
Uma estratégia para a simulação numérica do comportamento
evolutivo de um sistema de EDP descritivo do mal-das-cadeiras
de capivaras – taxa periódica de infecção

João Frederico da C. A. Meyer, joni@ime.unicamp.br
Sílvio de Alencastro Pregnoatto, silvio@ime.unicamp.br
DMA/IMECC – UNICAMP, CP 6065, cep 13083-970, Campinas, SP

O Problema

Neste trabalho, o objetivo é o de recorrer a instrumental numérico em sistemas do tipo SIR ou SIRS com difusão espacial a que iremos acrescentar determinadas hipóteses relacionadas a um estudo de caso. Neste exemplo, iremos tentar descrever algumas das hipóteses relacionadas à avaliação do mal-das-cadeiras em populações de capivaras, uma epidemia com espalhamento espacial cíclico em determinadas situações com tal tipo de roedor em ambientes naturais. A idéia, então, seria a de colocar um modelo SIR ou SIM, porém apenas com equações para Suscetíveis e Infectados, já que os removidos o são por morte (o que explica a sigla: SIM), simulando o comportamento evolutivo da epidemia citada. Este modelo incluiria a dispersão espacial das capivaras infectadas, o contágio das suscetíveis, e uma dinâmica populacional das suscetíveis, já que as infectadas praticamente não se reproduzem como tal. Além disto, como a população inicial de capivaras suscetíveis é homogênea, nada ocorre em termos de difusibilidade numa fase inicial, mas a variação espacial e temporal surge quando, por contágio, parte da população de animais suscetíveis passa a infectados e estes, após algum tempo, a mortos (ou removidos). O primeiro modelo não irá incluir insetos transmissores do *trypanopssoma equus* causador desse mal endêmico.

O Modelo Matemático

Este primeiro modelo é dado, conseqüentemente, por:

$$\begin{aligned}
 & S = S(x, y; t), \quad I = I(x, y; t) \quad \text{e} \quad M = M(x, y; t) \quad \text{tais que} \\
 & \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_S \Delta S + \operatorname{div}(\bar{V} \cdot S) + \sigma_S S = \lambda S \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI, \\
 & \frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_I \Delta I + \sigma_I I = +\beta SI - \gamma I \quad \text{e} \\
 & \frac{\partial M}{\partial t} = \gamma I \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad t \in (0, T].
 \end{aligned} \tag{1}$$

Uma condição inicial possível é dada por $S(x, y; 0) = S_0$, constante em todo o domínio, por $M(x, y; 0) = 0$ e por $I(x, y; 0) = I_0(x, y)$, onde se supõe uma população de animais sadios, e suscetíveis, homoganeamente distribuída pelo domínio do estudo, e uma população de infectados concentrada em alguma sub-região do domínio Ω . As condições de contorno são – numa modelagem exploratória, inicial - de tipo Dirichlet e von Neumann homogêneas, indicando partes de fronteira $\partial\Omega$ em que há um obstáculo à passagem de indivíduos da espécie estudada (Γ_1) e onde não há indivíduos (Γ_0):

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial S(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} = 0 \quad \text{para } t \in (0, T] \quad \text{e} \\
 & S(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0 \quad \text{para } t \in (0, T], \quad \text{além de} \\
 & \left. \frac{\partial I(x, y; t)}{\partial \eta} \right|_{(x, y) \in \Gamma_1} = 0 \quad \text{para } t \in (0, T] \quad \text{e} \\
 & I(x, y; t)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0 \quad \text{para } t \in (0, T].
 \end{aligned} \tag{2}$$

Os parâmetros que figuram em (1) indicam, como é usual:

- α_S e α_I são, respectivamente, os parâmetros de dispersão populacional de Suscetíveis e de Infectados;

- σ_S e σ_I são, por sua vez, parâmetros indicativos da hostilidade do meio, para Suscetíveis e Infectados, respectivamente;
- V indica (se necessário) uma direção preferencial de movimento de indivíduos suscetíveis, com $\text{div}(V) = 0$;
- λ fornece a taxa intrínseca de reprodução (considerada aqui para um modelo de dinâmica logística) de elementos Suscetíveis da espécie;
- K é a capacidade de suporte do meio;
- β dá a taxa de infecção; e
- γ é a taxa de falecimento de indivíduos infectados.

Uma das razões que motiva o uso experimental deste modelo consiste no fato se obter um falso estado estacionário, dado por:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{\sigma_I + \gamma}{\beta} \\ \bar{I} &= \frac{\beta \cdot K \cdot (\sigma_S - \lambda) - \lambda \cdot (\sigma_I + \gamma)}{\beta \cdot (\lambda - \beta \cdot K)}\end{aligned}\quad (3)$$

Este par de valores, ainda que permaneça (pelo menos teoricamente) estável em termos das respectivas populações de animais suscetíveis e infectados, irá corresponder a uma variação linear no tempo para a população de indivíduos mortos, contrabalançando o crescimento da população pela reprodução dos sadios. Evidentemente esta terna dada por $(\bar{S}, \bar{I}, M(t))$ depende de serem também constantes todos os parâmetros envolvidos. Do ponto de vista da população efetivamente afetada, isto pareceria apontar para um equilíbrio populacional possível com a coexistência de animais sadios e infectados. As condições de variabilidade, porém, tanto nas características das espécies, quanto em fatores que fazem variar coeficientes de contágio e de infecção, bem como de remoção, descartam essa convivência estática da doença no meio de uma população.

Isto posto, iremos recorrer a métodos de aproximação para descrever soluções do sistema (6) acima, incorporando características qualitativas com as quais se possa analisar o mal-das-cadeiras que pretendemos avaliar em uma população endêmica. Desse modo, iremos aproximar taxa de infecção – que descreve o contágio – por uma senoidal, que deve retratar (numa primeira aproximação) a variação periódica sazonal da população do inseto transmissor. Serão aqui consideradas apenas as moscas varejeiras ou “tábanos” já que o presente modelo não irá incluir os barbeiros ou “vinchucas” que, embora transmissores, não se manifestam significativamente no meio estudado. Assim, associando a ação do transmissor à sua densidade populacional, sua disponibilidade, teremos de (6), substituindo a taxa de infecção constante β pela expressão $\beta + \delta \cdot \sin(\pi \cdot t/6)$:

$$\begin{aligned}
 & S = S(x, y; t), \quad I = I(x, y; t) \quad \text{e} \quad M = M(x, y; t) \quad \text{tais que} \\
 & \frac{\partial S}{\partial t} - \alpha_s \Delta S + \operatorname{div}(\vec{V} \cdot S) + \sigma_s S = \lambda S \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\right) S \cdot I, \\
 & \frac{\partial I}{\partial t} - \alpha_i \Delta I + \sigma_i I = + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)\right) S \cdot I - \gamma I, \\
 & \frac{\partial M}{\partial t} = \gamma I, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } t \in (0, T].
 \end{aligned} \tag{4}$$

com $S(x, y, 0) = S_0 = \text{constante}$, $M(x, y, 0) = 0$ e $I(x, y, 0) = I_0(x, y)$, além de satisfazer a (2). A unidade temporal aqui usada é o mês (o que justifica o termo oscilatório anual $\pi \cdot t/6$ em (4)).

Abrimos mão, evidentemente da exibição de uma expressão simples para a solução analítica, e dedicamo-nos, aqui, à busca e ao manejo exploratório de soluções aproximadas. O objetivo, muito mais do que defender que tais soluções retratariam realidades possíveis, é o de criar uma cultura de modelos para que, à medida que novas características de cenários reais e efetivos sejam incorporadas ao modelo, uma intuição

adquirida auxiliada na consideração avaliativa das soluções aproximadas, permitindo uma crítica efetiva do uso do modelo e de seus resultados.

Nessas condições, passaremos à formulação variacional do sistema acima descrito, escolhendo antes espaços funcionais convenientes para esta linha de trabalho:

$$\begin{aligned} H &= \{ u : \forall t \in (0, T], u \in H^1(\Omega), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\Omega) \text{ e } u|_{\Gamma_0} = 0 \} \\ V &= \{ v : v \in H^1(\Omega) \text{ e } v|_{\Gamma_0} = 0 \}. \end{aligned} \quad (5)$$

O que se obtém é, então:

$$\begin{aligned} S &= S(x, y; t), I = I(x, y; t) \text{ e } M = M(x, y; t) \text{ em } H \text{ tais que} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial t} | v \right) - \alpha_s (\Delta S | v) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} S | v) + \sigma_s (S | v) &= \\ = \lambda (S | v) - \frac{\lambda}{K} (S^2 | v) - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot (S \cdot I | v), \\ \left(\frac{\partial I}{\partial t} | v \right) - \alpha_1 (\Delta I | v) + \sigma_1 (I | v) &= +\beta (S \cdot I | v) - \gamma (I | v), \\ \left(\frac{\partial M}{\partial t} | v \right) &= \gamma (I | v), \quad \text{para } \forall v \in V. \end{aligned}$$

Ora, para $\forall t \in (0, T]$, este sistema, com o uso do Teorema de Green e a incorporação das condições de contorno de Dirichlet e de Von Neumann homogêneas, leva a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial t} | v \right) + \alpha_s (\nabla S \parallel \nabla v) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} S | v) + \sigma_s (S | v) &= \\ = \lambda (S | v) - \frac{\lambda}{K} (S^2 | v) - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot (S \cdot I | v), \\ \left(\frac{\partial I}{\partial t} | v \right) - \alpha_1 (\nabla I \parallel \nabla v) + \sigma_1 (I | v) &= + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot (S \cdot I | v) - \gamma (I | v), \\ \left(\frac{\partial M}{\partial t} | v \right) &= \gamma (I | v), \quad \text{para } \forall v \in V. \end{aligned} \quad (6)$$

Há, ainda, que se exigir das funções procuradas S , I e M que satisfaçam as condições iniciais, $S(x, y, 0) = S_0 = \text{constante}$, $I(x, y, 0) = I_0(x, y)$, e $M(x, y; 0) = 0$.

Discretização

Deste modo, obtivemos a formulação fraca, ou variacional, do problema originalmente proposto, formulação apropriada para a discretização via Método de Galerkin, com Elementos Finitos. Além disto iremos recorrer a Crank-Nicolson na discretização da variável temporal. Para isto, na prática, é necessário promover uma separação de variáveis: tratamentos diferenciados para a variável tempo e para as espaciais. O espaço de Hilbert H será aproximado por subespaços V_h cujos elementos são da forma

$$v = \sum_{j=1}^N c_j(t) \cdot \varphi_j(x, y).$$

As funções $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_N$ geram um subespaço V_h do espaço V de funções teste.

As soluções de (6) S , I e M serão aproximadas por expressões do tipo:

$$\begin{aligned} S_h &= \sum_{j=1}^N p_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \\ I_h &= \sum_{j=1}^N q_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \\ M_h &= \sum_{j=1}^N r_j(t) \cdot \varphi_j(x, y) \end{aligned} \tag{7}$$

o que, em (6), leva ao sistema não-linear de Equações Diferenciais Ordinárias:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{dp_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j p_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sum_j p_j(t) (\vec{V} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \sigma_s \sum_j p_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \lambda \sum_j p_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda}{K} \sum_j p_j(t) \sum_k p_k(t) \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_j p_j(t) \sum_k q_k(t) \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \quad (8) \\
& \sum_j \frac{dq_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_l \sum_j q_j(t) (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \sigma_l \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot \sum_j p_j(t) \sum_k q_k(t) \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \gamma \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j \frac{dr_j(t)}{dt} (\varphi_j | \varphi_i) = +\gamma \sum_j q_j(t) (\varphi_j | \varphi_i), \quad \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned}$$

O passo seguinte é o de se substituírem os termos de variação temporal, usando o método implícito de Crank-Nicolson:

$$\begin{aligned}
\frac{dc_j(t_n + \Delta t/2)}{dt} & \cong \frac{c_j(t_{n+1}) - c_j(t_n)}{\Delta t} \quad \text{com erro da ordem de } (\Delta t)^2 \quad \text{e} \\
c_j(t_n + \Delta t/2) & \cong \frac{c_j(t_{n+1}) + c_j(t_n)}{2} \quad \text{com erro da mesma ordem.} \quad (9)
\end{aligned}$$

Denominando $p_j^{(n)}$, $q_j^{(n)}$ e $r_j^{(n)}$ as aproximações de p , q e de r nos nós (x_j, y_j, t_n) , pode-se usar (9) e voltar a (8) para obter uma nova aproximação do sistema dado aí:

$$\begin{aligned}
& \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_s \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \sigma_s \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \lambda \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\lambda}{K} \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_j \frac{p_j^{(n+1)} + p_j^{(n)}}{2} \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} - q_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) + \alpha_l \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
& + \sigma_l \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = + \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \gamma \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j \frac{r_j^{(n+1)} - r_j^{(n)}}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i) = + \gamma \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} (\varphi_k | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned} \tag{10}$$

As condições iniciais também têm que ser discretizadas:

$$S_j^{(0)} = S_0(x_j, y_j) = S_0, \quad I_j^{(0)} = I_0(x_j, y_j) \quad \text{e} \quad M_j^{(0)} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \tag{11}$$

Nesta expressão, separando os termos em t_{n+1} e em t_n , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_j p_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\bar{V} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\sigma_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_j p_j^{(n+1)} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_j p_j^{(n+1)} \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \sum_j p_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\bar{V} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\sigma_s \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\lambda \Delta t}{2} \sum_j p_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_j p_j^{(n)} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_j p_j^{(n)} \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j q_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n+1)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) + \frac{\sigma_l \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \sum_j q_j^{(n+1)} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) = \\
& = \sum_j q_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n)}(\nabla \varphi_j \parallel \nabla \varphi_i) - \frac{\sigma_l \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \sum_j q_j^{(n)} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\gamma \Delta t}{2} \sum_j q_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i), \\
& \sum_j r_j^{(n+1)}(\varphi_j | \varphi_i) = \sum_j r_j^{(n)}(\varphi_j | \varphi_i) + \gamma \Delta t \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2}(\varphi_j | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned} \tag{12}$$

Reagrupando convenientemente os termos de (12), visando facilitar uma expressão que conduza de modo mais natural às manipulações algóricas, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_j p_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_s \Delta t}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\} = \\
& = \sum_j p_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_s \Delta t}{2} + \frac{\lambda \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\}, \\
& \sum_j q_j^{(n+1)} \left\{ \left[1 + \frac{\sigma_l \Delta t}{2} + \frac{\gamma \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \right. \\
& - \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) \right) \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\} = \\
& = \sum_j q_j^{(n)} \left\{ \left[1 - \frac{\sigma_l \Delta t}{2} - \frac{\gamma \Delta t}{2} \right] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \right. \\
& + \frac{\Delta t}{2} \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6} \cdot \frac{n+1}{2}\right) \right) \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \varphi_j | \varphi_i) \Big\} \tag{12'} \\
& \sum_j r_j^{(n+1)} (\varphi_j | \varphi_i) = \sum_j r_j^{(n)} (\varphi_j | \varphi_i) + \gamma \Delta t \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \\
& \text{para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
\end{aligned}$$

Algoritmo

Este sistema pode ser expresso de modo bastante resumido (visando a explicitação do procedimento algorítmico de aproximação) como:

$U_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot S^{(n+1)} = W_S(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot S^{(n)}$,
 $U_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot I^{(n+1)} = W_I(S^{(n)}, S^{(n+1)}, I^{(n)}, I^{(n+1)}) \cdot I^{(n)}$, e
 $U_M \cdot M^{(n+1)} = W_M \cdot M^{(n)} + w(I^{(n)}, I^{(n+1)})$, onde os operadores não lineares U_S , W_S , U_I , W_I e as matrizes U_M e W_M , além do vetor $w(I^{(n+1)}, I^{(n)})$, são dados, respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 U_S(i, j) &= [1 + \frac{\sigma_s \Delta t}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{2} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) + \frac{\lambda \Delta t}{2K} \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
 W_S(i, j) &= [1 - \frac{\sigma_s \Delta t}{2} + \frac{\lambda \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_s \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \\
 &- \frac{\Delta t}{2} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \nabla \varphi_j | \varphi_i) - \frac{\lambda \Delta t}{2K} \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i) - \\
 &- \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\lambda}{K} \right) \cdot \sum_k \frac{q_k^{(n+1)} + q_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
 U_I(i, j) &= [1 + \frac{\sigma_i \Delta t}{2} + \frac{\gamma \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) + \frac{\alpha_i \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) - \\
 &- \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} + \frac{1}{2}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
 W_I(i, j) &= [1 - \frac{\sigma_i \Delta t}{2} - \frac{\gamma \Delta t}{2}] \cdot (\varphi_j | \varphi_i) - \frac{\alpha_i \Delta t}{2} \cdot (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i) + \\
 &+ \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\bar{\beta} + \delta \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6} + \frac{1}{2}\right) \right) \cdot \sum_k \frac{p_k^{(n+1)} + p_k^{(n)}}{2} \cdot (\varphi_k \cdot \varphi_j | \varphi_i), \\
 U_M(i, j) &= W_M(i, j) = (\varphi_j | \varphi_i) \text{ e, ainda, o vetor } w \text{ sendo dado por} \\
 w(i) &= \gamma \Delta t \sum_j \frac{q_j^{(n+1)} + q_j^{(n)}}{2} (\varphi_j | \varphi_i), \text{ para } \forall \varphi_i \in \text{base de } V_h.
 \end{aligned} \tag{13}$$

A obtenção dos valores de $S^{(n+1)}$, $I^{(n+1)}$ e $M^{(n+1)}$ será por meio do seguinte esquema identificado como (14) e expresso tanto de modo didático quanto algorítmico:

A partir de $S^{(0)}$, $I^{(0)}$ e $M^{(0)}$

1. Obter $S^{(*)}$ da equação linear

$$U_S(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(0)}) \cdot S^{(*)} = W_S(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(0)}) \cdot S^{(0)};$$

2. Obter $I^{(*)}$ da equação linear

$$U_I(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(*)} = W_I(S^{(0)}, S^{(*)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(0)}; \quad (14)$$

3. Obter $M^{(*)}$ da equação linear

$$U_M \cdot M^{(*)} = W_M \cdot M^{(0)} + w(I^{(0)}, I^{(*)});$$

4. Obter $S^{(**)}$ da equação linear

$$U_S(S^{(0)}, S^{(**)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot S^{(**)} = W_S(S^{(0)}, S^{(**)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot S^{(0)};$$

5. Obter $I^{(**)}$ da equação linear

$$U_I(S^{(0)}, S^{(**)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(**)} = W_I(S^{(0)}, S^{(**)}, I^{(0)}, I^{(*)}) \cdot I^{(0)};$$

6. Obter $M^{(**)}$ da equação linear

$$U_M \cdot M^{(**)} = W_M \cdot M^{(0)} + w(I^{(0)}, I^{(**)});$$

7. De modo análogo, obter $S^{(***)}$, $I^{(***)}$ e $M^{(***)}$;

8. Depois de um número relativamente pequeno de iterações deste tipo, fazer

$$S^{(1)} = S^{(**...*)}, I^{(1)} = I^{(**...*)} \text{ e } M^{(1)} = M^{(**...*)};$$

9. Este procedimento triplo é repetido para cada passo no tempo para se obter:

$$U_S(S^{(n)}, S^{(**...*)}, I^{(n)}, I^{(**...*)}) \cdot S^{(**...*)} = W_S(S^{(n)}, S^{(**...*)}, I^{(n)}, I^{(**...*)}) \cdot S^{(n)},$$

$$U_I(S^{(n)}, S^{(**...*)}, I^{(n)}, I^{(**...*)}) \cdot I^{(**...*)} = W_I(S^{(n)}, S^{(**...*)}, I^{(n)}, I^{(**...*)}) \cdot I^{(n)}, \text{ e}$$

$$U_M \cdot M^{(**...*)} = W_M \cdot M^{(n)} + w(I^{(n)}, I^{(**...*)});$$

10. Fazer $S^{(n+1)} = S^{(**...*)}$, $I^{(n+1)} = I^{(**...*)}$ e $M^{(n+1)} = M^{(**...*)}$.

Simulações

Este algoritmo do modo como é aqui apresentado, repete em diversas dimensões um trabalho anterior, para uma única equação, de Peaceman e Rachford, onde além da sugestão para contornar iterativamente a não-linearidade do sistema, temos resultados de convergência.

Este programa foi rodado no aplicativo Matlab visando, por um lado, utilizar os recursos de matrizes esparsas, e, por outro, os de visualização (principalmente *plot*, *surf* e *contour*). Embora os ensaios iniciais tenham demorado razoavelmente, execuções mais recentes têm se revelado animadoramente rápidas.

Nas figuras abaixo, temos de início (fig. 1), as curvas de nível dos três compartimentos após 300 passos no tempo, mais a condição inicial da população de infectados. Neste domínio idealizado, podemos ver a simulação de uma situação possível: uma “invasão” no domínio de animais suscetíveis por um pequeno grupo de capivaras infectadas (presentes no canto superior direito – e só.). Nas imagens, podemos ver, ressalvadas as diferenças de concentração, a presença complementar de infectados e de suscetíveis, com a presença de morte “seguindo” a população de animais doentes.

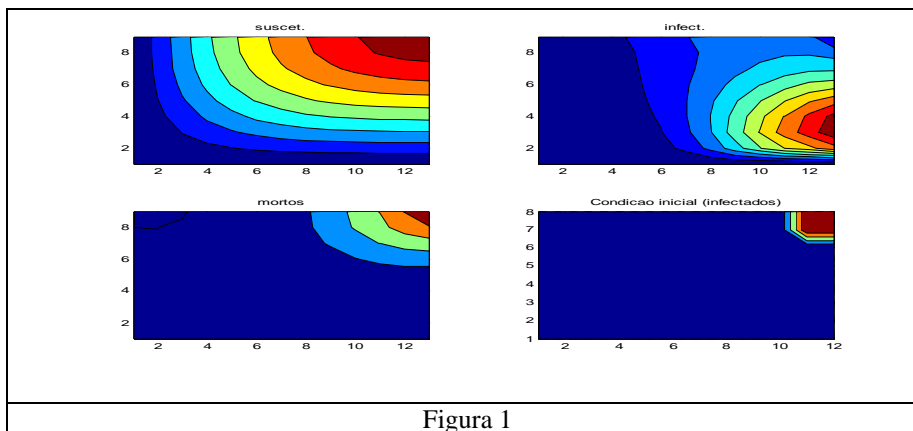


Figura 1

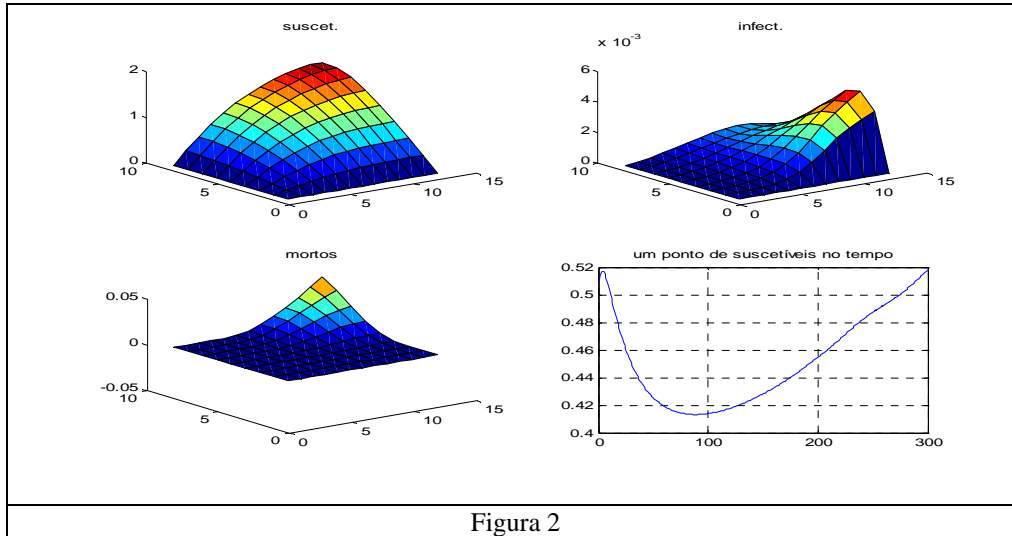


Figura 2

Na fig. 2, o quarto gráfico ilustra a evolução de um ponto no interior do domínio, e pode ser observada a mortalidade devida à doença, mais uma recuperação populacional seguindo uma curva que, a um tempo, sugere a periodicidade senoidal acoplada a uma evolução de tipo logístico. Este comportamento na simulação numérica do modelo é condizente com as informações locais, que dão conta de uma larga mortalidade seguida de uma lenta e segura recuperação populacional.

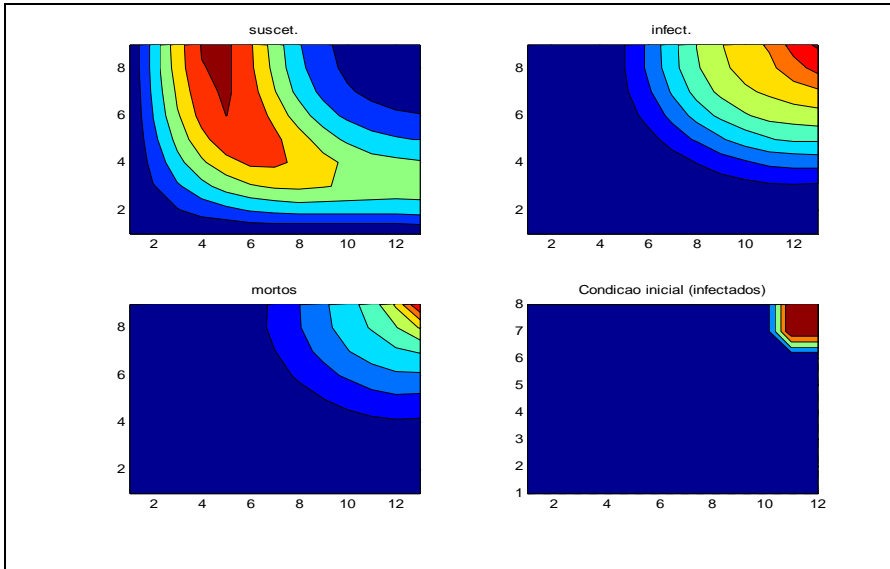


Figura 3

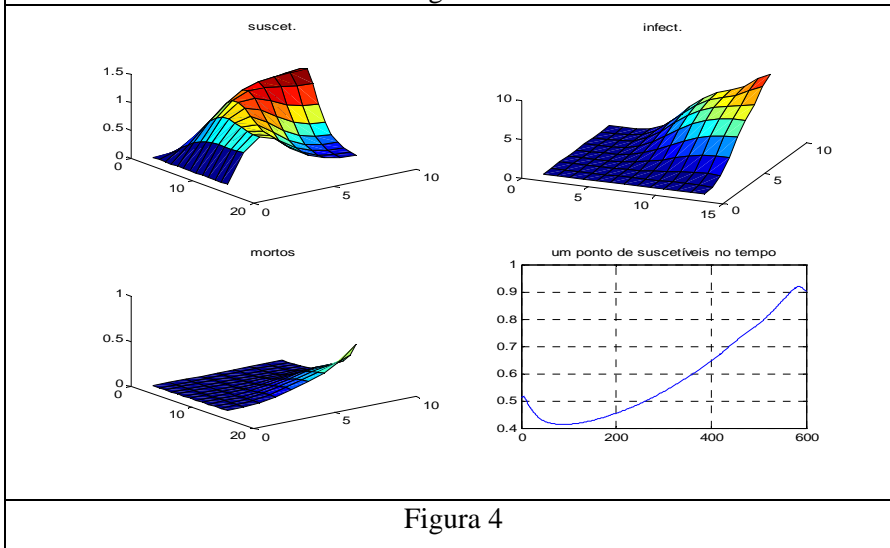


Figura 4

Nestas figuras (3. e 4.) temos a mesma situação, porém como o tempo final foi aumentado, com um conseqüente aumento no número de passos no tempo, temos os

efeitos realçados. Assim, podemos ver, novamente, o comportamento que chamaremos aqui de complementar, no sentido de populações de compartimentos diferentes (S e I) ocuparem espaços disjuntos. Além disso, no gráfico inferior, à direita, podemos acompanhar, de novo, a característica periódica acoplada ao crescimento populacional de animais suscetíveis, uma vez vencida a queda de concentração devida à endemia.

Conclusão

Ainda que sejam válidas muitas das críticas feitas a modelos deste tipo, restritas a uma só espécie, simulações deste tipo têm provado ser bastante úteis na confirmação de hipóteses, na verificação de valores para parâmetros de difícil obtenção e bb

Referências

- Banks, H.T. e Kareiva, P. Parameter Estimation Techniques for Transport Equations with Application to Population Dispersal and Tissue Bulk Flow Models. *J. Math. Biol.*, 17, 253-273, 1983.
- Bassanezi, R.C. e Ferreira Jr., W.C. *Equações Diferenciais e Aplicações*, HARBRA, 1988.
- Boch, J. e Supperer, R. *Parasitologia em medicina veterinária*. Ed. Hemisfério Sur S.A., Buenos Aires, 627 pp., 1992.
- Boero, J.J. *Parasitosis animalis*. Ed. Universitaria de Buenos Aires, 524 pp., 1967.
- Bolker, B. e Pacala, S.W. Using Moment Equations to understand Stochastic Driven Spatial Pattern Formation in Ecological Systems. *Theor. Popul. Biol.*, 52, 179-197, 1997.
- Cantrell, R.S. e Cosner, C. On the effects of spatial heterogeneity on the persistence of interacting species. *J. Math. Biology*, 37, 103-145, 1998.

Cantrell, R.S. e Cosner, C. Spatially Explicit Models for the Population Dynamics of a Species colonizing an Island. *Math. Biosci.*, 136, 65-107, 1996.

Capasso, V. *Mathematical Structures of Epidemic Systems*, Lecture Notes in Biomathematics, vol. 97, Springer-Verlag, 1993.

Gurney, W.S.C. e Nisbet, R.M. The Regulation of Inhomogeneous Populations. *J. Theor. Biol.*, 52, 441-457, 1975.

Gurtin, M.E. e MacCamy, R. On the Diffusion of Biological Populations. *Math. Biosci.*, 33, 35-49, 1977.

Hoppensteadt, F. *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics*. SIAM, 1975.

Ikeda, T. e Mimura, M. An interfacial approach to regional segregation of two competing species mediated by a predator. *J. Math. Biol.*, 31, 215-240, 1993.

Kardestuncer, H. e Norrie, D.H. (ed.). *Finite Element Handbook*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

Kareiva, P.M. Local movements in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. *Oecology*, 57, 322-327, 1983.

Murray, J.D. *Mathematical Biology*. Springer, 1989.

Peaceman, D.W. e Rachford, Jr, H.H. The numerical solutions of parabolic and elliptic differential equations. *J. SIAM*, v. 3, no 1, 28-41, 1955.

Webb, G.F. A recovery-relapse epidemic model with spatial diffusion. *J. Math. Biology*, v. 14, 177-194, 1982.

Wilder, J.W., Christie, I. e Colbert, J.J. Modelling of two-dimensional spatial effects on the spread of Forest pests and their management. *Ecological Modelling*, 82, 287-298, 1995.

