

Solução numérica para um problema de Cauchy fuzzy que modela o decaimento radioativo

G. L. Diniz¹,

DMAT, ICET–UFMT, 78.060-900, Cuiabá, MT.

L. C. Barros², J. F. C. A. Meyer³,

DMA, IMECC–UNICAMP, 13.083-970 – Campinas, SP.

1 Introdução

O uso de materiais radioativos no último século trouxe sérios riscos para o meio ambiente, principalmente, com relação aos depósitos de lixo radioativo. Neste artigo, propomos um modelo fuzzy para descrever o fenômeno de decaimento radioativo, usando equações diferenciais fuzzy, cuja solução analítica clássica é bem conhecida.

Chang e Zadeh (1972) foram os primeiros a introduzir o conceito de derivadas fuzzy (Ma et al., 1999). Mais tarde, Dubois e Prade (1982) usaram o princípio de extensão e suas aproximações, para obter os primeiros resultados com o cálculo diferencial para função fuzzy. Puri e Ralescu (1983) discutiram outros métodos onde propuseram duas definições, uma baseada na diferencial de Hukuhara de uma multifunção, limitada ao cone convexo, e outra para espaços de Banach (ver Ma et al. (1999)).

Kandel e Byatt (1981, 1980) aplicaram o conceito de equações diferenciais fuzzy para problemas dinâmicos fuzzy, mas foram Kaleva (1987, 1990); Nieto (1999); Ouyang e Wu (1989); Seikkala (1987) quem deram um tratamento rigoroso ao problema de valor inicial fuzzy (problema de Cauchy fuzzy).

Wu et al. (1996) obtiveram um teorema de existência e unicidade de solução do problema de Cauchy para as equações diferenciais fuzzy: $x'(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ para aplicações fuzzy de variável real, cujos conjuntos são normais, convexos e de suporte compacto em \mathbb{R}^n com a função f satisfazendo a condição generalizada de Lipchitz.

A solução analítica fuzzy do problema de Cauchy para equações diferenciais fuzzy de modelos que descrevem a dinâmica populacional foi apresentada em Barros et al. (2000).

A resolução de equações diferenciais fuzzy, via aproximação numérica, também é recente e uma das poucas referências é Ma et al. (1999), onde é apresentado um algoritmo numérico para resolver uma equação diferencial ordinária fuzzy, com um esquema baseado no

¹gerald@cpd.ufmt.br

²laeciocb@ime.unicamp.br

³joni@ime.unicamp.br

clássico método de Euler, seguido de uma análise de erro e ilustrado com alguns problemas de Cauchy (linear e não-linear).

Neste artigo, propomos um modelo fuzzy para descrever o fenômeno de decaimento radioativo, usando equações diferenciais fuzzy, cuja solução analítica clássica é bem conhecida. Aplicamos métodos do tipo Euler e Runge-Kutta para obter uma solução aproximada de um problema de valor inicial da equação diferencial ordinária linear fuzzy, que modela o decaimento radioativo. Os resultados numéricos fuzzy obtidos são comparados com a solução analítica fuzzy apresentada por Barros et al. (2000) para uma equação diferencial fuzzy similar.

2 Objetivos

- ▷ Obter soluções numéricas, via método de Euler, para um problema de Cauchy fuzzy;
- ▷ Análise de erros;
- ▷ Comparação dos resultados com a solução analítica fuzzy.

3 Descrição do problema e seu modelo matemático

O número de desintegrações por unidade de tempo mede a atividade radioativa de uma substância. Este fenômeno é devido à emissão de três tipos de radiações: partículas α (núcleos de hélio), partículas β (elétrons) e raios γ (ondas eletromagnéticas de alta frequência). Os primeiros experimentos que resultaram em tal compreensão foram realizados por Rutheford, Becquerel, Royds, Vilard e M. Curie no final do século XIX e início do XX, quando já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante.

O uso desse tipo de material deixa o público em geral em estado de alerta, e os benefícios que o uso de tais materiais pode trazer, somente podem ser avaliados se os seus perigos são dimensionados. O primeiro passo desse processo seria, talvez, o conhecimento das origens desses materiais.

A formulação matemática (ver Bassanezi e Ferreira Jr (1978)) que modela o processo de decaimento radioativo, pode ser descrita da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (1)$$

onde $N = N(t)$ é o número de átomos radioativos presentes na amostra no instante t e $\lambda > 0$ é a constante de desintegração radioativa, que pode ser obtida experimentalmente.

O sinal negativo na equação (1) é porque o número de átomos radioativos diminui com o passar do tempo, com isso a taxa de variação instantânea dN/dt deve ser negativa. A constante de desintegração λ , característica de cada elemento radioativo, permite dizer se este elemento tem vida curta ou longa.

A solução analítica clássica da equação (1) é dada por:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

sendo $N_0 = N(0)$ a quantidade inicial destes átomos.

Levando em conta que $N = (N_a/A)m$, onde A é o número de massa do elemento radioativo e N_a é o número de Avogadro, que vale $6,02 \times 10^{23} \text{mols}^{-1}$, daí a razão N_a/A é constante para cada elemento.

Assim, em termos da massa do material radioativo, a lei de atividade pode ser expressa por:

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t} \quad (3)$$

Este é o tratamento clássico para o problema, no entanto, apesar da simplicidade da equação a dificuldade maior está na contagem, para a obtenção dos parâmetros identificados no modelo. Os dados coletados, bem como o método adotado, quase sempre estão carregados de imprecisão e elementos de incerteza causados tanto pelo próprio processo de medição, como por algum tipo de subjetividade na adoção do método.

Desta forma, com o intuito de dar um tratamento matemático às questões que apresentam incertezas, o uso de sistemas fuzzy pode ser visto como uma ferramenta indispensável para a análise e compreensão do fenômeno em estudo. Para isto, adotaremos o processo “fuzzyness” como em Barros et al. (1997) e Kaleva (1987).

Para uma primeira aproximação, considerando a condição inicial como um conjunto fuzzy, adotaremos a seguinte equação diferencial ordinária fuzzy:

$$u'(t) = -\lambda u(t), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{E}^1 \quad (4)$$

onde $u'(t)$ é a derivada de Hukuhara (ver Puri e Ralescu (1983)), $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{E}^1$, e $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$, sendo $\mathbb{E}^1 = \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : u \text{ é fuzzy convexo, i.é, } u(\delta x + (1 - \delta)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}, \forall \delta \in [0, 1]\}$ e $\{u \in \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : [u]^\alpha \text{ é compacto e não vazio } \forall \alpha \in (0, 1], \text{ ou seja, } [u]^\alpha = [[\underline{u}]^\alpha, [\overline{u}]^\alpha] \in \mathbb{R}_+\}$.

A existência e unicidade da solução de (4), para T intervalo fechado de \mathbb{R}_+ , é apresentada em Kaleva (1987); Barros et al. (1997) e Nieto (1999).

O tratamento numérico para o problema será, então, obter aproximações para o problema de Cauchy fuzzy: $u'(t) = -\lambda u(t)$, $u(0) = u_0$, cuja forma paramétrica é dada por:

$$\begin{cases} [\underline{u}(t)]^\alpha = -\lambda [\overline{u}(t)]^\alpha, & [\underline{u}(0)]^\alpha = [\underline{u}_0]^\alpha, & 0 < \alpha \leq 1 \\ [\overline{u}(t)]^\alpha = -\lambda [\underline{u}(t)]^\alpha, & [\overline{u}(0)]^\alpha = [\overline{u}_0]^\alpha, & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

sendo que, $([\underline{u}]^\alpha; [\overline{u}]^\alpha)$ devem satisfazer as seguintes condições:

- i. $[\underline{u}]^\alpha$ é uma função contínua não-decrescente limitada à esquerda, em $[0, 1]$;
- ii. $[\overline{u}]^\alpha$ é uma função contínua não-crescente limitada à direita, em $[0, 1]$;
- iii. $[\underline{u}]^\alpha \leq [\overline{u}]^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

4 Método Numérico

Para a obtenção das aproximações numéricas das soluções de cada equação dada no sistema (5), faremos uma discretização do intervalo $[0, T]$, para um T prefixado, através de

um conjunto $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$; em seguida, construímos o esquema numérico para as aproximações seguindo o método de Euler, como sugerido em Ma et al. (1999), que se baseia nas aproximações de primeira ordem para $[\underline{u}]^\alpha$ e $[\overline{u}]^\alpha$ dadas pelas diferenças avançadas:

$$[z'(t_i)]^\alpha \approx \frac{[z(t_i + h)]^\alpha - [z(t_i)]^\alpha}{h} \quad (6)$$

onde $z'(t_i)$ é calculada para $[\underline{u}]^\alpha$ e $[\overline{u}]^\alpha$.

Daí, chamando $z_i = z(t_i)$ com $t_i = t_0 + ih$ para $1 \leq i \leq n$ e $h = (T - t_0)/n$ e usando (6) em (5), teremos:

$$\begin{cases} [\underline{u}_{i+1}]^\alpha = [\underline{u}_i]^\alpha - h\lambda [\overline{u}_i]^\alpha, & 0 < \alpha \leq 1 \\ [\overline{u}_{i+1}]^\alpha = [\overline{u}_i]^\alpha - h\lambda [\underline{u}_i]^\alpha & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

Os códigos numéricos para as aproximações foram desenvolvidos através do MATLAB®, onde incluímos os resultados numéricos para o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (para comparação), que estão apresentados através de gráficos, para melhor visualização. Nas figuras, apresentamos a solução numérica fuzzy (Euler(+)) e Runge-Kutta(*) e a solução analítica fuzzy (apresentada em Barros et al. (2000)), que é dada por:

$$\begin{cases} [\underline{u}(t)]^\alpha = \frac{[\underline{u}_0]^\alpha - [\overline{u}_0]^\alpha}{2} e^{\lambda t} + \frac{[\underline{u}_0]^\alpha + [\overline{u}_0]^\alpha}{2} e^{-\lambda t} \\ [\overline{u}(t)]^\alpha = \frac{[\overline{u}_0]^\alpha - [\underline{u}_0]^\alpha}{2} e^{\lambda t} + \frac{[\overline{u}_0]^\alpha + [\underline{u}_0]^\alpha}{2} e^{-\lambda t} \end{cases} \quad (8)$$

5 Resultados

Para as simulações onde aplicamos o modelo, consideramos como condição inicial, para todos os materiais radioativos, uma massa “em torno de 100 g”, descrita pelo seguinte conjunto fuzzy:

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x - 90}{10}, & \text{se } 90 \leq x < 100 \\ \frac{110 - x}{10}, & \text{se } 100 \leq x \leq 110 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (9)$$

O gráfico da figura 1, é o conjunto fuzzy dado pela equação (9), onde os pontos marcados representam os α -níveis utilizados para iniciar as aproximações para os métodos numéricos.

Para a constante de desintegração λ , característica de cada elemento radioativo, utilizamos os valores apresentados em Bassanezi e Ferreira Jr (1978) , para os seguintes elementos:

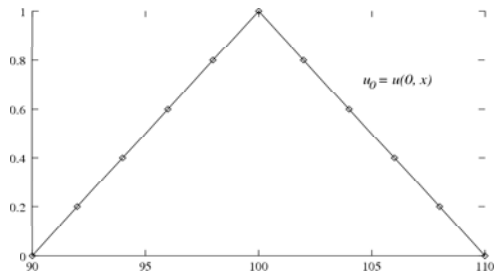


Figura 1: Condição inicial dada pela equação (9)

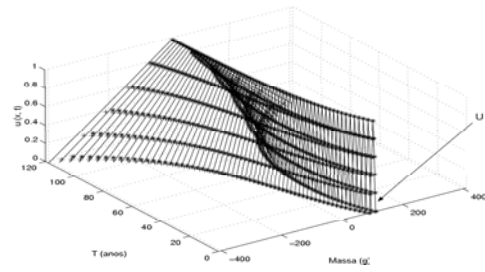


Figura 2: Gráfico do decaimento de Pb^{210} , u_0 dado por (9) e $h = 2,0$.

- Chumbo (Pb^{210}) : $\lambda = 0,315 \times 10^{-1} \text{ ano}^{-1}$;
- Rádio (Ra^{226}) : $\lambda = 0,440 \times 10^{-3} \text{ ano}^{-1}$.

O intervalo de tempo considerado foi $[0, 120]$, com 60 iterações, ou seja, $h = 2,0$ para (Pb^{210}). Apresentamos os gráficos das soluções analíticas e numéricas para o elemento Pb^{210} na figura 2.

A seguir, apresentamos o resultado obtido na última iteração, ou seja, em $t = 120$ anos (figura 3-a). Para o cálculo do erro que aparece na figura 3-b, chamando de “ u ” a solução analítica, de “ v ” a solução numérica obtida pelo método de Euler e de “ y ” a obtida por Runge-Kutta de 4ª ordem, definimos o erro da seguinte forma:

$$\text{Erro}_{\text{Euler}} = \text{norm}(u - v);$$

$$\text{Erro}_{\text{Runge-Kutta}} = \text{norm}(u - y);$$

onde $(u - v)$ e $(u - y)$ são calculados ponto-a-ponto, em cada instante t , e “norm” é a norma euclidiana, dada por:

$$\text{norm}(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}.$$

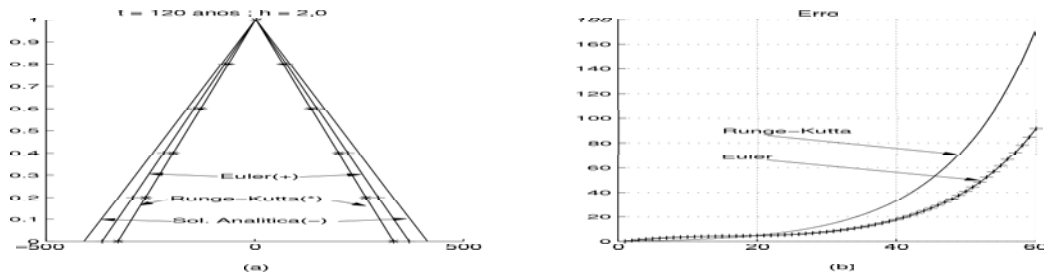


Figura 3: Comparação de resultados para Pb^{210} , u_0 dado por (9) e $h = 2,0$.

Para Ra^{226} obtivemos resultados mais satisfatórios, no sentido de melhor aproximação entre a solução analítica e as numéricas. Na figura 4, a seguir, utilizamos 100 iterações e $h = 30,0$.

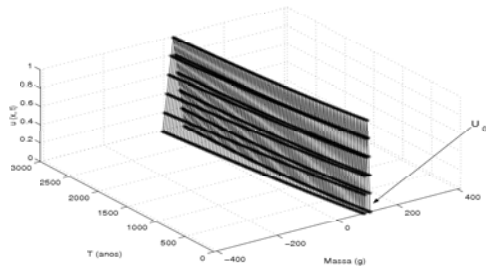


Figura 4: Gráfico do decaimento de Ra^{226} , u_0 dado por (9) e $h = 30,0$.

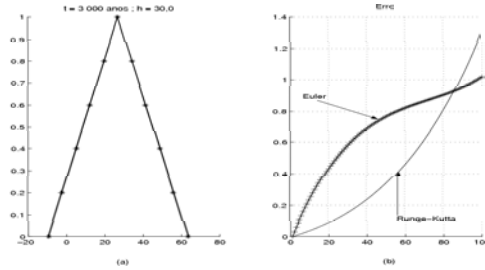


Figura 5: Comparação de resultados para Ra^{226} , u_0 dado por (9), $h = 30,0$.

Os resultados apresentados nas figuras 5-a e 5-b, mostram a boa aproximação obtida pelos dois métodos, cujos gráficos estão sobrepostos para o instante final $t = 3000$ anos, onde a solução analítica se justapõe às dadas por Euler(+) e Runge-Kutta (*).

O erro apresentado na figura 5-b foi calculado da mesma forma, como a indicada anteriormente para a figura 3-b.

6 Conclusões

O método produziu aproximações bem mais satisfatórias entre a solução numérica fuzzy e a solução analítica fuzzy para Ra^{226} (figuras 4 e 5) do que para Pb^{210} (figuras 2 e 3), no sentido que, graficamente, estas soluções ficam cada vez mais diferentes. Mais precisamente, verificamos que a diferença entre os diâmetros dos intervalos da solução analítica fuzzy para as soluções numéricas fuzzy, em cada α -nível, foi um pouco menor ao longo do tempo em Ra^{226} comparado a Pb^{210} .

Apesar disso, foram compatíveis com a solução analítica fuzzy, uma vez que os diâmetros dos intervalos, para cada α -nível, são crescentes com o tempo. Isto se explica pelo fato que, com o passar do tempo, aumenta a impossibilidade de afirmar precisamente o valor da emissão de radiação em cada instante. Este fato é, tecnicamente falando, uma conseqüência do conceito de taxa de variação fuzzy. Esta leva em conta as incertezas passadas e presentes para prever o futuro, já que $u'(t) = f(t, u(t))$ e f é uma função fuzzy. O que, conforme mencionado antes, pode ser interpretado como aumento da incerteza com o passar do tempo.

A precisão do método numérico empregado (tipo Euler) é da ordem de h , para cada iteração. Mesmo assim, ele apresentou-se como um método confiável de aproximação da solução para escalas de tempo grande, como no caso do decaimento radioativo.

Para o α -nível 1 ($\alpha = 1$), houve maior similaridade entre os resultados numéricos fuzzy e a solução analítica fuzzy. Porém, neste caso a solução fuzzy coincide com a solução determinística, apresentada no tratamento clássico do problema, dado pela equação (3), como provado em Barros et al. (1997).

Cabe observar, que para cada t fixo a solução $u(t)$ mantém a forma inicial, ou seja, tipo triangular, o que geralmente não acontece para outros tipos de condição inicial para

equações diferenciais fuzzy, como a considerada em (4).

Em futuros trabalhos, poderemos considerar o parâmetro λ como um conjunto fuzzy (tipo triangular) de modo a melhorar o modelo, uma vez que o valor de λ apresenta alguma incerteza também.

Referências

- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Tonelli, P. A. (1997). Remarks on deterministic orbits in fuzzy dynamical systems. in “Seventh IFSA World Congress”, Vol. II, Praga.
- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Tonelli, P. A. (2000). Fuzzy modelling in population dynamics. *Ecological Modelling*, 128:27–33.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). *Equações diferenciais com aplicações*. Ed. Harbra, S. Paulo.
- Chang, S. L. e Zadeh, L. A. (1972). On fuzzy mapping and control. *IEEE Trans. Systems Man Cybernetics*, 2:30–34.
- Dubois, D. e Prade, H. (1982). Towards fuzzy differential calculus: Part 3, differentiation. *Fuzzy Sets and Systems*, 8:225–233.
- Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:301–317.
- Kaleva, O. (1990). The cauchy problem for fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 35:389–396.
- Kandel, A. e Byatt, W. J. (1980). Fuzzy process. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:117–152.
- Kandel, A. e Byatt, W. J. (1981). Fuzzy differential equations. in “Proc. Internat. Conf. Cybernetics and Society”, Tóquio.
- Ma, M., Friedman, M., e Kandel, A. (1999). Numerical solutions of fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 105:133–138.
- Nieto, J. J. (1999). The cauchy problem for continuous fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 102:259–262.
- Ouyang, H. e Wu, Y. (1989). On fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 32:321–325.
- Puri, M. L. e Ralescu, D. A. (1983). Differentials of fuzzy functions. *J. Math. Analysis and Applications*, 91:552–558.
- Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:319–330.
- Wu, C., Song, S., e Lee, E. S. (1996). Approximate solutions, existence and uniqueness of the cauchy problem of fuzzy differential equations. *J. Math. Analysis and Applications*, 202:629–644.