serão aqui usadas são de tipo homogêneo misto, com partes da fronteira em que não há capivaras nem varejeiras, e partes da fronteira em que não há passagem de indivíduos dessas duas espécies:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial S(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } S(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial I(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } I(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial M(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } M(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial N(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } N(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0, \\
\left. \frac{\partial P(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} &= 0 \text{ e } P(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

Tanto o modelo quanto o algoritmo se prestam, de modo muito simples a condições de contorno bem mais complexas, do tipo da descrita abaixo, para a população de Suscetíveis, mas ilustrando todos os compartimentos:

$$-a. \frac{\partial S}{\partial \eta} + b.S = g, \text{ com } a, b \text{ e } g \text{ definidos apropriadamente.}$$

Em termos de condições iniciais, adota-se uma distribuição homogênea de roedores suscetíveis, um foco restrito de capivaras infectadas e, de início, nenhum animal morto pela endemia. Analogamente, iremos considerar distribuição homogênea apenas de varejeiras, sem que haja, nesse instante inicial, portadores:

$S(x, y, 0) = S_0 = \text{constante}$, $I(x, y, 0) = I_0(x, y)$, $M(x, y, 0) = 0$, $N(x, y, 0) = N_0 = \text{constante}$ e $P(x, y, 0) = 0$, em todo o domínio Ω .

Como anteriormente, e fazendo uso das condições de contorno adotadas, iremos passar à formulação variacional, para obter o problema do estudo da endemia das capivaras conjuntamente com a dinâmica populacional das varejeiras tanto portadoras quanto não portadoras do protozoário *trypanossoma equus*. O que se obtém é o problema:

Achar $S = S(x,y,t)$, $I = I(x,y,t)$, $M = M(x,y,t)$, $N = N(x,y,t)$ e $P = P(x,y,t)$, num espaço H convenientemente definido, satisfazendo as condições indicadas acima. Como já foi mencionado em (3.10), necessitaremos também do espaço de funções teste, V . Assim,

$$H = \{ u : \forall t \in (0, T], u \in H^1(\Omega), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega) \text{ e } u|_{\Gamma_0} = 0 \}$$

$$V = \{ v : v \in H^1(\Omega) \text{ e } v|_{\Gamma_0} = 0 \}.$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial S}{\partial t} | v \right) + \alpha_s (\nabla S \parallel \nabla v) + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla} S | v) + \sigma_s (S | v) = \\ & = \lambda_s (S | v) - \frac{\lambda_s}{K_1} ((S + I)^2 | v) - \beta_1 \cdot (S \cdot P | v), \\ & \left(\frac{\partial I}{\partial t} | v \right) - \alpha_1 (\nabla I \parallel \nabla v) + \sigma_1 (I | v) = +\beta_1 \cdot (S \cdot P | v) - \gamma (I | v), \\ & \left(\frac{\partial M}{\partial t} | v \right) = \gamma (I | v), \\ & \left(\frac{\partial N}{\partial t} | v \right) + \alpha_n (\nabla N \parallel \nabla v) + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla} N | v) + \sigma_n (N | v) = \\ & = \lambda_n (P + N | v) - \frac{\lambda_n}{K_2} ((P + N)^2 | v) - \beta_2 \cdot (N \cdot I | v), \\ & \left(\frac{\partial P}{\partial t} | v \right) + \alpha_n (\nabla P \parallel \nabla v) + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla} P | v) + \sigma_n (P | v) = \beta_2 \cdot (N \cdot I | v), \\ & \text{para } \forall v \in V. \end{aligned} \tag{3}$$

O modelo discretizado

Visando o uso do método de elementos finitos no espaço, usado junto com o de diferenças finitas para o tempo, iremos discretizar as funções que descrevem cada um dos compartimentos populacionais, procedendo, também a uma separação de variáveis:

$$\begin{aligned}S_h &= \sum_{j=1}^N p_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\I_h &= \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\M_h &= \sum_{j=1}^N r_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\N_h &= \sum_{j=1}^N c_j(t) \cdot \varphi_j(x, y), \\e P_h &= \sum_{j=1}^N d_j(t) \cdot \varphi_j(x, y).\end{aligned}\tag{4}$$

Usando estas aproximações em (3), obtem-se o sistema não-linear de Equações Diferenciais Ordinárias dado por:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{dp_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j p_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j p_j(t) (\overline{\mathbf{W}} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + (\sigma_s - \lambda_s) \sum_j p_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda_s}{\mathbf{K}_1} \sum_j p_j(t) \sum_1 p_1(t) \cdot (\varphi_1 \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda_s}{\mathbf{K}_1} \sum_j p_j(t) \sum_1 q_1(t) \cdot (\varphi_1 \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \beta_1 \sum_j p_j(t) \sum_1 d_1(t) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dq_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_l \sum_j q_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + (\sigma_l + \gamma) \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \beta_1 \sum_j p_j(t) \sum_1 d_1(t) \cdot (\varphi_1 \cdot \varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dr_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) - \gamma \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) = 0, \\
& \sum_j \frac{dc_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j c_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j c_j(t) (\overline{\mathbf{W}} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + (\sigma_N - \lambda_N) \sum_j c_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \lambda_N \sum_j d_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda_N}{\mathbf{K}_2} \sum_j c_j \sum_1 c_1(t) \cdot (\varphi_1 \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + 2 \frac{\lambda_N}{\mathbf{K}_2} \sum_j c_j(t) \sum_1 d_1(t) \cdot (\varphi_1 \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda_N}{\mathbf{K}_2} \sum_j d_j(t) \sum_1 d_1(t) \cdot (\varphi_1 \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \beta_2 \sum_j c_j(t) \sum_1 q_1(t) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) = 0, \tag{5} \\
& \sum_j \frac{dd_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j d_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j d_j(t) (\overline{\mathbf{W}} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \sigma_N \sum_j d_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \beta_2 \sum_j c_j(t) \sum_1 q_1(t) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) = 0
\end{aligned}$$

A seguir, iremos substituir os termos de variação temporal, usando o método implícito de Crank-Nicolson, isto é, procedendo às aproximações exaustivamente mencionadas, e repetidas:

$$\frac{dx_j(t_n + \Delta t/2)}{dt} \cong \frac{x_j(t_{n+1}) - x_j(t_n)}{\Delta t} \text{ com erro da ordem de } (\Delta t)^2 \text{ e}$$

$$x_j(t_n + \Delta t/2) \cong \frac{x_j(t_{n+1}) + x_j(t_n)}{2} \text{ com erro da mesma ordem.}$$

Denominando $p_j^{(n)}$, $q_j^{(n)}$, $r_j^{(n)}$, $c_j^{(n)}$ e $d_j^{(n)}$ as aproximações temporais de p , q , r , c e d nos nós (x_j, y_j, t_n) , pode-se obter:

$$\begin{aligned} & \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_S \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\ & + \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + (\sigma_S - \lambda_S) \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\ & + \frac{\lambda_S}{K_1} \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \cdot \sum_1 \left(\frac{p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)}}{2} + \frac{q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}}{2} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \\ & + \beta_1 \sum_j \frac{p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)}}{2} \sum_1 \frac{d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}}{2} (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) = 0 \\ & \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_1 \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\ & + (\sigma_1 + \gamma) \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) - \\ & - \beta_1 \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_1 \frac{d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}}{2} (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) = 0 \\ & \sum_j \frac{r_j^{(n+1)} - r_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) - \gamma \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} - c_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} (\overline{\mathbf{W}} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + (\sigma_N - \lambda_N) \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2} \sum_1 \left(\frac{c_1^{(n+1)} + c_1^{(n)}}{2} + 2 \cdot \frac{d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}}{2} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \\
& + \frac{\lambda_N}{K_2} \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} \sum_1 \frac{d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}}{2} (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \lambda_N \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = 0 \\
\\
& \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_N \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\overline{\mathbf{W}} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + (\sigma_N) \sum_j \frac{d_j^{(n+1)} + d_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \beta_2 \Delta t \sum_j \frac{c_1^{(n+1)} + c_1^{(n)}}{2} \sum_1 \frac{q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}}{2} (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) = 0
\end{aligned}$$

Neste sistema, separando em cada equação os termos em t_{n+1} e em t_n da correspondente população e reagrupando-os convenientemente para facilitar a implementação do algoritmo, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_j p_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_s - \lambda_s)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 \left(d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \\
& \left. \frac{\lambda_s \Delta t}{4K_1} \sum_1 \left(p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right\} = \\
& \sum_j p_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_s - \lambda_s)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 \left(d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \\
& \left. \frac{\lambda_s \Delta t}{4K_1} \sum_1 \left(p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\
& \sum_j q_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_1 + \gamma)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_1 \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) \right\} = \\
& \sum_j q_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_1 + \gamma)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_1 \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) \right\} + \\
& \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_j \left(p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)} \right) \sum_1 \left(d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)} \right) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j r_j^{(n+1)} (\varphi_j | \varphi_i) = \sum_j r_j^{(n)} (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j \left(q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)} \right) (\varphi_j | \varphi_i),
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j c_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_N - \lambda_N) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_1 (q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \\
& \left. \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_1 (c_1^{(n+1)} + c_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right\} = \\
& \sum_j c_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_N - \lambda_N) \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_1 (q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_1 (c_1^{(n+1)} + c_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \left. \right\} + \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{2} \sum_j (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}) * \left[(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{1}{2K_2} \sum_1 (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \right], \\
& \sum_j d_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_N \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \left. \right\} = \\
& \sum_j d_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_N \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) \left. \right\} + \\
& \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_j (c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}) \sum_1 (q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned}$$

O algoritmo

Dados $S^{(0)}$, $I^{(0)}$, $M^{(0)}$, $N^{(0)}$ e $P^{(0)}$, obtêm-se os sucessivos valores de $S^{(n)}$, $I^{(n)}$, $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ e $P^{(n)}$ resolvendo o sistema não-linear abaixo fazendo uso de aproximação linear iterativa que, por simplicidade, não vai aqui explicitada:

$$U_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot S^{(n+1)} = W_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot S^{(n)},$$

$$U_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot I^{(n+1)} = W_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot I^{(n)} + w_I(S^{(n+1)}, S^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}),$$

$$U_M \cdot M^{(n+1)} = W_M \cdot M^{(n)} + w_M(I^{(n+1)}, I^{(n)}),$$

$$U_N(I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot N^{(n+1)} = W_N(I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}, P^{(n+1)}, P^{(n)}) \cdot N^{(n)} + w_N(P^{(n+1)}, P^{(n)}),$$

$$U_P \cdot P^{(n+1)} = W_P \cdot P^{(n)} + w_P(I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)}),$$

onde os operadores não lineares $U_S, W_S, U_I, W_I, U_N, W_N$, as matrizes U_M, W_M, U_P, W_P e os vetores $w_I(S^{(n+1)}, S^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)})$, $w_M(I^{(n+1)}, I^{(n)})$ e $w_P(I^{(n+1)}, I^{(n)}, N^{(n+1)}, N^{(n)})$, são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}
U_S(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_S - \lambda_S)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_S \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
&V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \\
&\left. \frac{\lambda_S \Delta t}{4K_1} \cdot \sum_1 (p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \cdot \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\
W_S(i, j) &= \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_S - \lambda_S)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_S \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
&V_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - V_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) - \frac{\beta_1 \Delta t}{4} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \\
&\left. \frac{\lambda_S \Delta t}{4K_1} \cdot \sum_1 (p_1^{(n+1)} + p_1^{(n)} + q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \cdot \varphi_j | \varphi_i) \right\}, \\
U_I(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_I + \gamma)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_I \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) \right\}, \\
W_I(i, j) &= \left\{ \left[1 - \frac{(\sigma_I + \gamma)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_I \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) \right\}, \text{com} \\
w_I(i) &= \sum_j \frac{\beta_1 \Delta t}{4} (p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}) \cdot \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
U_M(i, j) &= (\varphi_j | \varphi_i), e \\
W_M(i, j) &= (\varphi_j | \varphi_i), \text{com } w_M(i) = \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j (q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}) (\varphi_j | \varphi_i). \\
U_N(i, j) &= \left\{ \left[1 + \frac{(\sigma_N - \lambda_N)\Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
&W_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) + W_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right) +
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_1 (q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) + \\
& \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_1 (c_1^{(n+1)} + c_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \}, \\
W_N(i, j) = & \{ [1 - \frac{(\sigma_N - \lambda_N) \Delta t}{2}] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - \\
W_1 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) - & W_2 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) - \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_1 (q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - \\
\frac{\lambda_N \Delta t}{2K_2} \sum_1 (d_1^{(n+1)} + d_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) - & \frac{\lambda_N \Delta t}{4K_2} \sum_1 (c_1^{(n+1)} + c_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i) \}, \\
w_N(i) = & \frac{\lambda_N \Delta t}{2} \sum_j (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}) \cdot [(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{1}{2K_2} \sum_1 (d_j^{(n+1)} - d_j^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i)], \\
U_P(i, j) = & \{ [1 + \frac{\sigma_N \Delta t}{2}] (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) + \\
W_1 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) + & W_2 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) \}, \\
W_P(i, j) = & \{ [1 - \frac{\sigma_N \Delta t}{2}] (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_N \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i) - \\
W_1 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) - & W_2 \frac{\Delta t}{2} (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i) \}, \text{ com} \\
w_P(i) = & \frac{\beta_2 \Delta t}{4} \sum_j (c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}) \sum_1 (q_1^{(n+1)} + q_1^{(n)}) (\varphi_1 \varphi_j | \varphi_i).
\end{aligned}$$

Este algoritmo foi programado no ambiente do Matlab, usando estruturas de matrizes esparsas, e foi possível obter, para um domínio genérico, resultados que vêm sistematicamente de acordo com os fenômenos observados. Cabe mencionar o longo tempo despendido em cada ensaio numérico, dada a necessidade de serem resolvidos diversos sistemas lineares a cada um dos passos no tempo, além, claro, das operações

matriciais e vetoriais. Isto correspondeu a algo entre centenas e milhares de resoluções de sistemas lineares com matrizes da ordem de 60×60 . O tempo para estas execuções deverá cair rapidamente em função de uma melhoria significativa de recursos computacionais.

A seguir, iremos apresentar, apenas visualmente, os resultados de alguns desses ensaios.

No caso abaixo (fig. 1), para um período relativamente curto de tempo (tempo final escolhido como 75 u.t.), podemos observar que a única população significativamente presente no meio é de insetos portadores. Além do mais, as populações de infectados, mortos e de insetos não-portadores, se concentram em torno do ponto em que primeiro apareceram os insetos portadores, enquanto que a população de insetos suscetíveis segue seu caminho verhulstiano:

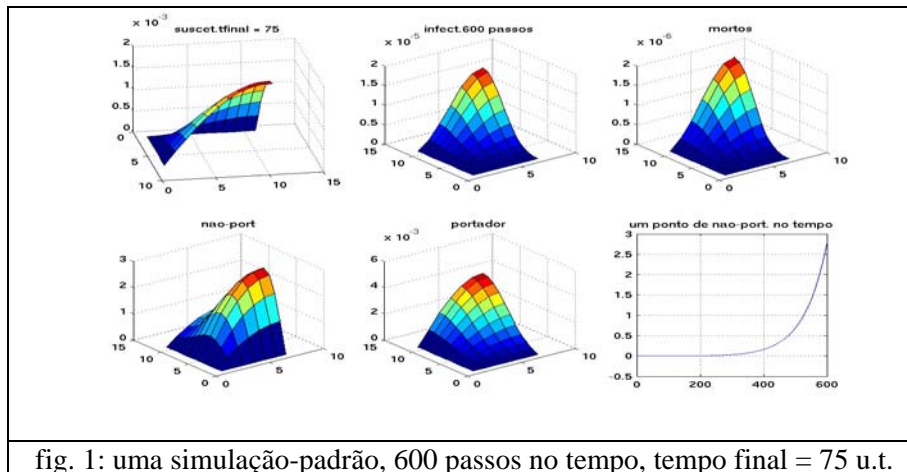


fig. 1: uma simulação-padrão, 600 passos no tempo, tempo final = 75 u.t.

Observamos que a população de insetos não-portadores está crescendo no ponto genérico do domínio que foi escolhido para se ter uma visão evolutiva do processo, apesar da presença de insetos e de animais infectados. Observamos também que há,

ainda, coincidência nas concentrações de populações de mamíferos, mas não na de insetos.

A figura 2 destaca o gráfico de não-portadores numa perspectiva de mais fácil visualização. Pode-se observar que, na região em que se concentra a maior quantidade de insetos portadores, a concentração dos não-portadores já iniciou um processo de queda populacional:

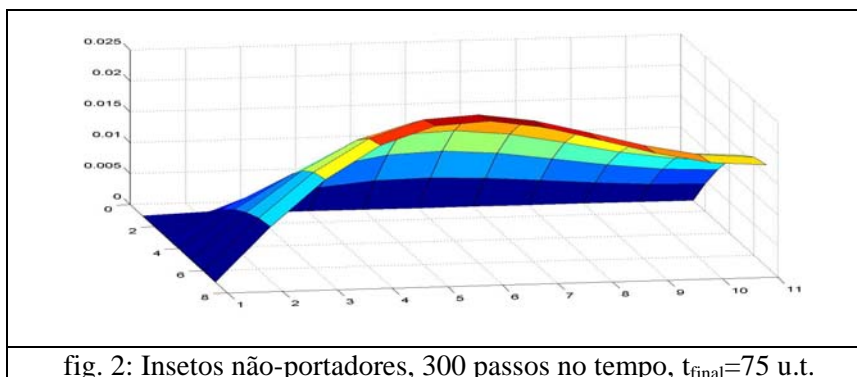


fig. 2: Insetos não-portadores, 300 passos no tempo, $t_{\text{final}}=75$ u.t.

Com mais tempo, porém, essa aparente concordância de comportamentos tanto de capivaras suscetíveis e infectadas, quanto de insetos portadores e não-portadores deixa de se manifestar, surgindo uma presença por assim dizer complementar, aliás esperada! São, evidentemente, mais passos no tempo (no caso da fig. 3, o tempo final foi considerado como 750 unidades, e foram usados 1500 passos no tempo):

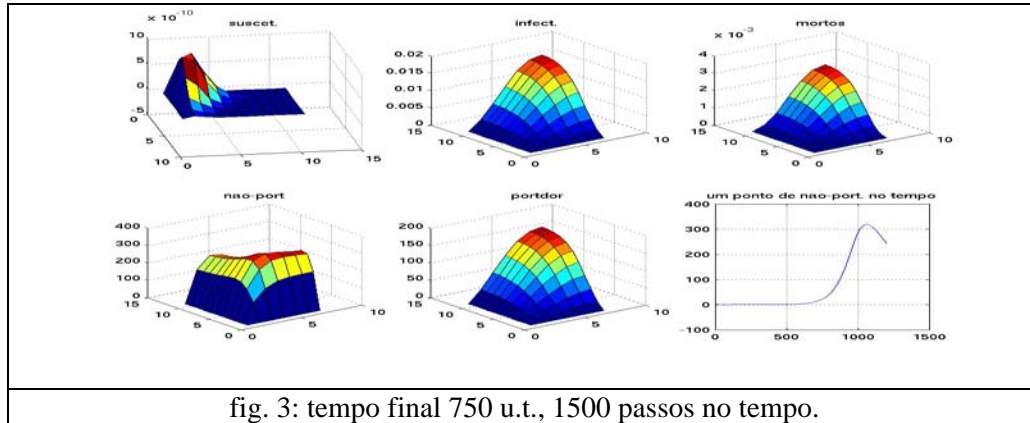


fig. 3: tempo final 750 u.t., 1500 passos no tempo.

Da figura 3 acima, podemos destacar duas superfícies na figura 4: a de capivaras suscetíveis e aquela de insetos não portadores. O objetivo deste destaque é o de enfatizar a mudança de comportamento à medida que o tempo evolui. Ocorre uma presença complementar com relação, respectivamente, às populações de mamíferos infectados e de insetos portadores. Ora esta situação é como a que se descreve *in loco*, quando os guias e guardas florestais (a denominação permanece embora não haja, formalmente, florestas a serem guardadas...) relatam o desaparecimento de capivaras sãs (que na superfície $S(x,y,t)$ se deslocam para as fronteiras mais distantes do domínio), e seu ressurgimento passado o período de algumas gerações. Podemos observar também que, após o crescimento inicial da população de insetos não portadores, vem sua queda, tendo a população de insetos passado para o compartimento de portadores, em grande parte devido ao crescimento da população de roedores infectados.

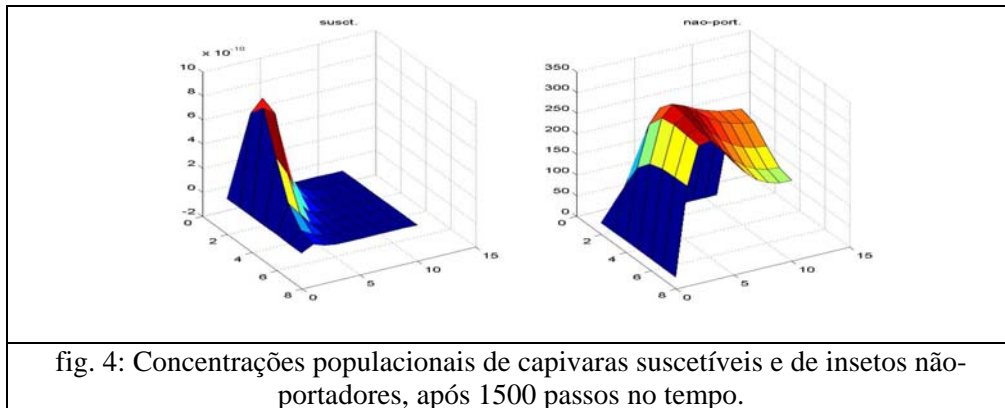


fig. 4: Concentrações populacionais de capivaras suscetíveis e de insetos não-portadores, após 1500 passos no tempo.

Conclusão

Embora continue a valer, para este tipo de modelo, a crítica àqueles sistemas que “isolam” populações que se encontram imersas em ecossistemas muito mais complexos, este tipo de esforço pode se constituir em formidável ferramenta para a avaliação de estratégias de manejo, e sua adoção (ou rejeição!) visando técnicas de comunidades sustentáveis – um dos principais modos de se repensar nosso convívio com regiões que ainda conseguem conservar características naturais. Neste caso, o do pantanal no nordeste argentino, os “Esteros de Ibera”.

Referências

- Banks, H.T. e Kareiva, P. Parameter Estimation Techniques for Transport Equations with Application to Population Dispersal and Tissue Bulk Flow Models. *J. Math. Biol.*, 17, 253-273, 1983.
- Bassanezi, R.C. e Ferreira Jr., W.C. Equações Diferenciais e Aplicações, HARBRA, 1988.
- Boch, J. e Supperer, R. Parasitologia em medicina veterinária. Ed. Hemisfério Sur S.A., Buenos Aires, 627 pp., 1992.
- Boero, J.J. Parasitosis animalis. Ed. Universitaria de Buenos Aires, 524 pp., 1967.
- Bolker, B. e Pacala, S.W. Using Momento Equations to understand Stochastical Driven Spatial Pattern Formation in Ecological Systems. *Theor. Popul. Biol.*, 52, 179-197, 1997.
- Cantrell, R.S. e Cosner, C. On the effects of spatial heterogeneity on the persistence of interacting species. *J. Math. Biology*, 37, 103-145, 1998.
- Cantrell, R.S. e Cosner, C. Spatially Explicit Models for the Population Dynamics of a Species colonizing an Island. *Math. Biosci.*, 136, 65-107, 1996.
- Capasso, V. Mathematical Structures of Epidemic Systems, Lecture Notes in Biomathematics, vol. 97, Springer-Verlag, 1993.
- Gurney, W.S.C. e Nisbet, R.M. The Regulation of Inhomogeneous Populations. *J. Theor. Biol.*, 52, 441-457, 1975.
- Gurtin, M.E. e MacCamy, R. On the Diffusion of Biological Populations. *Math. Biosci.*, 33, 35-49, 1977.

Hoppensteadt, F. *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics*. SIAM, 1975.

Ikeda, T. e Mimura, M. An interfacial approach to regional segregation of two competing species mediated by a predator. *J. Math. Biol.*, 31, 215-240, 1993.

Kardestuncer, H. e Norrie, D.H. (ed.). *Finite Element Handbook*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

Kareiva, P.M. Local movements in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. *Oecology*, 57, 322-327, 1983.

Murray, J.D. *Mathematical Biology*. Springer, 1989.

Peaceman, D.W. e Rachford, Jr, H.H. The numerical solutions of parabolic and elliptic differential equations. *J. SIAM*, v. 3, no 1, 28-41, 1955.

Webb, G.F. A recovery-relapse epidemic model with spatial diffusion. *J. Math. Biology*, v. 14, 177-194, 1982.

Wilder, J.W., Christie, I. e Colbert, J.J. Modelling of two-dimensional spatial effects on the spread of Forest pests and their management. *Ecological Modelling*, 82, 287-298, 1995.